REPRESENTATIONS DES FONCTIONS RECURSIVES EN CATEGORIES

UNIVERSITÉ McGILL

REPRÉSENTATIONS DES FONCTIONS RÉCURSIVES DANS LES CATÉGORIES

PAR

MARIE-FRANCE THIBAULT

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

THÈSE PRÉSENTÉE À
LA FACULTÉ DES ÉTUDES AVANCÉES ET DE LA RECHERCHE
COMME EXIGENCE PARTIELLE DU GRADE DE
PHILOSOPHIAE DOCTOR (MATHÉMATIQUES)

JANVIER 1977

Marie-France Thibault
Représentations des fonctions récursives dans les catégories
Philosophiae Doctor
Département de mathématiques

RESUME

Pouvons-nous caractériser la catégorie des fonctions primitives récursives, la catégorie des fonctions récursives?

Considérons les catégories cartésiennes fermées, fermées sous l'axiome de Peano-Lawvere, que nous appellerons pré-récursives et précisons ce qu'est une fonction représentable dans une telle catégorie. Toute fonction primitive récursive est représentable dans une catégorie pré-récursive. Dans $\overline{\phi}$, la catégorie pré-récursive libre engendrée par la catégorie vide ϕ, tout morphisme $T \to N$ représente un nombre naturel et tout morphisme $N^n \to N^m$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, représente une fonction récursive. De plus, on peut trouver un morphisme qui représente une fonction qui n'est pas primitive récursive et construire une fonction récursive non représentable dans $\overline{\phi}$.

A la suite de ces résultats, nous présentons des structures de catégorie primitive récursive et de catégorie récursive, chaque structure engendrant une catégorie dont la classe des fonctions représentables est respectivement la classe des fonctions primitives récursives et celle des fonctions récursives.

Marie-France Thibault
Representations of recursive functions in categories
Philosophiae Doctor
Department of mathematics

ABSTRACT

In this thesis, possible characterizations of the category of primitive recursive functions and the category of recursive functions are studied.

Closed cartesian categories, closed under the Peano-Lawvere axiom, which are called pre-recursive, are considered first. Representable functions in such a category are introduced. Every primitive recursive function is representable in a pre-recursive category. In $\overline{\phi}$, the free pre-recursive category generated by the empty category ϕ, every morphism $T \to N$ represents a natural number and every morphism $N^n \to N^m$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, represents a recursive function. Furthermore, a morphism representing a function which is not primitive recursive is found. A recursive function which is not representable in $\overline{\phi}$ is constructed.

Following the above, structures of primitive recursive category and structures of recursive category are proposed, each structure generating a category whose class of representable functions is respectively the class of primitive recursive functions and the class of recursive functions.

À mes parents

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Dans son article sur l'incomplétude de certaines théories mathématiques, Gödel [6] construit une théorie formelle des nombres où les axiomes arithmétiques sont ceux de Peano. Il y introduit une définition précise de la classe des fonctions primitives récursives (qu'il appelle fonctions récursives), cette classe jouant un rôle important dans son théorème d'incomplétude. Cette classe est fermée sous le schéma de récurrence suivant:

si $g : N^n \to N$ et $h : N^{n+2} \to N$ sont deux fonctions primitives récursives, la fonction $f : N^{n+1} \to N$ définie par

$$f(a_1,\ldots,a_n,0) = g(a_1,\ldots,a_n)$$
$$f(a_1,\ldots,a_n,m+1) = h(a_1,\ldots,a_n,m,f(a_1,\ldots,a_n,m)),\ \forall(a_1,\ldots,a_n,m) \in N^{n+1},$$

est aussi primitive récursive.

Cette nouvelle fonction est définie à l'aide d'une récursion sur la dernière variable, l'idée de récursion découlant de la notion d'induction mathématique formulée dans les axiomes de Peano. Or certains systèmes d'équations appliquant l'idée de récursion à plusieurs variables définissent des fonctions qui ne sont pas primitives récursives. Ackermann en a donné un exemple qui fut simplifié par Péter [20]. Sur une suggestion de Herbrand, Gödel [7] définit alors la classe des fonctions récursives (qu'il appelle générales récursives), cette classe étant fermée sous la définition de fonctions à l'aide des systèmes d'équations récursifs.

De leur côté, Kleene et Church étudient la classe des fonctions "λ-définissables" et croient que cette classe caractérise le concept intuitif de la classe des fonctions calculables, une fonction calculable étant une fonction pour laquelle il existe un "algorithme de calcul". En 1936, Church [1] et Kleene [9] démontrent que la classe des fonctions λ-définissables est identique à la classe des fonctions récursives. Church propose alors sa thèse que "toutes les fonctions intuitivement calculables sont λ-définissables ou récursives". Vers la même période, Turing propose comme "classe de fonctions calculables" la classe des fonctions calculables par les machines de Turing. Cette nouvelle classe se révèle identique aux deux autres (Turing [26]). Une autre formulation équivalente a été fournie plus tard par les algorithmes de Markov. La classe des fonctions λ-définissables se retrouve aussi en logique combinatoire, théorie développée par Schönfinkel, Curry et Rosser, ce dernier démontrant l'équivalence entre la logique combinatoire et le système de λ-conversion de Church. La logique combinatoire telle que formulée à l'origine permet l'existence de paradoxes et Curry [3] y remédie en y introduisant les "types".

Dans les années 60, se développe la théorie des catégories, les premiers concepts étant présentés par MacLane [17]. Les mathématiciens s'intéressent alors aux relations entre la logique et les catégories. Avec la notion de catégorie cartésienne fermée proposée par Eilenberg & Kelly [4], Lambek [15] démontre que la logique propositionnelle positive intuitioniste présentée sous forme de système déductif permet de construire des catégories cartésiennes fermées libres. De plus, Lambek présente la logique combinatoire avec types à l'aide de la notion d'ontologie, prouve que "toute ontologie engendre une catégorie cartésienne fermée" et démontre que la réciproque se vérifie. A la suite de cette constatation, Lambek [16] démontre la version catégorique du théorème fondamental de la logique combinatoire, c'est-à-dire la complétude fonctionnelle des catégories cartésiennes fermées.

Dans cette ligne de pensée, est-il possible de remplacer la notion de "λ-définissabilité d'une fonction" par la notion de "constructibilité d'un morphisme" dans une catégorie cartésienne fermée munie d'une structure additionnelle ou encore dans une catégorie "cartésienne, fermée ou non, munie d'une structure additionnelle" libre? Comme la classe des fonctions λ-définissables est celle des fonctions récursives, on peut reformuler l'interrogation précédente par: Est-il possible de caractériser la catégorie des fonctions primitives récursives, la catégorie des fonctions récursives?

Cette question est à l'origine de nos recherches dont nous donnons les principaux résultats.

Gödel a utilisé les axiomes de Peano dans sa formulation d'une théorie des nombres et son schéma de récurrence permettant la définition de fonctions primitives récursives est basée sur l'induction mathématique telle que présentée par Peano. Lawvere a regroupé et généralisé les axiomes de Peano dans l'axiome de Peano-Lawvere (MacLane [17]). Freyd [5] a utilisé l'axiome de Peano-Lawvere dans sa définition de topos avec objet de nombres naturels et a démontré que tout topos avec objet de nombres naturels est fermé sous le schéma de récurrence de Gödel.

Dans un premier temps, nous étudions les catégories "pré-récursives", c'est-à-dire les catégories cartésiennes fermées "fermées sous l'axiome de Peano-Lawvere" dont nous oublions l'unicité. Ces catégories admettent des représentations des fonctions primitives récursives et toute fonction représentable dans la catégorie pré-récursive libre engendrée par la catégorie vide est récursive. Deux questions surgissent à la suite de ces résultats:

Si nous notons par $\overline{\phi}$, la catégorie pré-récursive libre engendrée par ϕ,

1. la classe des fonctions représentables dans $\overline{\phi}$ contient-elle strictement la classe des fonctions primitives récursives?
2. la classe des fonctions récursives contient-elle strictement la classe des fonctions représentables dans $\overline{\phi}$?

La première réponse est positive car nous démontrons la représentativité dans $\overline{\phi}$ d'une fonction non primitive récursive, fonction que nous retrouvons dans Péter [21].

Avant d'aborder la seconde question, nous devons nous attarder à l'étude des morphismes de $\overline{\phi}$ susceptibles de représenter une fonction. Cette étude peut se ramener au cas des morphismes de la forme $T \to N$, T étant l'objet terminal de $\overline{\phi}$: "Tout morphisme $T \to N$ de $\overline{\phi}$ est-il de la forme $\sigma^n\theta$ ou non, σ et θ étant des morphismes de $\overline{\phi}$ représentant respectivement la fonction successeur et le nombre zéro?" Le concept de morphisme calculable permet de démontrer que tout morphisme $T \to N$ de $\overline{\phi}$ est effectivement de la forme $\sigma^n\theta$, c'est-à-dire représente un nombre naturel.

Cette constatation apporte ainsi une réponse affirmative à la deuxième question laissée en suspens car la méthode de diagonalisation permet alors la construction d'une fonction récursive non représentable dans $\overline{\phi}$.

Ce dernier résultat nous conduit à l'étude de "catégories récursives" telles que la classe des fonctions représentables dans la catégorie récursive libre engendrée par la catégorie vide égale la classe des fonctions récursives. Nous proposons deux structures possédant ces propriétés et même plus car elles présentent une solution au cas des fonctions partiellement récursives.

Reprenons maintenant le problème original de la caractérisation de la catégorie des fonctions primitives récursives, l'axiome de Peano-Lawvere nous ayant fourni une structure trop riche. Nous étudions alors le cas des catégories cartésiennes fermées sous le "schéma de récurrence de Gödel", appelées "catégories primitives récursives (A)". La démonstration de l'égalité de la classe des fonctions représentables dans la catégorie primitive récursive (A) libre engendrée par ϕ et de la classe des fonctions primitives récursives fait appel à l'étude de la forme des morphismes. Szabo [24] et Mann [18] se sont intéressés à ce sujet dans le cas des catégories cartésiennes fermées, mais ce sont les travaux de Prawitz [22] qui ont engendré les idées les plus fructueuses dans ce cas-ci. Par la suite, nous construisons d'autres structures de catégorie primitive récursive, certaines s'inspirant des réductions du schéma de récurrence de Gödel, suggérées par Rózsa Péter [21] et nous comparons les squelettes des catégories primitives récursives libres engendrées par la catégorie vide, chaque structure étudiée donnant naissance à une telle catégorie. Dans une dernière remarque, nous voyons comment le concept de catégorie pré-récursive peut découler de l'étude des catégories primitives récursives.

CHAPITRE 1

RAPPEL DE CERTAINES NOTIONS LOGIQUES ET CATÉGORIQUES

Dans ce premier chapitre, nous verrons quelques définitions et notations utiles par la suite.

1.1 FONCTIONS PRIMITIVES RÉCURSIVES, RÉCURSIVES ET PARTIELLEMENT RÉCURSIVES

Dans la littérature, nous retrouvons plusieurs définitions équivalentes de la classe des fonctions primitives récursives. Nous présentons ici celle de Mendelson [19].

NOTATION Dans tout le texte, N représente l'ensemble des nombres naturels $\{0,1,2,...\}$ et N^+, l'ensemble des nombres naturels positifs $\{1,2,3,...\}$.

DEFINITION 1.1 La classe des fonctions primitives récursives est la plus petite classe de fonctions de N^n dans N, $n \in N^+$, satisfaisant aux trois conditions suivantes:

a) elle contient les fonctions suivantes:

la fonction constante zéro $\kappa: N \to N$ définie par $\kappa(n) = 0$, $\forall n \in N$,

la fonctions successeur $s : N \to N$ définie par $s(n) = n+1$, $\forall n \in N$,

et les fonctions projection $\pi_{m,i} : N^m \to N$, $\forall m \in N^+$, $\forall i \in [1,m]$, $\pi_{m,i}$ étant définie par $\pi_{m,i}(a_1,...,a_m) = a_i$, $\forall (a_1,...,a_m) \in N^m$.

b) elle est fermée sous la substitution:

si les fonctions $g : N^m \to N$, $h_1 : N^n \to N$, $h_2 : N^n \to N$, ..., $h_m : N^n \to N$

appartiennent à la classe, alors la fonction $f : N^n \to N$, définie comme suit, appartient aussi à la classe

$$f(a_1,\ldots,a_n) = g(h_1(a_1,\ldots,a_n),h_2(a_1,\ldots,a_n),\ldots,h_m(a_1,\ldots,a_n)),$$
$$\forall (a_1,\ldots,a_n) \in N^n$$

c) elle est fermée sous la récurrence:

si les fonctions $g : N^n \to N$ et $h : N^{n+2} \to N$ appartiennent à la classe, la fonction $f : N^{n+1} \to N$, définie comme suit, appartient aussi à la classe

$$f(a_1,\ldots,a_n,0) = g(a_1,\ldots,a_n)$$
$$f(a_1,\ldots,a_n,m+1) = h(a_1,\ldots,a_n,m,f(a_1,\ldots,a_n,m)),\ \forall (a_1,\ldots,a_n,m) \in N^{n+1}$$

Dans le texte qui suit, nous sommes intéressés non seulement aux fonctions primitives récursives $N^n \to N$ mais aussi au produit de fonctions primitives récursives $N^n \to N^2$, $N^n \to N^3$, ... C'est pourquoi nous utiliserons la définition suivante pour les fonctions primitives récursives, de préférence à la définition 1.1.

<u>DEFINITION 1.2</u> La classe des fonctions primitives récursives est la plus petite classe de fonctions de N^n dans N^m, $n \in N^+$, $m \in N^+$,

a) contenant la fonction constante zéro $\kappa : N \to N$, la fonction successeur $s : N \to N$ et les fonctions projection $\pi_{m,i} : N^m \to N$, $\forall m \in N$, $\forall i \in [1,m]$.

b) fermée sous le "produit par N":

si $f : N^n \to N^m$ et $g : N^n \to N$ appartiennent à la classe, $\langle f,g\rangle : N^n \to N^{m+1}$ appartient aussi à la classe, où $\langle f,g\rangle$ est définie par

$$\langle f,g\rangle(a_1,\ldots,a_n) = (f(a_1,\ldots,a_n),g(a_1,\ldots,a_n)),\ \forall (a_1,\ldots,a_n) \in N^n,$$

$(f(a_1,\ldots,a_n),g(a_1,\ldots,a_n))$ étant un élément de N^{m+1}.

c) fermée sous la composition:

si $f : N^n \to N^m$ et $g : N^m \to N^s$ appartiennent à la classe, $g \circ f : N^n \to N^s$ appartient aussi à la classe, où $g \circ f$ est définie par

$g \circ f(a_1,\ldots,a_n) = g(f(a_1,\ldots,a_n)),\ \forall(a_1,\ldots,a_n) \in N^n$

d) fermée sous la récurrence:

si $g : N^n \to N$ et $h : N^{n+2} \to N$ appartiennent à la classe, $r(g,h) : N^{n+1} \to N$ appartient à la classe, où $r(g,h)$ est définie par les deux équations

$r(g,h)(a_1,\ldots,a_n,0) = g(a_1,\ldots,a_n)$

$r(g,h)(a_1,\ldots,a_n,m+1) = h(a_1,\ldots,a_n,m,r(g,h)(a_1,\ldots,a_n,m)),$

$\forall(a_1,\ldots,a_n,m) \in N^{n+1}.$

<u>REMARQUE</u> Si nous comparons les définitions 1.1 et 1.2, nous constatons que toute fonction $f : N^n \to N$ primitive récursive au sens de 1.1, l'est au sens de 1.2 et toute fonction $f : N^n \to N^m$ primitive récursive au sens de 1.2 est le produit de fonctions primitives récursives au sens de 1.1.

Par la suite, il sera important de pouvoir vérifier l'appartenance d'une fonction à la classe des fonctions primitives récursives. Pour ce faire, il faut être capable de décrire la fonction à l'aide des règles mentionnées dans la définition 1.2. Par contre, ces règles permettent d'introduire une fonction plus d'une fois. Ainsi, la fonction identité $I(N) : N \to N$ est une fonction primitive récursive car elle est égale à $\pi_{1,1} : N \to N$. Mais elle est aussi égale à $\pi_{1,1}\pi_{1,1} : N \to N$. De même, la fonction $\delta : N \to N$ est aussi présente sous la forme $\pi_{1,1}\delta : N \to N$ dans la classe des fonctions primitives récursives. La définition suivante introduit la notion de "description de fonction primitive récursive" et associe à chaque description une fonction primitive récursive et une longueur.

<u>DEFINITION 1.3</u> La classe des descriptions des fonctions primitives récursives est définie de façon inductive.

i) les expressions suivantes sont des descriptions:

$\overline{\kappa} : N \to N$, $\overline{\delta} : N \to N$, $\overline{\pi}_{m,i} : N^m \to N$, $\forall m \in N^+$, $\forall i \in [1,m]$,

les descriptions $\overline{\kappa}$, $\overline{\delta}$ et $\overline{\pi}_{m,i}$, $\forall m \in N^+$, $\forall i \in [1,m]$ sont associées respectivement aux fonctions κ, δ et $\pi_{m,i}$,

la longueur des descriptions $\overline{\kappa}$, $\overline{\delta}$, $\overline{\pi}_{m,i}$ que nous notons $\lambda(\overline{\kappa})$, $\lambda(\overline{\delta})$, $\lambda(\overline{\pi}_{m,i})$ est 1, $\forall m \in N^+$, $\forall i \in [1,m]$.

ii) si $\overline{f} : N^n \to N^m$ et $\overline{g} : N^n \to N$ sont des descriptions associées respectivement aux fonctions primitives récursives $f : N^n \to N^m$ et $g : N^n \to N$, alors $\overline{\langle \overline{f},\overline{g} \rangle} : N^n \to N^{m+1}$ est une description associée à la fonction $\langle f,g \rangle : N^n \to N^{m+1}$ et $\lambda(\overline{\langle \overline{f},\overline{g} \rangle}) = \lambda(\overline{f}) + \lambda(\overline{g}) + 1$

iii) si $\overline{f} : N^n \to N^m$ et $\overline{g} : N^m \to N^s$ sont des descriptions associées respectivement aux fonctions primitives récursives $f : N^n \to N^m$ et $g : N^m \to N^s$, alors $\overline{gf} : N^n \to N^s$ est une description associée à la fonction $gf : N^n \to N^s$ et $\lambda(\overline{gf}) = \lambda(\overline{g}) + \lambda(\overline{f})$

iv) si $\overline{g} : N^n \to N$ et $\overline{h} : N^{n+2} \to N$ sont des descriptions associées respectivement aux fonctions primitives récursives $g : N^n \to N$ et $h : N^{n+2} \to N$, alors $r(\overline{g},\overline{h}) : N^{n+1} \to N$ est une description associée à la fonction récurrence $(g,h) : N^{n+1} \to N$ et $\lambda(r(\overline{g},\overline{h})) = \lambda(\overline{g}) + \lambda(\overline{h}) + 1$

v) Ce sont les seules descriptions de fonctions primitives récursives.

<u>REMARQUE</u> Comme nous l'avons déjà mentionné, toute fonction primitive récursive peut admettre plus d'une description, mais elle en admet au moins une et toute description est associée à une fonction primitive récursive. De plus,

il existe un nombre fini de fonctions primitives récursives admettant une description d'une longueur donnée.

Voyons maintenant la classe des fonctions récursives.

DEFINITION 1.4 Si nous ajoutons à la définition 1.2 de la classe des fonctions primitives récursives la condition suivante:

e) fermée sous le minimum effectif:

si $g : N^{n+1} \to N$ appartient à la classe et si pour tout élément $(a_1,\ldots,a_n)$ de N^n, il existe un élément b de N tel que $g(a_1,\ldots,a_n,b) = 0$, alors la fonction $\mu g : N^n \to N$ appartient à la classe, où μg est définie par $\mu g(a_1,\ldots,a_n) = \mu b(g(a_1,\ldots,a_n,b)=0)$, $\forall (a_1,\ldots,a_n) \in N^n$

nous obtenons la définition de la classe des fonctions récursives.

DEFINITION 1.5 Si nous reprenons la définition 1.3 de la classe des descriptions des fonctions primitives récursives où nous remplaçons l'adjectif "primitive récursive" par "récursive" et si nous remplaçons v) par

v) si $\overline{g} : N^{n+1} \to N$ est une description associée à la fonction récursive $g : N^{n+1} \to N$ et si la fonction $\mu g : N^n \to N$ est définie, alors $\mu\overline{g} : N^n \to N$ est une description associée à la fonction $\mu g : N^n \to N$ et $\lambda(\mu\overline{g}) = \lambda(\overline{g}) + 1$

vi) Ce sont les seules descriptions de fonctions récursives.

nous obtenons la définition de la classe des descriptions des fonctions récursives.

Il nous reste un troisième cas à présenter, celui des fonctions partiellement récursives.

<u>DEFINITION 1.6</u> La classe des fonctions partiellement récursives est la plus petite classe de fonctions partielles de N^n dans N^m, $n \in N^+$, $m \in N^+$,

a) contenant la fonction constante zéro $\kappa : N \to N$, la fonction successeur $\delta : N \to N$ et les fonctions projection $\pi_{m,i} : N^m \to N$, $\forall m \in N$, $\forall i \in [1,m]$.

b) fermée sous le "produit par N":
si les fonctions partielles $f : N^n \to N^m$ et $g : N^n \to N$ appartiennent à la classe, la fonction partielle $<f,g> : N^n \to N^{m+1}$ appartient à la classe, où $<f,g>$ est définie par $<f,g>(a_1,\ldots,a_n) = (f(a_1,\ldots,a_n),g(a_1,\ldots,a_n))$, pour tout élément $(a_1,\ldots,a_n) \in N^n$ pour lequel f et g sont définis, $(f(a_1,\ldots,a_n),g(a_1,\ldots,a_n))$ étant un élément de N^{m+1}.

c) fermée sous la composition:
si les fonctions partielles $f : N^n \to N^m$ et $g : N^m \to N^s$ appartiennent à la classe, la fonction partielle $g \circ f : N^n \to N^s$ appartient à la classe où $g \circ f$ est définie par $g \circ f(a_1,\ldots,a_n) = g(f(a_1,\ldots,a_n))$ pour tout élément $(a_1,\ldots,a_n)$ de N^n pour lequel f est définie et tel que g est définie pour l'élément $f(a_1,\ldots,a_n)$ de N^m.

d) fermée sous la récurrence:
si les fonctions partielles $g : N^n \to N$ et $h : N^{n+2} \to N$ appartiennent à la classe, la fonction partielle $r(g,h) : N^{n+1} \to N$ appartient à la classe où $r(g,h)$ est définie de la façon suivante:
$r(g,h)(a_1,\ldots,a_n,0) = g(a_1,\ldots,a_n)$ si g est définie pour $(a_1,\ldots,a_n)$,
$r(g,h)(a_1,\ldots,a_n,m+1) = h(a_1,\ldots,a_n,m,r(g,h)(a_1,\ldots,a_n,m))$ si

$r(g,h)$ est définie pour $(a_1,\ldots,a_n,m)$ et si h est définie pour $(a_1,\ldots,a_n,m,r(g,h)(a_1,\ldots,a_n,m))$, $\forall (a_1,\ldots,a_n,m) \in N^{n+1}$.

e) fermée sous le minimum:

si la fonction partielle $g : N^{n+1} \to N$ appartient à la classe, la fonction partielle $\mu g : N^n \to N$, définie comme suit, y appartient aussi:

$\mu g(a_1,\ldots,a_n) = \mu b(g(a_1,\ldots,a_n,b)=0)$ s'il existe un élément b de N tel que g est définie pour $(a_1,\ldots,a_n,i)$, $\forall i \leq b$ et $g(a_1,\ldots,a_n,b) = 0$.

REMARQUE

a) En modifiant légèrement le cas des fonctions récursives, nous pouvons définir la classe des descriptions des fonctions partiellement récursives et associer à chaque description une fonction partiellement récursive et une longueur.

b) Comme dans le cas des fonctions primitives récursives, nos définitions de fonctions récursives et de fonctions partiellement récursives s'éloignent des définitions classiques par l'acceptation de fonctions (totales ou partielles) dont l'ensemble d'arrivée est N^m, $m \in N^+$, mais ces fonctions ne sont que le produit de fonctions récursives ou partiellement récursives au sens classique.

1.2 CATÉGORIES CARTÉSIENNES ET CATÉGORIES CARTÉSIENNES FERMÉES

Comme la définition de la classe des fonctions primitives récursives fait appel au produit cartésien d'ensembles et au produit de fonctions, nous

nous intéresserons aux catégories "fermées sous le produit", c'est-à-dire aux catégories cartésiennes.

Reprenons ici la définition de catégorie cartésienne présentée par Lambek [15]. Cette définition n'est pas l'approche classique mais c'est celle qui se rapproche le plus du langage des systèmes déductifs que nous utiliserons par la suite.

<u>DEFINITION 1.7</u> Une catégorie cartésienne est un 7-tuplet $(\mathcal{A}, T, \wedge, O, p, q, < >)$ où

i) $\mathcal{A}$ est une catégorie,

ii) $T \in |\mathcal{A}|$,

iii) $\wedge : |\mathcal{A}| \times |\mathcal{A}| \to |\mathcal{A}|$ est une fonction,

iv) O, p et q sont des familles de morphismes $\{O(A) : A \to T \mid \forall A \in |\mathcal{A}|\}$, $\{p(A,B) : A \wedge B \to A \mid \forall A,B \in |\mathcal{A}|\}$ et $\{q(A,B) : A \wedge B \to B \mid \forall A,B \in |\mathcal{A}|\}$,

v) $\mathcal{A}$ est fermée sous un schéma $< >$:

$$< > \quad \frac{\alpha : C \to A \quad \beta : C \to B}{<\alpha,\beta> : C \to A \wedge B}$$

tel que les équations suivantes soient satisfaites:

vi) $f = O(A)$, $\forall\ f : A \to T \in \mathcal{A}$, $\forall\ A \in |\mathcal{A}|$

vii) $q(A,B)<\alpha,\beta> = \beta$ et $p(A,B)<\alpha,\beta> = \alpha$, $\forall\ \alpha : C \to A \in |\mathcal{A}|$, $\forall\ \beta : C \to B \in |\mathcal{A}|$, $\forall\ A,B,C \in |\mathcal{A}|$,

viii) $<p(A,B)f, q(A,B)f> = f$, $\forall f : C \to A \wedge B \in |\mathcal{A}|$, $\forall\ A,B,C \in |\mathcal{A}|$.

La notion de catégorie cartésienne fermée étant à la base de notre définition de catégorie pré-récursive, nous en donnons une définition analogue à la définition précédente.

DEFINITION 1.8 Une catégorie cartésienne fermée est un 10-tuplet $(A, T, \wedge, \supset, 0, p, q, e, < >, *)$ où

i) $(A, T, \wedge, 0, p, q, < >)$ est une catégorie cartésienne,

ii) $\supset : |A| \times |A| \to |A|$ est une fonction,

iii) e est une famille de morphismes $\{e(A,B) : A \wedge (A \supset B) \to B \mid \forall A,B \in |A|\}$

iv) A est fermé sous le schéma $*$ défini comme suit:

$$* \quad \frac{h : C \wedge A \to B}{h^* : C \to A \supset B}$$

tel que les équations suivantes soient satisfaites

v) $e(A,B)<q(C,A),h^*p(C,A)> = h, \ \forall h : C \wedge A \to B, \ \forall A,B,C \in |A|$

vi) $(e(A,B)<q(C,A),fp(C,A)>)^* = f, \ \forall f : C \to A \supset B \in A, \ \forall A,B,C \in |A|$.

1.3 *AXIOME DE PEANO-LAWVERE*

Généralisant la notion d'induction mathématique, l'axiome de Peano-Lawvere interviendra dans nos recherches:

N est un ensemble ayant un élément 0 et muni d'une fonction $\sigma : N \to N$ tel que, pour tout ensemble X ayant un élément désigné a et muni d'une fonction $f : X \to X$, il existe une et une seule fonction $g : N \to X$ satisfaisant les formules

$$g(0) = a, \quad g(\sigma n) = f(g(n)), \quad \forall n \in N.$$

CHAPITRE 2

CATÉGORIES PRÉ-RÉCURSIVES

Dans le cadre de l'étude des liens entre la théorie des catégories et les concepts logiques, nous pouvons nous demander sous quelle forme catégorique il est possible de retrouver les fonctions primitives récursives. Peut-être vaut-il mieux considérer le cas plus général des fonctions récursives, la classe de ces fonctions admettant plusieurs notions équivalentes, entre autres, la classe des fonctions λ-définissables de Kleene et de Church. Poser le problème en ces termes nous fournit un cadre de travail, celui des catégories cartésiennes fermées car les travaux de Lambek [15] démontrent, comme nous l'avons déjà souligné, que cette notion catégorique est liée de façon très étroite à la logique combinatoire, théorie équivalente au système de λ-conversion de Church.

D'autre part, si nous regardons les travaux de Péter [21] sur la réduction de la définition de la classe des fonctions primitives récursives, nous constatons que le schéma de récurrence de Gödel (1) $\dfrac{N^{n} \to N \qquad N^{n+2} \to N}{N^{n+1} \to N}$ se réduit au schéma (2) $\dfrac{T \to N \qquad N \to N}{N \to N}$ à la condition d'ajouter comme "fonctions initiales" les fonctions addition $+ : N^2 \to N$, multiplication $\times : N^2 \to N$, antécédent $A : N \to N$ et soustraction non-négative $\dot{-} : N^2 \to N$. Or ces quatre fonctions se définissent à l'aide du schéma de Peano-Lawvere (3) $\dfrac{T \to A \qquad A \to A}{N \to A}$ où A prend respectivement les valeurs de $N \supset N$, $N \supset N^2$, N^2 et $N \supset N$. Si A peut prendre la valeur N, le schéma (2) se révèle un cas particulier du schéma (3).

Ainsi, toute catégorie cartésienne fermée "fermée sous l'axiome de Peano-Lawvere" semble contenir toutes les fonctions primitives récursives et, par conséquent, sert de point de départ à notre étude.

2.1 *CATÉGORIES PRÉ-RÉCURSIVES*

<u>DEFINITION 2.1</u> Une catégorie $\mathcal{A}$ est dite pré-récursive si

a) elle est cartésienne fermée,

b) elle contient un objet, notons-le N, muni
d'un morphisme $\theta : T \to N$, où T est l'objet terminal de $\mathcal{A}$,
d'un morphisme $\sigma : N \to N$,
d'une famille de morphismes $\{ R(A) : N \to (A\supset A)\supset(A\supset A) \mid A \in |\mathcal{A}| \}$
tels que

i) $R(A)\theta \;= [[q(T\wedge(A\supset A),A)]^*]^*$

ii) $R(A)\sigma \;= [[\xi(A)]^*]^* R(A)$

où $\xi(A) : (((A\supset A)\supset(A\supset A))\wedge(A\supset A))\wedge A \to A$

$= e(A,A)<e(A,A)<p(A,B\wedge C),e(B,B)q(A,B\wedge C)>p(A\wedge(B\wedge C),B),$
$q(A\wedge(B\wedge C),B)><<q(C\wedge B,A),<q(C,B),p(C,B)>p(C\wedge B,A)>,$
$q(C,B)p(C\wedge B,A)>$

où $B = A\supset A$ et $C = B\supset B$

<u>REMARQUES</u>

a) Dans une catégorie pré-récursive, les morphismes "récurrence" R(A) permettent de construire pour tout morphisme $a : T \to A$ et pour tout morphisme $g : A \to A$ un morphisme $h : N \to A$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "h"] & N \arrow[d, "h"] \\ T \arrow[ur, "\theta"] \arrow[dr, "a"'] & & \\ & A \arrow[r, "g"] & A \end{tikzcd}$$

où $h : N \to A$

$$= e(A,A)<q(N\wedge(A\supset A),A),e(A\supset A,A\supset A)<q(N,A\supset A),R(A)p(N,A\supset A)>p(N\wedge(A\supset A),A)>$$
$$<<I(N),[gq(N,A)]^{*}>,a0(N)>$$

b) $\xi(A)$ satisfait l'égalité suivante, cette égalité étant écrite avec la notation usuelle,

$$\forall\ \alpha : T \to (A\supset A)\supset(A\supset A)\ ,\ \forall\ f : T \to A\supset A\ ,\ \forall\ a : T \to A \in |A|$$
$$\xi_A<<\alpha,f>,a>> = e_{A,A}<e_{A,A}<a,e_{A\supset A,A\supset A}<f,\alpha>>,f>$$

c) Dans cette définition, nous n'avons retenu aucune idée d'unicité.

d) Dans une catégorie pré-récursive, nous noterons $N\wedge N$ par N^2, $N^n\wedge N$ par N^{n+1}, $\forall n\in N^+$. Quelquefois, N^0 remplacera T.

EXEMPLE Ens est une catégorie pré-récursive.

DEFINITION 2.2 Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, deux catégories pré-récursives. Un foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est dit pré-récursif si

a) il préserve la structure de catégorie cartésienne fermée,

b) $\mathcal{F}(N_{\mathcal{A}}) = N_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{F}(\theta_{\mathcal{A}}) = \theta_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{F}(\sigma_{\mathcal{A}}) = \sigma_{\mathcal{B}}$ et $\mathcal{F}(R_{\mathcal{A}}(A)) = R_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}(A))$, $\forall A\in|\mathcal{A}|$.

2.2 *REPRÉSENTATIONS DES FONCTIONS PRIMITIVES RÉCURSIVES*

DEFINITION 2.3 Soit $\mathcal{A}$, une catégorie pré-récursive. Une fonction $f : N^k \to N^n$ est représentable dans $\mathcal{A}$ s'il existe un morphisme $\tilde{f} : N^k \to N^n$ vérifiant l'équation suivante:

$$\tilde{f}<\ldots<<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\sigma^{a_3}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_k}\theta>$$

$$= <\ldots<<\sigma^{\pi_{n,1}f(a_1,\ldots,a_k)}\theta,\sigma^{\pi_{n,2}f(a_1,\ldots,a_k)}\theta>,\ldots>,\sigma^{\pi_{n,n}f(a_1,\ldots,a_k)}\theta>$$

$\forall (a_1,\ldots,a_k)\in N^k$.

Les catégories pré-récursives ont la propriété d'avoir des représentations de chaque fonction primitive récursive.

<u>THEOREME 2.4</u> Soit A, une catégorie pré-récursive. Toute fonction primitive récursive est représentable dans A.

<u>PREUVE</u> par induction sur la longueur des descriptions associées aux fonctions primitives récursives.

A) Montrons que toutes les fonctions primitives récursives admettant une description de longueur 1 sont représentables dans A.

Ces fonctions sont i) la fonction constante zéro

ii) la fonction successeur

iii) les fonctions projection

i) la fonction constante zéro κ est représentée par le morphisme $\theta O(N) : N \to N$ car $\kappa(n) = 0$, $\forall n\in N$ et

$\theta O(N)\sigma^n\theta = \theta O(T) = \theta I(T) = \theta = \sigma^{\kappa(n)}\theta$, $\forall n\in N$.

ii) la fonction successeur s est représentée par le morphisme σ car

$\sigma\sigma^n\theta = \sigma^{n+1}\theta = \sigma^{s(n)}\theta$, $\forall n\in N$.

iii) les fonctions projection $\pi_{m,i} : N^m \to N$ sont représentables, $\forall m\in N^+$, $\forall i\in[1,m]$.

Preuve par induction sur la valeur de m où le domaine de la projection est $\mathbb{N}^m$.

a) Si m = 1, il y a une seule projection $\pi_{1,1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$\pi_{1,1}$ est représentée par I(N) : N → N car

$I(N)\ \sigma^n\theta = \sigma^n\theta = \sigma^{\pi_{1,1}(n)}\theta,\ \forall n\in\mathbb{N}$

b) Supposons que toutes les projections dont le domaine est $\mathbb{N}^m$ pour $m\in[1,n]$ sont représentables.

Soit $\tilde{\pi}_{m,i}$, la représentation de $\pi_{m,i}$, pour $m\in[1,n]$; montrons que $\pi_{n+1,i}$ est représentée par $\tilde{\pi}_{n,i}p(N^n,N)$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\pi_{n+1,n+1}$ est représentée par $q(N^n,N)$.

Pour $i\in[1,n]$, $\pi_{n+1,i}(a_1,\ldots,a_{n+1}) = a_i = \pi_{n,i}(a_1,\ldots,a_n)$

$\forall a_1,a_2,\ldots,a_{n+1}\in\mathbb{N}$

Donc, $\tilde{\pi}_{n,i}p(N^n,N)<\ldots<<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>,\sigma^{a_{n+1}}\theta>$

$= \tilde{\pi}_{n,i}<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>$

$= \sigma^{\pi_{n,i}(a_1,\ldots,a_n)}\theta$, par hypothèse

$= \sigma^{a_i}\theta$

$= \sigma^{\pi_{n+1,i}(a_1,\ldots,a_n,a_{n+1})}\theta,\ \forall (a_1,\ldots,a_{n+1})\in\mathbb{N}^{n+1}$

Alors $\tilde{\pi}_{n,i}p(N^n,N)$ représente $\pi_{n+1,i}$, pour $i\in[1,n]$.

Pour i = n+1, $\pi_{n+1,n+1}(a_1,\ldots,a_{n+1}) = a_{n+1}$

$$\text{Donc, } q(N^n,N)<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_{n+1}}\theta>$$

$$= \sigma^{a_{n+1}}\theta$$

$$= \sigma^{\pi_{n+1,n+1}(a_1,\ldots,a_{n+1})}\theta \ , \ \forall (a_1,\ldots,a_{n+1})\in N^{n+1}$$

Alors $q(N^n,N)$ représente $\pi_{n+1,n+1}$.

D'où toute projection de domaine N^{n+1} est représentable dans A.

Par induction, toute projection est donc représentable dans A.

Nous avons ainsi démontré que toutes les fonctions primitives récursives admettant une description de longueur 1 sont représentables dans A.

B) Supposons que toute fonction primitive récursive ayant une description de longueur inférieure ou égale à n est représentable dans A.

Soit f ayant une description de longueur n+1,

alors f admet une description de la forme $<\bar{g},\bar{h}>$ et f est égal à $<g,h>$ où g (respectivement h) est la fonction décrite par $\bar{g}$ (respectivement $\bar{h}$)

ou f admet une description de la forme $\bar{g}\bar{h}$ et f est égal à gh où g (respectivement h) est la fonction décrite par $\bar{g}$ (respectivement $\bar{h}$)

ou f admet une description de la forme $r(\bar{g},\bar{h})$ et f est égal à récurrence (g,h) où g (respectivement h) est la fonction décrite par $\bar{g}$ (respectivement $\bar{h}$).

i) f admet une description de la forme $<\bar{g},\bar{h}>$ et f = $<g,h>$ où g (respectivement h) est la fonction décrite par $\bar{g}$ (respectivement $\bar{h}$)

$$g : N^n \to N^m, \quad h : N^n \to N$$

$\lambda(\langle\overline{g},\overline{h}\rangle) = n+1$ et $\lambda(\langle\overline{g},\overline{h}\rangle) = \lambda(\overline{g})+\lambda(\overline{h})+1$

$\Rightarrow \lambda(\overline{g}) \leq n$ et $\lambda(\overline{h}) \leq n$.

Par hypothèse, g et h sont représentables dans A par $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ car tous deux admettent une description de longueur inférieure ou égale à n.

Alors f est représentée par $\langle\tilde{g},\tilde{h}\rangle : N^{n+1} \to N$ car

$$\langle\tilde{g},\tilde{h}\rangle\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\sigma^{a_3}\theta\rangle,\ldots\rangle,\sigma^{a_n}\theta\rangle$$

$$= \langle\tilde{g}\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots\rangle,\sigma^{a_n}\theta\rangle,\ \tilde{h}\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots\rangle,\sigma^{a_n}\theta\rangle\rangle$$

$$= \langle\ldots\langle\sigma^{\pi_{m,1}g(a_1,\ldots,a_n)}\theta,\sigma^{\pi_{m,2}g(a_1,\ldots,a_n)}\theta\rangle,\ldots\rangle,\sigma^{\pi_{m,m}g(a_1,\ldots,a_n)}\theta\rangle,$$

$$\sigma^{\pi_{1,1}h(a_1,\ldots,a_n)}\theta\rangle$$

$$= \langle\ldots\langle\sigma^{\pi_{m+1,1}\langle g,h\rangle(a_1,\ldots,a_n)}\theta,\sigma^{\pi_{m+1,2}\langle g,h\rangle(a_1,\ldots,a_n)}\theta\rangle,\ldots\rangle,$$

$$\sigma^{\pi_{m+1,m}\langle g,h\rangle(a_1,\ldots,a_n)}\theta\rangle,\sigma^{\pi_{m+1,m+1}\langle g,h\rangle(a_1,\ldots,a_n)}\theta\rangle,$$

$\forall (a_1,\ldots,a_n) \in N^n$.

ii) f admet une description de la forme $\overline{g}\,\overline{h}$ et f est égal à gh où g (respectivement h) est la fonction décrite par $\overline{g}$ (respectivement $\overline{h}$)

$$h : N^n \to N^m\ ,\ g : N^m \to N^s$$

$\lambda(\overline{g}\,\overline{h}) = \lambda(\overline{g}) + \lambda(\overline{h}) = n+1$

Comme la longueur d'une description est toujours plus grande ou égale à 1, alors $\lambda(\overline{g}) \leq n$ et $\lambda(\overline{h}) \leq n$.

Par hypothèse, g et h sont représentables dans A par $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ car tous deux admettent une description de longueur inférieure ou égale à n.

Alors f est représentée par $\tilde{g}\tilde{h} : N^n \to N^s$ car

$$(\tilde{g}\tilde{h})<\dots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\dots>,\sigma^{a_n}\theta>$$

$$= \tilde{g}(\tilde{h}<\dots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\dots>,\sigma^{a_n}\theta>$$

$$= \tilde{g}<\dots<\sigma^{\pi_{m,1}h(a_1,\dots,a_n)}\theta,\sigma^{\pi_{m,2}h(a_1,\dots,a_n)}\theta>,\dots>,\sigma^{\pi_{m,m}h(a_1,\dots,a_n)}\theta>$$

$$= <\dots<\sigma^{\pi_{s,1}g(\pi_{m,1}h(a_1,\dots,a_n),\dots,\pi_{m,m}h(a_1,\dots,a_n))}\theta,\dots>\dots>$$

$$= <.<\sigma^{\pi_{s,1}(gh)(a_1,..,a_n)}\theta,\sigma^{\pi_{s,2}(gh)(a_1,..,a_n)}\theta>,.>,\sigma^{\pi_{s,s}(gh)(a_1,..,a_n)}\theta>$$

$\forall(a_1,\dots,a_n)\in N^n$.

iii) f admet une description $r(\overline{g},\overline{h})$ et f est égal à récurrence (g,h) où g (respectivement h) est la fonction décrite par $\overline{g}$ (respectivement $\overline{h}$).

$$g : N^n \to N \;,\; h : N^{n+2} \to N$$

$\lambda(r(\overline{g},\overline{h})) = \lambda(\overline{g}) + \lambda(\overline{h}) + 1 \leq n+1$

Donc, $\lambda(\overline{g}) \leq n$ et $\lambda(\overline{h}) \leq n$.

Par hypothèse, g et h sont représentables dans A par $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ car tous deux admettent une description de longueur inférieure ou égale à n.

I - Construisons le morphisme τ susceptible de représenter f.

a) Soit $\ell : N^n \wedge N^2 \to N^{n+2}$, le morphisme canonique

$$<<p(N^n,N^2),p(N,N)q(N^n,N^2)>,q(N,N)q(N^n,N^2)>$$

b) Soit $j: (N^n \supset N^2)\wedge N^n \to N^2$

$$= <\sigma p(N,N)e(N^n,N^2),\ \tilde{h}\ell<p(N^n,N^n\supset N^2),\ e(N^n,N^2)>>$$

$$<q(N^n\supset N^2,N^n),\ p(N^n\supset N^2,N^n)>$$

c) Soit $\omega: N \to N^n \supset N^2$

$$= e(N^n \supset N^2, N^n \supset N^2) < [<\theta O(N), \tilde{g}> q(T,N^n)]^* O(N),$$
$$e((N^n \supset N^2) \supset (N^n \supset N^2), (N^n \supset N^2) \supset (N^n \supset N^2)) < [j^* q(T, N^n \supset N^2)]^* O(N),$$
$$R(N^n \supset N^2) >>$$

d) Soit $\tau: N^{n+1} \to N$

$$= q(N,N) e(N^n, N^2) < p(N^n,N), \omega q(N^n,N) >$$

e) Soit $\nu: N^{n+1} \to N$

$$p(N,N) e(N^n, N^2) < p(N^n,N), \omega q(N^n,N) >$$

Nous montrerons que ν représente $\pi_{n+1,n+1}$

τ représente f

II- Montrons que $\omega\theta = [<\theta O(N^n), \tilde{g}> q(T,N^n)]^*$

$$\omega\theta = e(N^n \supset N^2, N^n \supset N^2) < [<\theta O(N^n), \tilde{g}> q(T,N^n)]^* O(N),$$
$$e((N^n \supset N^2) \supset (N^n \supset N^2), (N^n \supset N^2) \supset (N^n \supset N^2)) < [j^* q(T, N^n \supset N^2)]^* O(N),$$
$$R(N^n \supset N^2) >> \theta$$

$$= e(N^n \supset N^2, N^n \supset N^2) < [<\theta O(N^n), \tilde{g}> q(T,N^n)]^* O(N)\theta,$$
$$e((N^n \supset N^2) \supset (N^n \supset N^2), (N^n \supset N^2) \supset (N^n \supset N^2)) < [j^* q(T, N^n \supset N^2)]^* O(N)\theta,$$
$$R(N^n \supset N^2)\theta >>$$

Par la condition b)i) de la définition d'une catégorie pré-récursive,

$$= e(N^n \supset N^2, N^n \supset N^2) < [<\theta O(N^n), \tilde{g}> q(T,N^n)]^* O(T),$$
$$e((N^n \supset N^2) \supset (N^n \supset N^2), (N^n \supset N^2) \supset (N^n \supset N^2)) < [j^* q(T, N^n \supset N^2)]^* O(T),$$
$$[[q(T \wedge ((N^n \supset N^2) \supset (N^n \supset N^2)), N^n \supset N^2)]^*]^* >>$$

Comme $O(T) = I(T)$

$$= e(N^n \supset N^2, N^n \supset N^2) < [<\theta O(N), \tilde{g}> q(T, N^n)]^*,$$
$$e((N^n \supset N^2) \supset (N^n \supset N^2), (N^n \supset N^2) \supset (N^n \supset N^2)) < [j^* q(T, N^n \supset N^2)]^*,$$
$$[[q(T \wedge ((N^n \supset N^2) \supset (N^n \supset N^2)), N^n \supset N^2)]^*]^* >>$$

$$= e(N^n \supset N^2, N^n \supset N^2) < [<\theta O(N), \tilde{g}> q(T, N^n)]^*,$$
$$e((N^n \supset N^2) \supset (N^n \supset N^2), (N^n \supset N^2) \supset (N^n \supset N^2)) < q(T, (N^n \supset N^2) \supset (N^n \supset N^2)),$$
$$[[q(T \wedge ((N^n \supset N^2) \supset (N^n \supset N^2)), N^n \supset N^2)]^*]^* p(T, (N^n \supset N^2) \supset (N^n \supset N^2))>$$
$$<I(T), [j^* q(T, N^n \supset N^2)]^* >>$$

Comme A est une catégorie cartésienne fermée,

$$= e(N^n \supset N^2, N^n \supset N^2) < [<\theta O(N), \tilde{g}> q(T, N^n)]^*,$$
$$[q(T \wedge ((N^n \supset N^2) \supset (N^n \supset N^2)), N^n \supset N^2)]^* < I(T); [j^* q(T, N^n \supset N^2)]^* >>$$

$$= e(N^n \supset N^2, N^n \supset N^2) < q(T \wedge ((N^n \supset N^2) \supset (N^n \supset N^2)), N^n \supset N^2),$$
$$[q(T \wedge ((N^n \supset N^2) \supset (N^n \supset N^2)), N^n \supset N^2)]^* p(T \wedge ((N^n \supset N^2) \supset (N^n \supset N^2)), N^n \supset N^2)>$$
$$<<I(T), [j^* q(T, N^n \supset N^2)]^*>, [<\theta O(N), \tilde{g}> q(T, N^n)]^*>$$

$$= q(T \wedge ((N^n \supset N^2) \supset (N^n \supset N^2)), N^n \supset N^2) << I(T), [j^* q(T, N^n \supset N^2)]^*>,$$
$$[<\theta O(N), \tilde{g}> q(T, N^n)]^*>$$

$$= [<\theta O(N), \tilde{g}> q(T, N^n)]^*$$

III - Vérifions que $\omega\sigma = e(N^n \supset N^2, N^n \supset N^2) < \omega, [j^* q(T, N^n \supset N^2)]^* O(N)>$

$$\omega\sigma = e(N^n \supset N^2, N^n \supset N^2) < [<\theta O(N), \tilde{g}> q(T, N^n)]^* O(N),$$
$$e((N^n \supset N^2) \supset (N^n \supset N^2), (N^n \supset N^2) \supset (N^n \supset N^2)) < [j^* q(T, N^n \supset N^2)]^* O(N),$$
$$R(N^n \supset N^2) >> \sigma$$

$$= e(N^n \supset N^2, N^n \supset N^2) < [<\theta O(N), \tilde{g}> q(T, N^n)]^* O(N)\sigma,$$
$$e((N^n \supset N^2) \supset (N^n \supset N^2), (N^n \supset N^2) \supset (N^n \supset N^2)) < [j^* q(T, N^n \supset N^2)]^* O(N)\sigma,$$
$$R(N^n \supset N^2)\sigma >>$$

Par la condition b)ii) de la définition d'une catégorie pré-récursive,

$$= e(N^n \supset N^2, N^n \supset N^2) < [<\theta O(N), \tilde{g}> q(T, N^n)]^* O(N),$$
$$e((N^n \supset N^2) \supset (N^n \supset N^2), (N^n \supset N^2) \supset (N^n \supset N^2)) < [j^* q(T, N^n \supset N^2)]^* O(N),$$
$$[[\xi(N^n \supset N^2)]^*]^* R(N^n \supset N^2) >>$$

Comme A est une catégorie cartésienne fermée,

$$= e(N^n \supset N^2, N^n \supset N^2) < [<\theta O(N), \tilde{g}> q(T, N^n)]^* O(N), [\xi(N^n \supset N^2)]^* < R(N^n \supset N^2),$$
$$[j^* q(T, N^n \supset N^2)]^* O(N) >>$$

$$= \xi(N^n \supset N^2) << R(N^n \supset N^2), [j^* q(T, N^n \supset N^2)]^* O(N) >, [<\theta O(N), \tilde{g}> q(T, N^n)]^* O(N) >$$

$$= e(E,E) < e(E,E) < p(E, D \wedge F), e(D,D) q(E, D \wedge F) > p(E \wedge (D \wedge F), D),$$
$$q(E \wedge (D \wedge F), D) >< < q(F \wedge D, E), < q(F,D), p(F,D) > p(F \wedge D, E) >,$$
$$q(F,D) p(F \wedge D, E) > << R(E), [j^* q(T,E)]^* O(N) >, [<\theta O(N), \tilde{g}> q(T, N^n)]^* O(N) >$$

où $E = N^n \supset N^2$, $D = E \supset E$ et $F = D \supset D$

$$= e(E,E) < e(E,E) < p(E, D \wedge F), e(D,D) q(E, D \wedge F) > p(E \wedge (D \wedge F), D), q(E \wedge (D \wedge F), D) >$$
$$<< [<\theta O(N), \tilde{g}> q(T, N^n)]^* O(N), < [j^* q(T,E)]^* O(N), R(E) >>,$$
$$[j^* q(T,E)]^* O(N) >$$

$$= e(E,E) < e(E,E) < [<\theta O(N), \tilde{g}> q(T, N^n)]^* O(N), e(D,D) < [j^* q(T,E)]^* O(N),$$
$$R(E) >>, [j^* q(T,E)]^* O(N) >$$

$$= e(E,E) < \omega, [j^* q(T,E)]^* O(N) >$$

$$= e(N^n \supset N^2, N^n \supset N^2) < \omega, [j^* q(T, N^n \supset N^2)]^* O(N) >$$

IV - ν représente $\pi_{n+1,n+1} : N^{n+1} \to N$

<u>PREUVE</u> par induction sur la dernière composante de N^{n+1}

a) Soit $(a_1, \ldots, a_n, 0) \in N^{n+1}$, montrons que

$$\nu<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>,\sigma^0\theta> = \sigma^{\pi_{n+1,n+1}(a_1,\ldots,a_n,0)}\theta.$$

$$\nu<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>,\sigma^0\theta>$$

$$= p(N,N)e(N^n,N^2)<p(N^n,N),\omega q(N^n,N)><\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\theta>$$

$$= p(N,N)e(N^n,N^2)<p(N^n,N)<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\theta>,$$
$$\omega q(N^n,N)<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\theta>>$$

$$= p(N,N)e(N^n,N^2)<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>,\omega\theta>$$

$$= p(N,N)e(N^n,N^2)<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>,[<\theta O(N^n),\tilde{g}>q(T,N^n)]^*>$$

$$= p(N,N)e(N^n,N^2)<q(T,N^n),[<\theta O(N^n),\tilde{g}>q(T,N^n)]^*p(T,N^n)><I(T),$$
$$<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>>$$

$$= p(N,N)<\theta O(N^n),\tilde{g}>q(T,N^n)<I(T),<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>>$$

$$= \theta O(N^n)<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>$$

$$= \theta = \sigma^0\theta$$

$$= \sigma^{\pi_{n+1,n+1}(a_1,\ldots,a_n,0)}\theta.$$

b) Supposons le résultat vrai pour $(a_1,\ldots,a_n,y)$, c'est-à-dire

$$\nu<.\,.<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,.\,.>,\sigma^{a_n}\theta>,\sigma^y> = \sigma^{\pi_{n+1,n+1}(a_1,\ldots,a_n,y)}\theta = \sigma^y\theta,$$

montrons qu'il est vrai pour $(a_1,\ldots,a_n,y+1)$.

$$\nu<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>,\sigma^{y+1}\theta>$$

$$= p(N,N)e(N^n,N^2)<p(N^n,N),\omega q(N^n,N)><.<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,.>,\sigma^{a_n}\theta>,\sigma^{y+1}\theta>$$

$$= p(N,N)e(N^{n},N^{2})\langle\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots\rangle,\sigma^{a_n}\theta\rangle,\omega\sigma^{y+1}\rangle$$

$$= p(N,N)e(N^{n},N^{2})\langle p(N^{n},N),\omega\sigma q(N^{n},N)\rangle\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots\rangle,\sigma^{a_n}\theta\rangle,\sigma^{y}\theta\rangle$$

$$= p(N,N)e(N^{n},N^{2})\langle p(N^{n},N),e(N^{n}\supset N^{2},N^{n}\supset N^{2})\langle\omega,[j^{*}q(T,N^{n}\supset N^{2})]^{*}0(N)\rangle$$

$$q(N^{n},N)\rangle\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots\rangle,\sigma^{a_n}\theta\rangle,\sigma^{y}\theta\rangle$$

$$= p(N,N)e(N^{n},N^{2})\langle p(N^{n},N),e(N^{n}\supset N^{2},N^{n}\supset N^{2})\langle q(T,N^{n}\supset N^{2}),[j^{*}q(T,N^{n}\supset N^{2})]^{*}$$

$$p(T,N^{n}\supset N^{2})\rangle\langle 0(N),\omega\rangle q(N^{n},N)\rangle\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots,\sigma^{a_n}\theta\rangle,\sigma^{y}\theta\rangle$$

$$= p(N,N)e(N^{n},N^{2})\langle p(N^{n},N),j^{*}q(T,N^{n}\supset N^{2})\langle 0(N),\omega\rangle q(N^{n},N)\rangle$$

$$\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots,\sigma^{a_n}\theta\rangle,\sigma^{y}\theta\rangle$$

$$= p(N,N)e(N^{n},N^{2})\langle q(N^{n}\supset N^{2},N^{n}),j^{*}p(N^{n}\supset N^{2},N^{n})\rangle\langle q(T,N^{n}\supset N^{2})\langle 0(N),\omega\rangle$$

$$q(N^{n},N),p(N^{n},N)\rangle\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots,\sigma^{a_n}\theta\rangle,\sigma^{y}\theta\rangle$$

$$= p(N,N)j\langle\omega q(N^{n},N),p(N^{n},N)\rangle\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots,\sigma^{y}\theta\rangle$$

$$= p(N,N)\langle\sigma p(N,N)e(N^{n},N^{2}),\tilde{h}\ell\langle p(N^{n},N^{n}\supset N^{2}),e(N^{n},N^{2})\rangle\rangle$$

$$\langle q(N^{n}\supset N^{2},N^{n}),p(N^{n}\supset N^{2},N^{n})\rangle\langle\omega q(N^{n},N),p(N^{n},N)\rangle$$

$$\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots,\sigma^{y}\theta\rangle$$

$$= \sigma p(N,N)e(N^{n},N^{2})\langle q(N^{n}\supset N^{2},N^{n}),p(N^{n}\supset N^{2},N^{n})\rangle\langle\omega q(N^{n},N),p(N^{n},N)\rangle$$

$$\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots,\sigma^{a_n}\theta\rangle,\sigma^{y}\theta\rangle$$

$$= \sigma p(N,N)e(N^n,N^2)<p(N^n,N),\omega q(N^n,N)><\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots,\sigma^y\theta>$$

$$= \sigma\nu<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots,\sigma^y\theta>$$

$$= \sigma\sigma^y\theta \text{ par hypothèse.}$$

$$= \sigma^{y+1}\theta = \sigma^{\pi_{n+1\ n+1}(a_1,\ldots,a_n,y+1)}\theta.$$

Par induction, $\nu<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots,\sigma^{a_n}\theta>,\sigma^m\theta>$
$= \sigma^{\pi_{n+1,n+1}(a_1,\ldots a_n,m)}\theta,\quad \forall(a_1,\ldots,a_n,m)\in N^{n+1}$

et ν représente ainsi $\pi_{n+1,n+1}$.

V - τ représente f.

<u>PREUVE</u> par induction sur la dernière composante de N^{n+1}

a) Soit $(a_1,\ldots,a_n,0)\in N^{n+1}$ montrons que

$$\tau<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>,\sigma^0\theta> = \sigma^{f(a_1,\ldots,a_n,0)}\theta.$$

$$\tau<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots,\sigma^{a_n}\theta>,\sigma^0\theta>$$

$$= \tau<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots,\sigma^{a_n}\theta>,\theta>$$

$$= q(N,N)e(N^n,N^2)<p(N^n,N),\omega q(N^n,N)><\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots,\sigma^{a_n}\theta>,\theta>$$

$$= q(N,N)e(N^n,N^2)<p(N^n,N)<<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots,\sigma^{a_n}\theta>,\theta>,\omega q(N^n,N)$$
$$<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots,\sigma^{a_n}\theta>,\theta>>$$

$$= q(N,N)e(N^n,N^2)<<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots,\sigma^{a_n}\theta>,\omega\theta>$$

$$q(N,N)e(N^n,N^2)<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots,\sigma^{a_n}\theta>,[<\theta 0(N),\tilde{g}>q(T,N^n)]^*>$$

$$= q(N,N)e(N^n,N^2) < q(T,N^n), [<\theta O(N^n),\tilde{g}>q(T,N^n)]^* p(T,N^n)>$$

$$<I(T),<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>>$$

$$= q(N,N)<\theta O(N^n),\tilde{g}>q(T,N^n)<I(T),<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots,\sigma^{a_n}\theta>>$$

$$= \tilde{g}<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots,\sigma^{a_n}\theta>$$

$$= \sigma^{g(a_1,\ldots,a_n)}\theta \text{ car } \tilde{g} \text{ représente } g$$

$$= \sigma^{f(a_1,\ldots,a_n,0)}\theta.$$

b) Supposons le résultat vrai pour $(a_1,\ldots,a_n,y)$, c'est-à-dire

$$\tau<<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots,\sigma^{a_n}\theta>,\sigma^y\theta> = \sigma^{f(a_1,\ldots,a_n,y)}\theta$$

montrons qu'il est vrai pour $(a_1,\ldots,a_n,y+1)$.

$$\tau<<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots,\sigma^{a_n}\theta>,\sigma^{y+1}\theta> =$$

$$= q(N,N)e(N^n,N^2)<p(N^n,N),\omega q(N^n,N)><\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots,\sigma^{a_n}\theta>,\sigma^{y+1}\theta>$$

$$= q(N,N)e(N^n,N^2)<<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>,\omega\sigma^{y+1}\theta>$$

$$= q(N,N)e(N^n,N^2)<p(N^n,N),\omega\sigma q(N^n,N)><\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots,\sigma^{a_n}\theta>,\sigma^y\theta>$$

$$= q(N,N)e(N^n,N^2)<p(N^n,N),e(N^n\supset N^2,N^n\supset N^2)<\omega,$$

$$[j^*q(T,N^n\supset N^2)]^*O(N)>q(N^n,N)><\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots,\sigma^y\theta>$$

$$= q(N,N)e(N^n,N^2)<p(N^n,N),j^*q(T,N^n\supset N^2)<O(N),\omega>q(N^n,N)>$$

$$<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots,\sigma^y\theta>.$$

$$= q(N,N)\,j\langle \omega q(N^n,N),p(N^n,N)\rangle\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots,\sigma^y\theta\rangle$$

$$= q(N,N)\langle\sigma p(N,N)e(N^n,N^2),\tilde{h}\ell\langle p(N^n,N^n\supset N^2),e(N^n,N^2)\rangle\rangle$$

$$\langle q(N^n\supset N^2,N^n),p(N^n\supset N^2,N^n)\rangle\langle\omega q(N^n,N),p(N^n,N)\rangle$$

$$\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots,\sigma^y\theta\rangle$$

$$= \tilde{h}\ell\langle p(N^n,N^n\supset N^2),e(N^n,N^2)\rangle\langle p(N^n,N),\omega q(N^n,N)\rangle\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots,\sigma^y\theta\rangle$$

$$= \tilde{h}\langle\langle p(N^n,N^2),p(N,N)q(N^n,N^2)\rangle,q(N,N)q(N^n,N^2)\rangle\langle p(N^n,N^n\supset N^2),e(N^n,N^2)\rangle$$

$$\langle p(N^n,N),\omega q(N^n,N)\rangle\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots,\sigma^y\theta\rangle$$

$$= \tilde{h}\langle\langle p(N^n,N^n\supset N^2),p(N,N)e(N^n,N^2)\rangle,q(N,N)e(N^n,N^2)\rangle\langle p(N^n,N),\omega q(N^n,N)\rangle$$

$$\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots,\sigma^y\theta\rangle$$

$$= \tilde{h}\langle\langle p(N^n,N^n\supset N^2),p(N,N)e(N^n,N^2)\rangle\langle p(N^n,N),\omega q(N^n,N)\rangle$$

$$\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots,\sigma^y\theta\rangle,q(N,N)e(N^n,N^2)\langle p(N^n,N),\omega q(N^n,N)\rangle$$

$$\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots,\sigma^y\theta\rangle\rangle$$

$$= \tilde{h}\langle\langle p(N^n,N),p(N,N)e(N^n,N^2)\langle p(N^n,N),\omega q(N^n,N)\rangle\rangle\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\ldots,\sigma^y\theta\rangle,$$

$$\tau\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots,\sigma^{a_n}\theta\rangle,\sigma^y\theta\rangle\rangle$$

$$= \tilde{h}\langle\langle p(N^n,N),p(N,N)e(N^n,N^2)\langle p(N^n,N),\omega q(N^n,N)\rangle\rangle\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\ldots,\sigma^y\theta\rangle,$$

$\sigma^{f(a_1,\ldots,a_n,y)}\theta\rangle$ par hypothèse.

$$= \tilde{h}\langle\langle p(N^n,N),\nu\rangle\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\ldots,\sigma^y\theta\rangle\rangle,\sigma^{f(a_1,\ldots,a_n,y)}\theta\rangle$$

$$= \tilde{h}\langle\langle p(N^n,N)\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots,\sigma^y\theta\rangle,\nu\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots,\sigma^y\theta\rangle\rangle,$$
$$\sigma^{f(a_1,\ldots,a_n,y)}\theta\rangle$$

$$= \tilde{h}\langle\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots,\sigma^y\theta\rangle,\sigma^{f(a_1,\ldots,a_n,y)}\theta\rangle$$

car ν représente $\pi_{n+1,n+1}$ et $\pi_{n+1,n+1}(a_1,\ldots,a_n,y) = y$

$$= \sigma^{h(a_1,\ldots,a_n,y,f(a_1,\ldots,a_n,y))}\theta$$ car $\tilde{h}$ représente h.

$$= \sigma^{f(a_1,\ldots,a_n,y+1)}\theta.$$

Par induction, $\tau\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots,\sigma^{a_n}\theta\rangle,\sigma^m\theta\rangle = \sigma^{f(a_1,\ldots,a_n,m)}\theta$,

$\forall(a_1,\ldots,a_n,m)\in N^{n+1}$

et τ représente f = récurrence (g,h).

Donc, par i), ii) et iii), nous avons démontré que toute fonction primitive récursive ayant une description de longueur n+1 est représentable dans A.

Ainsi, par induction, toute fonction primitive récursive admettant une description est représentable dans A. Et comme toute fonction primitive récursive admet au moins une description, alors toute fonction primitive récursive est représentable dans A.

REMARQUE

a) Un autre morphisme représentant récurrence (g,h) pourrait être construit à partir des idées exposées dans le théorème de Freyd [5] affirmant que tout topos muni d'un objet de nombres naturels est fermé sous une certaine généralisation de l'induction mathématique de Peano.

b) La preuve du théorème précédent nous montre que toute description associée à une fonction primitive récursive $f : N^n \to N^m$ détermine un morphisme $\tilde{f}$ de A qui représente f. Or f admet plusieurs descriptions. En effet, si $\overline{f}$ est une description associée à f et si $\overline{I(N^n)}$ est une description associée à $I(N^n) : N^n \to N^n$, $\overline{f}\ \overline{I(N^n)}$ est une autre description associée à f. Ainsi, toute fonction primitive récursive f est représentée par plusieurs morphismes de A, ces morphismes pouvant être égaux ou différents.

2.3 CATÉGORIES PRÉ-RÉCURSIVES LIBRES

Nous venons de voir que toute fonction primitive récursive est représentable dans chaque catégorie pré-récursive. Que pouvons-nous dire des fonctions représentables dans une catégorie pré-récursive A? Nous pouvons répondre dans le cas où $A = \overline{\phi}$, $\overline{\phi}$ étant la catégorie pré-récursive libre engendrée par la catégorie vide ϕ. Dans ce cas, toutes les fonctions représentables dans $\overline{\phi}$ sont récursives, ce que nous verrons dans la section 2.4. Pour le moment, nous allons vérifier l'existence de $\overline{\phi}$.

THEOREME 2.5 Soit A, une petite catégorie. Il existe une catégorie $\overline{A}$, pré-récursive libre engendrée par A.

<u>PREUVE</u> Nous nous inspirons des techniques développées par Lambek [15].

I - Soit $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, le système déductif suivant:

A) les symboles primitifs sont

$T \quad N \quad \wedge \quad \supset \quad * \quad (\quad) \quad , \quad O \quad I \quad \theta \quad \sigma \quad p \quad q \quad e \quad R \quad < \quad >$

B) les termes de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ sont définis de façon inductive

1) tout objet de $\mathcal{A}$ est un terme de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$

2) T et N sont des termes de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ $\qquad$ (T et N $\notin$ $|\mathcal{A}|$)

3) Si A et B sont des termes, $(A)\supset(B)$ et $(A)\wedge(B)$ sont des termes.

4) Ce sont les seuls termes.

C) les preuves de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ sont définies de façon inductive

1) les expressions suivantes sont des preuves

i) AIA

ii) AOT

iii) $T\theta N$

iv) $N\sigma N$

v) $(A)\wedge(B)pA$

vi) $(A)\wedge(B)qB$

vii) $(A)\wedge((A)\supset(B))eB$

viii) $NR((A)\supset(A))\supset((A)\supset(A))$

où A et B sont des termes de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

2) les morphismes $f : X \to Y$ de $\mathcal{A}$ sont des preuves XfY.

3) si $A\rho B$ et $B\varphi C$ sont des preuves, $A\rho B\varphi C$ est une preuve, où A,B,C sont des termes de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

4) si $A\rho B$ et $A\varphi C$ sont des preuves, $A<A\rho B,A\varphi C>(B)\wedge(C)$ est une preuve où A,B,C sont des termes de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

5) Si $(A)\wedge(B)\rho C$ est une preuve, $A((A)\wedge(B)\rho C)^{*}(B)\supset(C)$ est une preuve où A,B,C sont des termes de $\mathcal{D}(A)$.

6) Ce sont les seules preuves.

D) Si g est une preuve, g est de la forme AfB où A et B sont des termes de $\mathcal{D}(A)$.

Alors A est dit le domaine de g et B est dit le codomaine de g.

<u>REMARQUE</u> Dans l'écriture des termes, nous omettrons des parenthèses lorsque ceci n'entraîne aucune ambiguité.

II - A) Construisons la catégorie $\overline{A}$

a) les objets de $\overline{A}$ sont les termes de $\mathcal{D}(A)$

b) les morphismes de $\overline{A}$ sont les classes d'équivalence des preuves de $\mathcal{D}(A)$, par rapport à la relation d'équivalence $\equiv$ décrite ci-après, c'est-à-dire un morphisme $[P] : A \to B$ de domaine A et de codomaine B est la classe d'équivalence $[P]$ de la preuve P dont le domaine est A et le codomaine est B.

c) la loi de composition est définie comme suit:

si $[\rho] : A \to B$, la preuve ρ a la forme AfB

si $[\varphi] : B \to C$, la preuve φ a la forme BgC

alors $[\varphi][\rho] : A \to C$ est $[AfBgC]$

Cette loi de composition est associative, car si $[\omega] : C \to D$, la preuve ω est de la forme ChD et

$[\omega]([\varphi][\rho]) = [\omega][AfBgC] = [AfBgChD] = [BgChD][\rho] = ([\omega][\varphi])[\rho]$

$\Rightarrow [R]([\varphi][P]) = ([R][\varphi])[P]$

d) les morphismes $[AIA] : A \to A$ sont les morphismes-identité sous cette loi de composition.

$[\rho][AIA] = [AIAfB] = [AfB] = [\rho]$ (condition 7 de $\equiv$)

$[BIB][\rho] = [AfBIB] = [AfB] = [\rho]$ (condition 8 de $\equiv$)

Ainsi, $\bar{A}$ est une catégorie.

e) la relation d'équivalence $\equiv$ entre les preuves de même domaine et de même codomaine est la plus petite relation satisfaisant les conditions suivantes:

1. $\alpha \equiv \alpha$
2. si $\alpha \equiv \beta$, alors $\beta \equiv \alpha$
3. si $\alpha \equiv \beta$ et $\beta \equiv \gamma$, alors $\alpha \equiv \gamma$
4. si $(A)\wedge(B)\alpha C \equiv (A)\wedge(B)\gamma C$,
   alors $A((A)\wedge(B)\alpha C)^*(B)\supset(C) \equiv A((A)\wedge(B)\gamma C)^*(B)\supset(C)$
5. si $A\alpha B \equiv A\beta B$ et $A\gamma C \equiv A\delta C$,
   alors $A\langle A\alpha B, A\gamma C\rangle(B)\wedge(C) \equiv A\langle A\beta B, A\delta C\rangle(B)\wedge(C)$
6. si $A\alpha B \equiv A\gamma B$ et $B\beta C \equiv B\delta C$, alors $A\alpha B\beta C \equiv A\gamma B\delta C$
7. $B\alpha AIA \equiv B\alpha A$
8. $AIA\beta B \equiv A\beta B$
9. $XIX \equiv X1_X X$, pour tout $1_X : X \to X \in A$
10. $Xg\circ fZ \equiv XfYgZ$ pour tous les morphismes $f : X \to Y$ et
    $g : Y \to Z$ de A, où $\circ$ est la composition dans A.
11. $A\alpha T \equiv AOT$
12. $A\langle A\alpha B, A\beta C\rangle(B)\wedge(C)pB \equiv A\alpha B$
13. $A\langle A\alpha B, A\beta C\rangle(B)\wedge(C)qC \equiv A\beta C$
14. $C\langle C\alpha(A)\wedge(B)pA, C\alpha(A)\wedge(B)qB\rangle(A)\wedge(B) \equiv C\alpha(A)\wedge(B)$
15. $(A)\wedge(B)\langle(A)\wedge(B)qB, (A)\wedge(B)pA((A)\wedge(B)\alpha C)^*(B)\supset(C)\rangle(B)\wedge((B)\supset(C))eC$
    $\equiv (A)\wedge(B)\alpha C$
16. $A((A)\wedge(B)\langle(A)\wedge(B)qB, (A)\wedge(B)pA\alpha(B)\supset(C)\rangle(B)\wedge((B)\supset(C))eC)^*(B)\supset(C)$
    $\equiv A\alpha(B)\supset(C)$

17. $T\theta NR((A)\supset(A))\supset((A)\supset(A)) \equiv T((T)\wedge((A)\supset(A))$

$(((T)\wedge((A)\supset(A)))\wedge(A)qA)^{*}(A)\supset(A))^{*}((A)\supset(A))\supset((A)\supset(A))$

18. $N\sigma NRB \equiv NRB(C(D<D<DqA,DpC<CqE,CpB>F>G,DpCqE>H$

$<HpG<GpA,GqFeE>JeA,HqE>JeA)^{*}E)^{*}B$

où $E = (A)\supset(A)$, $B = (E)\supset(E)$, $C = (B)\wedge(E)$, $D = (C)\wedge(A)$,

$F = (E)\wedge(B)$, $G = (A)\wedge(F)$; $H = (G)\wedge(E)$, $J = (A)\wedge(E)$.

Ici, A,B,C sont des termes de $\mathcal{D}(A)$. Dans chacune des conditions, α, β, γ et δ représentent des suites finies de symboles primitifs et de symboles de A telles que l'expression de chaque côté du symbole $\equiv$ soit une preuve.

B) $\overline{A}$ est une catégorie cartésienne fermée.

La condition 3 de la définition des termes de $\mathcal{D}(A)$ nous assure l'existence du produit et de l'exponentiation de tout couple d'objets de $\overline{A}$, T étant l'objet terminal. Les morphismes déterminant la structure cartésienne fermée sont les classes d'équivalence des preuves données par les conditions 1 ii), 1 v), 1 vi), 1 vii) de la définition des preuves et les conditions 11, 12, 13, 14, 15, 16 de la définition de la relation d'équivalence $\equiv$, nous donnent les égalités désirées.

C) $\overline{A}$ est une catégorie pré-récursive.

En effet, N est l'objet naturel, $[T\theta N] : T \to N$, $[N\sigma N] : N \to N$, $[NR((A)\supset(A))\supset((A)\supset(A))] : N \to ((A)\supset(A))\supset((A)\supset(A))$ sont les morphismes caractéristiques et les conditions 17 et 18 de la définition de la relation d'équivalence $\equiv$, nous assurent les égalités requises.

III. Vérifions que $\overline{A}$ est la catégorie pré-récursive libre engendrée par A.

A) Le foncteur $\eta(A) : A \to \overline{A}$ est défini en envoyant tout objet de A sur lui-même dans $\overline{\mathcal{A}}$ et tout morphisme de $\mathcal{A}$ sur sa classe d'équivalence dans $\overline{\mathcal{A}}$.

$$\eta(\mathcal{A}) : \mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$$

$$f : X \to Y \quad \to [XfY] : X \to Y$$

$$: \eta(\mathcal{A})(X) \to \eta(\mathcal{A})(Y)$$

$\eta(\mathcal{A})$, ainsi défini, est un foncteur.

i) Soit $X \in |\mathcal{A}|$, $\eta(\mathcal{A})(1_X) \overset{\text{déf}}{=} [X1_X X] \overset{9}{=} [XIX] : X \to X$, identité de X dans $\overline{\mathcal{A}}$.

ii) Soient $f : A \to B$, $g : B \to C \in \mathcal{A}$,

$$\eta(\mathcal{A})(g \circ f) = [Ag \circ fC] \overset{10}{=} [AfBgC]$$

$$= [BgC][AfB] \text{ par définition de composition dans } \overline{\mathcal{A}}$$

$$= \eta(\mathcal{A})g \circ \eta(\mathcal{A})f$$

B) $(\overline{\mathcal{A}}, \eta(\mathcal{A}))$ satisfait la propriété universelle suivante:

Pour tout foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ où $\mathcal{X}$ est une catégorie pré-récursive, il existe un et un seul foncteur pré-récursif $\tilde{F}$ de $\overline{\mathcal{A}}$ dans $\mathcal{X}$ tel que $\tilde{F}\eta(\mathcal{A}) = F$

$$\begin{tikzcd} & \overline{\mathcal{A}} \arrow[d, dashed, "\exists ! \tilde{F}"] \\ \mathcal{A} \arrow[ur, "\eta(\mathcal{A})"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{X} \end{tikzcd} \qquad \tilde{F}\eta(\mathcal{A}) = F$$

Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$, $\mathcal{X}$ étant une catégorie pré-récursive.

a) Définissons $\overline{F} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{X}$, une fonction sur les termes et sur les preuves de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Définissons $\overline{F}$ sur les termes de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ de façon inductive:

pour tout objet A de $\mathcal{A}$, $\overline{F}(A) = F(A)$

pour les objets T et N, $\overline{F}(T) = T_{\mathcal{X}}$, $\overline{F}(N) = N_{\mathcal{X}}$

pour tout objet de la forme $(A)\supset(B)$, $\overline{F}((A)\supset(B)) = \overline{F}(A)\supset\overline{F}(B)$

pour tout objet de la forme $(A)\wedge(B)$, $\overline{F}((A)\wedge(B)) = \overline{F}(A)\wedge\overline{F}(B)$

Définissons $\overline{F}$ sur les preuves de $\mathcal{D}(A)$ de façon inductive.

1. i) $\overline{F}(AIA) = I_X(\overline{F}(A)) : \overline{F}(A) \to \overline{F}(A)$

ii) $\overline{F}(AOT) = O_X(\overline{F}(A)) : \overline{F}(A) \to T_X$, T_X étant $\overline{F}(T)$

iii) $\overline{F}(T\theta N) = \theta_X : T_X \to N_X$

iv) $\overline{F}(N\sigma N) = \sigma_X : N_X \to N_X$

v) $\overline{F}(A\wedge BpA) = p_X(\overline{F}(A),\overline{F}(B)) : \overline{F}(A)\wedge\overline{F}(B) \to \overline{F}(A)$

vi) $\overline{F}(A\wedge BqB) = q_X(\overline{F}(A),\overline{F}(B)) : \overline{F}(A)\wedge\overline{F}(B) \to \overline{F}(B)$

vii) $\overline{F}(A\wedge(A\supset B)eB) = e_X(\overline{F}(A),\overline{F}(B)) : \overline{F}(A)\wedge(\overline{F}(A)\supset\overline{F}(B)) \to \overline{F}(B)$

viii) $\overline{F}(NR(A\supset A)\supset(A\supset A)) = R_X(\overline{F}(A)) : N \to (\overline{F}(A)\supset\overline{F}(A))\supset(\overline{F}(A)\supset\overline{F}(A))$

(Nous avons omis ici quelques parenthèses pour faciliter la compréhension.)

2. Pour tout morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{A}$.

$$\overline{F}(XfY) = F(f) : F(X) \to F(Y)$$
$$: \overline{F}(X) \to \overline{F}(Y)$$

3. $\overline{F}(A\rho B\varphi C) = \overline{F}(B\varphi C)\overline{F}(A\rho B)$ si $A\rho B$ et $B\varphi C$ sont des preuves

4. $\overline{F}(A<A\rho B,A\varphi C>(B)\wedge(C)) = <\overline{F}(A\rho B),\overline{F}(A\varphi C)> : \overline{F}(A) \to \overline{F}(B)\wedge\overline{F}(C)$ si $A\rho B$ et $A\varphi C$ sont des preuves.

5. $\overline{F}(A((A)\wedge(B)\rho C)^*(B)\supset(C)) = (\overline{F}((A)\wedge(B)\ \rho C))^* : \overline{F}(A) \to \overline{F}(B)\supset\overline{F}(C)$ si $(A)\wedge(B)\rho C$ est une preuve.

b) Montrons que deux preuves équivalentes par rapport à $\equiv$ ont la même image sous $\overline{F}$ c'est-à-dire $A\rho B \equiv A\varphi B \Rightarrow \overline{F}(A\rho B) = \overline{F}(A\varphi B)$ ce qui nous permettra de définir $\widetilde{F} : \overline{\mathcal{A}} \to \mathcal{X}$ par $\widetilde{F}(A) = \overline{F}(A)$ et $\widetilde{F}([A\rho B]) = \overline{F}(A\rho B)$.

Définissons une relation binaire # sur les preuves de $\mathcal{D}(A)$:

Les preuves $A\rho B$ et $A\varphi B$ de $\mathcal{D}(A)$ sont en relation # si leurs images sous $\overline{F}$ sont identiques. $A\rho B \# A\varphi B \Leftrightarrow \overline{F}(A\rho B) = \overline{F}(A\varphi B)$

Vérifions que # satisfait les conditions 1, ..., 18 de la définition de la relation d'équivalence $\equiv$.

1. $F(\alpha) = F(\alpha) \Rightarrow \alpha \# \alpha$

2. $\alpha \# \beta \Rightarrow F(\alpha) = F(\beta) \Rightarrow F(\beta) = F(\alpha) \Rightarrow \beta \# \alpha$

3. $\alpha \# \beta$ et $\beta \# \gamma \Rightarrow F(\alpha) = F(\beta)$ et $F(\beta) = F(\gamma) \Rightarrow F(\alpha) = F(\gamma) \Rightarrow \alpha \# \gamma$

4. si $A \wedge B\alpha C \# A \wedge B\gamma C$,

   alors $\overline{F}((A)\wedge(B)\alpha C) = \overline{F}((A)\wedge(B)\gamma C) : \overline{F}(A)\wedge\overline{F}(B)\to\overline{F}(C)$

   $\Rightarrow (\overline{F}((A)\wedge(B)\alpha C))^* = (\overline{F}((A)\wedge(B)\gamma C))^* : \overline{F}(A)\to\overline{F}(B)\supset\overline{F}(C)$

   $\Rightarrow \overline{F}(A((A)\wedge(B)\alpha C)^*(B)\supset(C)) = \overline{F}(A((A)\wedge(B)\gamma C)^*(B)\supset(C))$

   $\Rightarrow A((A)\wedge(B)\alpha C)^*(B)\supset(C) \# A((A)\wedge(B)\gamma C)^*(B)\supset(C)$

5. si $A\alpha B \# A\beta B$ et $A\gamma C \# A\delta C$,

   alors $\overline{F}(A\alpha B) = \overline{F}(A\beta B) : \overline{F}(A)\to\overline{F}(B)$ et $\overline{F}(A\gamma C) = \overline{F}(A\delta C) : \overline{F}(A)\to\overline{F}(C)$

   $\Rightarrow \langle\overline{F}(A\alpha B),\overline{F}(A\gamma C)\rangle = \langle\overline{F}(A\beta B),\overline{F}(A\delta C)\rangle : \overline{F}(A)\to\overline{F}(B)\wedge\overline{F}(C)$

   $\Rightarrow \overline{F}(A\langle A\alpha B,A\gamma C\rangle(B)\wedge(C) = \overline{F}(A\langle A\gamma B,A\delta C\rangle(B)\wedge(C)$

   $\Rightarrow A\langle A\alpha B,A\gamma C\rangle(B)\wedge(C) \# A\langle A\gamma B,A\delta C\rangle(B)\wedge(C)$

6. si $A\alpha B \# A\gamma B$ et $B\beta C \# B\delta C$

   alors $\overline{F}(A\alpha B) = \overline{F}(A\gamma B)$ et $\overline{F}(B\beta C) = \overline{F}(B\delta C)$

   $\Rightarrow \overline{F}(A\alpha B\beta C) = \overline{F}(B\beta C)\overline{F}(A\alpha B) = \overline{F}(B\delta C)\overline{F}(A\gamma B) = \overline{F}(A\gamma B\delta C)$

   $\Rightarrow A\alpha B\beta C \# A\gamma B\delta C$

7. $\overline{F}(B\alpha AIA) = \overline{F}(AIA)\overline{F}(B\alpha A) = I_X(\overline{F}(A))\overline{F}(B\alpha A) = \overline{F}(B\alpha A)$

   $\Rightarrow B\alpha AIA \# B\alpha A$

8. $\overline{F}(AIA\beta B) = \overline{F}(A\beta B)\overline{F}(AIA) = \overline{F}(A\beta B)I_X(\overline{F}(A)) = \overline{F}(A\beta B)$

   $\Rightarrow AIA\beta B \# A\beta B$

9. $\overline{F}(X1_X X) = F(1_X)$ ou $F(I_A(X))$

   $= I_X(F(X))$ car F est un foncteur

   $= I_X(\overline{F}(X)) = \overline{F}(XIX)$

   $\Rightarrow X1_X X \# XIX \Rightarrow XIX \# X1_X X$, $\forall X \in |\mathcal{A}|$

10. Pour $f : X\to Y$ et $g : Y\to Z$ dans $\mathcal{A}$,

    $\overline{F}(XfYgZ) = \overline{F}(YgZ)\overline{F}(XfY) = F(g)F(f) = F(g\circ f)$, F étant un foncteur

    $= \overline{F}(Xg\circ fZ)$

$\Rightarrow XfYgZ \# Xg\circ fZ \Rightarrow Xg\bullet fZ \# XfYgZ$

De la même façon, les conditions 11, 12, 13, 14, 15, 16 se vérifient car X est une catégorie cartésienne fermée. Les conditions 17 et 18 découlent du fait que X est pré-récursive.

Donc, # satisfait les conditions 1 à 18.

Comme $\equiv$ est la plus petite relation satisfaisant ces conditions,

$$\alpha \equiv \beta \Rightarrow \alpha \# \beta \Rightarrow \overline{F}(\alpha) = \overline{F}(\beta)$$

c'est-à-dire $\overline{F}$ envoie tous les éléments d'une classe d'équivalence par rapport à $\equiv$ sur le même élément.

c) Nous pouvons ainsi définir $\widetilde{F} : \overline{A} \to X$ de la façon suivante:

$$\widetilde{F}(A) = \overline{F}(A) \ , \forall A \in |\overline{A}|$$

$$\widetilde{F}([A\alpha B]) = \overline{F}(A\alpha B), \text{ pour tout morphisme } [A\alpha B] \text{ de } \overline{A}$$

$\widetilde{F}$ est un foncteur

$$\widetilde{F}([AIA]) = \overline{F}(AIA) = I_X(\overline{F}(A)) = I_X(\widetilde{F}(A))$$

$$\widetilde{F}([B\varphi C][A\rho B]) = \widetilde{F}([A\rho B\varphi C]) = \overline{F}(A\rho B\varphi C) = \overline{F}(B\varphi C)\overline{F}(A\rho B)$$

$$= \widetilde{F}([B\varphi C])\widetilde{F}([A\rho B])$$

$\widetilde{F}$ préserve la structure cartésienne fermée

$$\widetilde{F}(T) = T_X$$

$$\widetilde{F}((A)\wedge(B)) = \overline{F}((A)\wedge(B)) = \overline{F}(A)\wedge\overline{F}(B) = \widetilde{F}(A)\wedge\widetilde{F}(B)$$

$$\widetilde{F}((A)\supset(B)) = \overline{F}((A)\supset(B)) = \overline{F}(A)\supset\overline{F}(B) = \widetilde{F}(A)\supset\widetilde{F}(B) \ , \forall A,B \in |\overline{A}|$$

Pour la préservation des morphismes impliqués, les conditions a 1 ii), a 1 v), a 1 vi), a 1 vii), a 4 et a 5 nous l'assurent.

$\widetilde{F}$ préserve la structure pré-récursive

$$\widetilde{F}(N) = \overline{F}(N) = N_X$$

$$\widetilde{F}([T\theta N]) = \overline{F}(T\theta N) = \theta_X$$

$$\widetilde{F}([N\sigma N]) = \overline{F}(N\sigma N) = \sigma_X$$

$$\widetilde{F}([NR(A\supset A)\supset(A\supset A)]) = \overline{F}(NR(A\supset A)\supset(A\supset A)) = R_X(\overline{F}(A)) = R_X(\widetilde{F}(A)) \ , \forall A \in |A|$$

Donc, $\widetilde{F} : \overline{A} \to X$ est un foncteur pré-récursif.

d) $\widetilde{F}\eta(A) = F$

Par la définition de $\widetilde{F}$, $\widetilde{F}\eta(A) = F$ sur les objets et sur les morphismes de A car

$\widetilde{F}\eta(A)(X) = \widetilde{F}(X) = \overline{F}(X) = F(X)$, $\forall X \in |A|$

$\widetilde{F}\eta(A)(f) = \widetilde{F}([XfY]) = \overline{F}(XfY) = F(f)$, pour tout morphisme $f : X \to Y$ de A.

D'où, il existe un foncteur pré-récursif $\widetilde{F} : \overline{A} \to X$ tel que $\widetilde{F}\eta(A) = F$.

e) Montrons que $\widetilde{F} : \overline{A} \to X$ est unique.

Soit un foncteur pré-récursif $G : \overline{A} \to X$ satisfaisant l'égalité

$G\eta(A) = F$

Alors, $\forall X \in |A|$, $F(X) = G\eta(A)(X) = G(X)$ et comme G est pré-récursif,

$G(T) = T_X$, $G(N) = N_X$, $G(A \supset B) = G(A) \supset G(B)$, $G(A \wedge B) = G(A) \wedge G(B)$, $\forall A, B \in |\overline{A}|$

Par conséquent, G satisfait les conditions de définition de $\overline{F}$ sur les objets de $\overline{A}$, donc les conditions de définition de $\widetilde{F}$ sur les objets de $\widetilde{A}$. Alors $G = \widetilde{F}$ sur les objets de $\overline{A}$.

Pour les morphismes de $\overline{A}$, montrons que G satisfait, par rapport aux morphismes, c'est-à-dire par rapport aux classes d'équivalence de $\equiv$, aux mêmes conditions que $\overline{F}$ sur les preuves.

1. Comme G est pré-récursif, G satisfait la condition 1 de la définition de $\overline{F}$ sur les preuves de $\mathcal{D}(A)$ où nous remplaçons dans les expressions situées à gauche des équations $\overline{F}$ par G et $A\rho B$ par $[A\rho B]$. Du côté droit des équations, $\overline{F}$ n'apparaît qu'avec des objets et alors $G = \overline{F}$.

2. Par hypothèse, $G\eta(A) = F$ et alors pour tout morphisme $f : X \to Y$ de A, $\overline{F}(XfY) = F(f) = G\eta(A)(f) = G[XfY]$

   D'où G vérifie la condition 2.

3. Pour la troisième condition, $G([A\rho B\varphi C]) = G([B\varphi C][A\rho B]) = G([B\varphi C])G([A\rho B])$ car G est un foncteur.

4. 5. Pour les conditions 4 et 5,

$G([A\langle A\rho B, A\varphi C\rangle B\wedge C]) = G(\langle [A\rho B],[A\varphi C]\rangle) = \langle G([A\rho B]), G([A\varphi C])\rangle$

et $G([A(A\wedge B\rho C)^{*}B\supset C]) = G([A\wedge B\rho C]^{*}) = (G([A\wedge B\rho C]))^{*}$ car G, comme foncteur récursif, préserve la structure cartésienne fermée.

Vérifiant par rapport aux classes d'équivalence les conditions de définition de $\overline{F}$ sur les preuves, G envoie une classe d'équivalence de $\equiv$ sur l'image par $\overline{F}$ d'un représentant de cette classe. Donc, $G([A\rho B]) = \overline{F}(A\rho B) = \widetilde{F}([A\rho B])$ pour tout morphisme de $\overline{A}$ et alors $G = \widetilde{F}$ sur les morphismes de $\overline{A}$.

D'où $G = \widetilde{F}$, c'est-à-dire $\widetilde{F}$ est l'unique foncteur pré-récursif de $\overline{A}$ dans X tel que $\widetilde{F}\eta(A) = F$.

$\overline{A}$ est donc la catégorie pré-récursive libre engendrée par A.

2.4 RÉCURSIVITÉ DES FONCTIONS REPRÉSENTABLES DANS $\overline{\Phi}$

THEOREME 2.6 Si $\overline{\Phi}$ est la catégorie pré-récursive libre engendrée par la catégorie vide ϕ, toute fonction $N^k \to N$ représentable dans $\overline{\Phi}$ est récursive.

PREUVE

I - Enumérons une suite de fonctions et de relations primitives récursives que nous utiliserons dans la suite du raisonnement. Cette suite est tirée partiellement des listes de Gödel [6] et de Kleene [9], [10].

1) $x/y \equiv (\exists z)[z \leq x \wedge x = y \cdot z]$

2) $Prem(x) \equiv x > 1 \wedge (\nexists z)[z \leq x \wedge z \neq x \wedge x/z]$

3) $0 Pr x = 0$

$(n+1) Pr x = \mu y[y \leq x \wedge Prem(y) \wedge x/y \wedge y > n Pr x]$;

4) $0! = 0$

$(n+1)! = (n+1)\cdot n!$

5) $Pr(0) = 0$

$Pr(n+1) = \mu y[y \leq 1+(Pr(n))! \wedge Prem(y) \wedge y > Pr(n)]$

6) $nEx = \mu y[y \leq x \wedge x/(Pr(n))^{y} \wedge x\not/(Pr(n))^{y+1}]$

7) $\ell(x) = \mu y[y \leq x \wedge yPrx > 0 \wedge (y+1)Prx = 0]$

8) $x*y = \mu z[z \leq [Pr(\ell(x)+\ell(y))]^{x+y} \wedge (\forall n)[n \leq \ell(x) \Rightarrow$

$nEz = nEx] \wedge (\forall n)[0 < n \leq \ell(y) \Rightarrow (n+\ell(x))Ez = nEy]]$

9) $R(x) = 2^{x}$

10) $F(x) = R(13)*x*R(17)$

11) $x \dot{-} y = \mu z[z \leq x \wedge x = y+z]$

12) $[\frac{x}{y}] = \mu z[z \leq x \wedge (z+1)\cdot y > x]$

13) $Res(x,y) = x \dot{-} \left([\frac{x}{y}]\cdot y\right)$

14) $Y(0) = R(31)$

$Y(n+1) = Y(n)*R(5)*R(37)$

15) $Z(n) = R(3)*Y(n)*R(5)$

16) $Nom(x) \equiv (\exists n)[n \leq x \wedge x = Z(n)]$

17) $Z^{-1}(x) = \mu n[n \leq x \wedge x = Z(n)]$

18) $G(s,t) = R(61)*s*R(19)*t*R(67)$

19) $H(s,t) = R(3)*G(s,t)*F(\ell(s)Es)*R(7)*F(\ell(t)Et)$

20) $Zéro(x) \equiv x = Z(0)$.

II- Définissons une énumération de Gödel pour les symboles primitifs de $\mathcal{D}(\phi)$, c'est-à-dire assignons un nombre premier à chaque symbole primitif de $\mathcal{D}(\phi)$.

T	N	∧	⊃	(	)	,	0	I	θ	σ	p	q	e	*	R	<	>
3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67

Les relations suivantes sont primitives récursives.

$TP(x) \equiv x = 3 \wedge x = 5$

(x *est un terme primitif*)

$ST(x) \equiv (\forall n)[0<n\leq \ell(x) \Rightarrow \{(\exists v)[v\leq x \wedge TP(v) \wedge nEx = R(v)] \vee (\exists p)(\exists q)[0<p<n \wedge$

$0<q<n \wedge \{nEx = F(pEx)*R(7)*F(qEx) \vee nEx = F(pEx)*R(11)*F(qEx)\}]\}]$

(x *est une suite de termes*)

(*Par exemple,* ST(x) *si*

$$x = 2^{2^3}3^{2^5}5^{F(2^3)*R(7)*F(2^5)}$$

$$= 2^{2^3}3^{2^5}5^{R(13)*2^3*R(17)*R(7)*R(13)*2^5*R(17)}$$

$$= 2^{2^3}3^{2^5}5^{2^{13}3^3 5^{17}7^7 11^{13}13^5 17^{17}}$$

$$\simeq 2^{2^T}3^{2^N}5^{2^{(}3^T5^{)}7^{\wedge}11^{(}13^N17^{)}}$$ *, en décodant)*

$T(x) \equiv (\exists n)\ n \leq Pr([\ell(x)]^2)^{x\cdot(\ell(x))^2} \wedge ST(n) \wedge x = \ell(n)En]$

(x *est un terme*)

(*Par exemple,* T(x) *si* $x = 2^{13}3^3 5^{17}7^7 11^{13}13^5 17^{17}$

$$\simeq 2^{(}3^T5^{)}7^{\wedge}11^{(}13^N17^{)})$$

$MP(x) \equiv [x = R(3)*R(31)*R(5)] \vee [x = R(5)*R(37)*R(5)] \vee$

(*conditions* liii *et* liv *de la définition de preuves de* $\mathcal{D}(\phi)$)

$(\exists v)[0<v\leq x \wedge T(v) \wedge \{[x = v*R(23)*R(3)] \vee [x = v*R(29)*v]\}] \vee$

(*conditions* lii *et* li)

$(\exists v)(\exists w)[0<v\leq x \wedge 0<w\leq x \wedge T(v) \wedge T(w) \wedge \{[x = F(v)*R(7)*F(w)*$

$R(41)*v] \vee [x = F(v)*R(7)*F(w)*R(43)*w] \vee [x = F(v)*R(7)*F(F(v)*$

$R(11)*F(w))*R(47)*w]\}] \vee$

(*conditions* lv, lvi *et* lvii)

$$(\exists v)[0<v\leq x \wedge T(v) \wedge x = R(5)*R(59)*F(F(v)*R(11)*F(v))*R(11) *F(F(v)*R(11)*F(v))]$$

(*condition* 1viii)

(x *est un morphisme primitif*)

$$SM(x) \equiv (\forall n)[0<n\leq \ell(x) \Rightarrow \{(\exists v)[0<v\leq x \wedge MP(v) \wedge nEx = v] \vee$$

(v *est un morphisme primitif*)

$$(\exists p)(\exists q)(\exists s)(\exists t)(\exists v)[0<p<n \wedge 0<q<n \wedge 0<s<x \wedge 0<t<x \wedge 0<v<x \wedge T(t) \wedge pEx = s*t \wedge qEx = t*v \wedge nEx = s*t*v] \vee$$

(*condition* 3 *de la définition de preuves de* $\mathcal{D}(\phi)$)

$$(\exists p)(\exists q)(\exists s)(\exists t)(\exists v)(\exists m)(\exists w)[0<p<n \wedge 0<q<n \wedge 0<s<x \wedge 0<t<x \wedge 0<v<x \wedge 0<m<x \wedge 0<w<x \wedge T(s) \wedge T(v) \wedge T(w) \wedge pEx = s*t*v \wedge qEx = s*m*w \wedge nEx = s*R(61)*s*t*v*R(19)*s*m*w*R(67)*F(v)*R(7)*F(w)] \vee$$

(*condition* 4)

$$(\exists p)(\exists s)(\exists t)(\exists m)(\exists w)[o<p<n \wedge o<s<x \wedge o<t<x \wedge o<m<x \wedge o<w<x \wedge T(s) \wedge T(t) \wedge T(w) \wedge pEx = F(s)*R(7)*F(t)*m*w \wedge nEx = s*F(pEx)*R(53)*F(t)*R(11)*F(w)]\}]$$

(*condition* 5)

(x *est une suite de morphismes*)

(*Par exemple,* SM(x) *si*

$$x = 2^{R(3)*R(31)*R(5)}3^{R(5)*R(37)*R(5)}5^{R(3)*R(31)*R(5)*R(37)*R(5)}$$

$$= 2^{2^3 3^{31} 5^5}3^{2^5 3^{37} 5^5}5^{2^3 3^{31} 5^5 7^{37} 11^5}$$

$$\simeq 2^{2^T 3^\theta 5^N}3^{2^N 3^\sigma 5^N}5^{2^T 3^\theta 5^N 7^\sigma 11^N}$$ *, en décodant*)

$M(x) \equiv (\exists n)[n \leq Pr([\ell(x)]!)^{(\ell(x))! \cdot \ell(x) \cdot Pr([\ell(x)]^{x})} \wedge$

$SM(n) \wedge x = \ell(n) E n]$

(x *est un morphisme*)

(*Par exemple*, M(x) *si* $x = 2^{3}3^{31}5^{5}7^{37}11^{5}$

$\simeq 2^{T}3^{\theta}5^{N}7^{\sigma}11^{N}$)

$xWy \equiv M(x) \wedge$

$\{ x = y \vee$

(*condition* 1 *de la relation d'équivalence* $\equiv$)

$(\exists p)(\exists q)(\exists u)[\{o \leq p \leq x \wedge q = 0\} \vee \{0 \leq q \leq x \wedge p = 0\} \wedge 0<u<x \wedge T(u) \wedge$

$x = p*u*R(29)*u*q \wedge y = p*u*q] \vee$

(*conditions* 7 *et* 8)

$(\exists u)(\exists p)[0<p<x \wedge 0<u<x \wedge T(u) \wedge$

$x = u*p*R(3) \wedge y = u*R(23)*R(3)] \vee$

(*condition* 11)

$(\exists p)(\exists q)(\exists a)(\exists b)(\exists d)[0<p<x \wedge 0<q<x \wedge 0<a<x \wedge 0<b<x \wedge 0<d<x$

$\wedge T(a) \wedge T(b) \wedge T(d) \wedge$

$[\{x = a*R(61)*p*R(19)*q*R(67)*b*R(41)*d \wedge y = p\} \vee$

$\{x = a*R(61)*p*R(19)*q*R(67)*b*R(43)*d \wedge y = q\}]] \vee$

(*conditions* 12 *et* 13)

$(\exists p)(\exists a)(\exists b)(\exists d)(\exists u)[0<p<x \wedge 0<a<x \wedge 0<b<x \wedge 0<d<x \wedge 0<u<x$

$\wedge T(a) \wedge T(b) \wedge T(d) \wedge T(u) \wedge$

$x = a*R(61)*p*R(41)*b*R(19)*p*R(43)*d*R(67)*u \wedge y = p] \vee$

(*condition* 14)

$$(\exists p)(\exists a)(\exists b)(\exists c)(\exists d)(\exists e)(\exists u)[0<p<x \wedge 0<a<x \wedge 0<b<x \wedge 0<c<x \wedge 0<d<x \wedge$$

$$0<e<x \wedge 0<u<x \wedge T(a) \wedge T(b) \wedge T(c) \wedge T(d) \wedge T(e) \wedge T(u) \wedge$$

$$[\{x = a\ast R(61)\ast a\ast R(43)\ast b\ast R(19)\ast a\ast R(41)\ast c\ast R(13)\ast p\ast R(17)\ast R(53)\ast$$

$$d\ast R(67)\ast e\ast R(47)\ast u \wedge y = p\} \vee$$

$$\{x = a\ast R(13)\ast b\ast R(61)\ast b\ast R(43)\ast c\ast R(19)\ast b\ast R(41)\ast p\ast R(67)\ast d\ast R(47)\ast$$

$$e\ast R(17)\ast R(53)\ast u \wedge y = p\}] \vee$$

(*conditions* 15 *et* 16)

$$(\exists a)(\exists b)(\exists c)(\exists d)[0<a<x \wedge 0<b<x \wedge 0<c<x \wedge 0<d<x \wedge T(a) \wedge T(b) \wedge T(c)$$

$$\wedge T(d) \wedge$$

$$x = R(3)\ast R(13)\ast a\ast R(13)\ast b\ast R(43)\ast c\ast R(17)\ast R(53)\ast d\ast R(17)\ast R(53)\ast$$

$$F(d)\ast R(11)\ast F(d) \wedge y = R(3)\ast R(31)\ast R(5)\ast R(59)\ast F(d)\ast R(11)\ast F(d)] \vee$$

(*condition* 17)

$$(\exists a)(\exists b)(\exists c)(\exists d)(\exists e)(\exists f)(\exists g)(\exists h)(\exists j)[0<a<x \wedge 0<b<x \wedge 0<c<x \wedge 0<d<x$$

$$\wedge 0<e<x \wedge 0<f<x \wedge 0<g<x \wedge 0<h<x \wedge 0<j<x \wedge T(a) \wedge T(b) \wedge T(c) \wedge T(d)$$

$$\wedge T(e) \wedge T(f) \wedge T(g) \wedge T(h) \wedge T(j) \wedge$$

$$x = R(5)\ast R(59)\ast b\ast R(13)\ast c\ast R(13)\ast d\ast R(61)\ast d\ast R(61)\ast d\ast R(43)\ast a\ast R(19)$$

$$\ast d\ast R(41)\ast c\ast R(61)\ast c\ast R(43)\ast e\ast R(19)\ast c\ast R(41)\ast b\ast R(67)\ast f\ast R(67)\ast g\ast R(19)$$

$$\ast d\ast R(41)\ast c\ast R(43)\ast e\ast R(67)\ast h\ast R(61)\ast h\ast R(41)\ast g\ast R(61)\ast g\ast R(41)\ast a\ast R(19)$$

$$\ast g\ast R(43)\ast f\ast R(47)\ast e\ast R(67)\ast j\ast R(47)\ast a\ast R(19)\ast h\ast R(43)\ast e\ast R(67)\ast j\ast R(47)$$

$$\ast a\ast R(17)\ast R(53)\ast e\ast R(17)\ast R(53)\ast b \wedge y = R(5)\ast R(37)\ast R(5)\ast R(59)\ast b]\}$$

(*condition* 18)

<u>REMARQUE:</u> La relation W tient compte des conditions 1, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 et 18 de la relation d'équivalence ≡)

$$xVy \equiv M(x) \wedge \{xWy \vee$$

$$(\exists v)(\exists w)(\exists p)(\exists q)(\exists s)(\exists t)[0<v<x \wedge 0<w<x \wedge 0<s<x \wedge 0<t<x \wedge 0<p<y \wedge$$

$$0<q<y \wedge T(s) \wedge T(t) \wedge vVp \wedge wVq \wedge$$

$$x = s*R(61)*v*R(19)*w*R(67)*t \wedge$$

$$y = s*R(61)*p*R(19)*q*R(67)*t] \vee$$

(*condition* 5 *de la relation d'équivalence* ≡)

$$(\exists v)(\exists p)(\exists s)(\exists t)[0<v<x \wedge 0<s<x \wedge 0<t<x \wedge 0<p<y \wedge T(s) \wedge T(t) \wedge vVp \wedge$$

$$x = s*R(13)*v*R(17)*R(53)*t \wedge$$

$$y = s*R(13)*p*R(17)*R(53)*t] \vee$$

(*condition* 4)

$$(\exists v)(\exists q)(\exists p)(\exists q)(\exists s)[0<v<x \wedge 0<w<x \wedge 0<s<x \wedge 0<p<y \wedge 0<q<y \wedge$$

$$T(s) \wedge v*bVp*b \wedge b*wVb*q$$

$$x = v*b*w \wedge y = p*b*q]\}$$

(*condition* 6)

$$xSy \equiv xVy \vee yVx$$

(*condition* 2)

<u>REMARQUE</u> La relation V tient compte des conditions 1, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 et 18 de la relation d'équivalence ≡. La relation S considère en plus la condition 2. Les conditions 9 et 10 étant vides dans le cas de $\mathcal{D}(\phi)$, il ne nous manque que la condition 3, c'est-à-dire la transitivité. Pour cerner la condition de transitivité, nous nous inspirerons de la méthode utilisée par Gödel [6] et reprise par Kleene [9].

III - Dans cette troisième étape, nous utiliserons des fonctions inspirées par Kleene mais adaptées au cas présent.

Soient A, une relation binaire et χ_A, sa fonction caractéristique. Toutes les fonctions suivantes sont primitives récursives en χ_A.

$$\varphi_A(n,x) = \mu z[z \le n+x \wedge [[xAn \wedge z = n] \vee [\sim(xAn) \wedge z = x]]]$$

$$\psi_A(0,x) = x$$

$$\psi_A(n+1,x) = \varphi_A(n,x)$$

$$\lambda(k,z) = k! \cdot \ell(z)$$

$$\tau_A(0,z) = z$$

$$\tau_A(k+1,z) = \prod_{n=0}^{\lambda(k+1,z)\dot{-}1} Pr(n+1) \exp \psi_A([\frac{n}{\lambda(k,z)}], Res(n,\lambda(k,z)) E \tau_A(k,z))$$

où $a \exp b = a^b$

$$\omega(n,z) = \mu t[t \le n \wedge n < \sum_{i=0}^{t} \lambda(i,z)]$$

$$\nu(n,z) = [\sum_{i=0}^{\omega(n,z)} \lambda(i,z)] \dot{-} n$$

$$\partial_A(z,m) = \nu(m,z) E \tau_A(\omega(m,z),z)$$

$$\Omega_A(z,m) = \partial_A(R(z),m)$$

<u>REMARQUE</u>

a) Les fonctions λ, ω et ν ne dépendent pas de A. Elles sont primitives récursives.

b) Si A est une relation primitive récursive (respectivement récursive), toutes les fonctions précédentes sont primitives récursives (respectivement récursives).

c) Ω_S est primitive récursive et $\Omega_S(z, \ )$ énumère avec répétition tous les nombres équivalents par rapport à $\equiv$ à z.

IV – Montrons que toute fonction $N^k \to N$ représentable dans $\overline{\Phi}$ est récursive.

Soit f: $N^k \to N$ représentée dans $\overline{\Phi}$ par le morphisme $\tilde{f}$, alors

$\forall (a_1,\ldots,a_k) \in N^k$,

$$(\dagger) \qquad \tilde{f}\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\sigma^{a_3}\theta\rangle,\ldots,\sigma^{a_k}\theta\rangle = \sigma^{f(a_1,\ldots,a_k)}\cdot\theta$$

Soit $g(a_1,\ldots,a_k) = R(3)*G(H[\ldots H[H(Z(a_1),Z(a_2)),Z(a_3)],\ldots],Z(a_k))*\tilde{f}$

Alors, $f(a_1,\ldots,a_k) = Z^{-1}[\Omega_S(g(a_1,\ldots,a_k),\mu y[\mathrm{Nom}\ \Omega_S(g(a_1,\ldots,a_k),y)])]$

$\forall (a_1,\ldots,a_k) \in N^k$

Donc, f est récursif.

REMARQUE

a) $g(a_1,\ldots,a_k)$ est le morphisme $\tilde{f}\langle\ldots\langle\sigma^{a_1},\sigma^{a_2}\rangle,\ldots\rangle,\sigma^{a_k}\rangle$ codé à l'aide de l'énumération de Gödel.

b) $Z^{-1}\ \Omega_S(g(a_1,\ldots,a_k),\mu y[\mathrm{Nom}\ \Omega_S(g(a_1,\ldots,a_k),y)])]$ est le nombre qui a pour code le plus petit nombre z satisfaisant les deux conditions suivantes: z est le code d'un nombre et z est équivalent par rapport à $\equiv$ à $g(a_1,\ldots a_k)$, l'équation ($\dagger$) assurant l'existence d'un tel nombre.

COROLLAIRE 2.7 Toute fonction $N^k \to N^n$, $n \in N^+$, représentable dans $\overline{\Phi}$ est récursive.

PREUVE Soit $f : N^k \to N^n$, $n \in N^+$, représentée par $\tilde{f} : N^k \to N^n$.

$\pi_{n,i} f : N^k \to N$ est représentée par $\tilde{\pi}_{n,i} \tilde{f}$ par la preuve du théorème 2.4. Donc, par le théorème précédent, $\pi_{n,i} f$ est récursif, $\forall i \in [1,n]$.

Comme $f = \langle \ldots \langle \pi_{n,1} f, \pi_{n,2} f \rangle, \pi_{n,3} f \rangle \ldots, \pi_{n,n} f \rangle$ et comme la classe des fonctions récursives est fermée sous le "produit par N", f est récursive.

Nous avons ainsi démontré que si $\overline{\Phi}$ est la catégorie pré-récursive libre engendrée par Φ,

a) toute fonction primitive récursive est représentable dans $\overline{\Phi}$,

b) toute fonction $N^k \to N^n$, $k \in N^+$, $n \in N^+$, représentable dans $\overline{\Phi}$ est récursive.

2.5 FONCTION REPRÉSENTABLE DANS $\overline{\Phi}$ MAIS NON PRIMITIVE RÉCURSIVE

Si nous examinons bien la preuve du théorème "Toute fonction $N^K \to N$, représentable dans $\overline{\Phi}$, est récursive", nous nous apercevons que nous utilisons toujours des fonctions primitives récursives sauf à la dernière ligne où nous utilisons un minimum non borné. Nous perdons donc la récursivité primitive à la dernière étape. Serait-il possible d'utiliser un minimum borné et alors nous aurions:

"toute fonction $N^K \to N$ représentable dans $\overline{\Phi}$ est primitive récursive" ou avons-nous le résultat maximal, c'est-à-dire existe-t-il une fonction récursive mais non primitive récursive, représentable dans $\overline{\Phi}$?

Soit la fonction $\alpha : N^2 \to N$ définie par la double récursion emboîtée suivante:

$$\alpha(0,n) = n+1$$

$$\alpha(m+1,0) = \alpha(m,1)$$

$$\alpha(m+1,n+1) = \alpha(m,\alpha(m+1,n))$$

Cette fonction n'est pas primitive récursive (Péter [21]) mais nous allons montrer que cette fonction est représentable dans $\overline{\phi}$, donc, en particulier, est récursive.

Nous aurons ainsi démontré que la classe des fonctions primitives récursives est non seulement une sous-classe de la classe des fonctions représentables dans $\overline{\phi}$, mais en est une sous-classe propre.

REMARQUE Dans $\overline{\phi}$, nous noterons

$I(A) = [AIA] : A \to A$

$O(A) = [AOT] : A \to T$

$\Theta = [T\Theta N] : T \to N$

$\hat{\sigma} = [N\sigma N] : N \to N$

$p(A,B) = [A\wedge BpA] : A\wedge B \to A$

$q(A,B) = [A\wedge BqB] : A\wedge B \to B$

$e(A,B) = [A\wedge(A\supset B)eB] : A\wedge(A\supset B) \to B$

$R(A) = [NR(A\supset A)\supset(A\supset A)] : N \to (A\supset A)\supset(A\supset A)$, $\forall A,B\in|\overline{\phi}|$

THEOREME 2.8 La fonction $\alpha : N^2 \to N$ définie ci-après est représentable dans $\overline{\phi}$

$$\alpha(0,n) = n+1$$

$$\alpha(m+1,0) = \alpha(m,1)$$

$$\alpha(m+1,n+1) = \alpha(m,\alpha(m+1,n)) \ , \ \forall m,n\in N$$

PREUVE par étapes.

I - Construction du morphisme $\psi : N^2 \to N$ susceptible de représenter α dans $\overline{\Phi}$

II - $\psi\langle\Theta\mathcal{O}(N),\mathcal{I}(N)\rangle = \hat{\sigma}$

III - $\psi\langle\hat{\sigma},\Theta\mathcal{O}(N)\rangle = \psi\langle\mathcal{I}(N),\hat{\sigma}\Theta\mathcal{O}(N)\rangle$

IV - $\psi\langle\hat{\sigma}p(N,N),\hat{\sigma}q(N,N)\rangle \equiv \psi\langle p(N,N),\psi\langle\hat{\sigma}p(N,N),q(N,N)\rangle\rangle$

V - $\psi\langle\hat{\sigma}^m\Theta\mathcal{O}(N),\mathcal{I}(N)\rangle : N \to N$ représente $\alpha(m,\_) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\forall m\in\mathbb{N}$

VI - $\psi : N^2 \to N$ représente $\alpha : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

I - Construisons le morphisme ψ susceptible de représenter α dans $\overline{\Phi}$

a) Soit $\Gamma(A) : (N\wedge(A\supset A))\wedge A \to A$

$$= e(A,A)\langle q(N\wedge(A\supset A),A),e(A\supset A,A\supset A)\langle q(N,A\supset A),$$
$$R(A)p(N,A\supset A)\rangle p(N\wedge(A\supset A),A)\rangle$$

b) Soit $\Delta(A) : ((A\supset A)\wedge A)\wedge N \to A$

$$= \Gamma(A)\langle\langle q((A\supset A)\wedge A,N),p(A\supset A,A)p((A\supset A)\wedge A,N)\rangle,$$
$$q(A\supset A,A)p((A\supset A)\wedge A,N)\rangle$$

c) Soit $T : T\wedge(N\supset N) \to N\supset N$

$$= [\Delta(N)]^*\langle q(T,N\supset N),e(N,N)\langle\hat{\sigma}\Theta p(T,N\supset N),q(T,N\supset N)\rangle\rangle$$

d) Soit $\psi : N\wedge N \to N$

$$= e(N,N)\langle q(N,N),\Gamma(N\supset N)\langle\langle\mathcal{I}(N),T^*\mathcal{O}(N)\rangle,[\hat{\sigma}q(T,N)]^*\mathcal{O}(N)\rangle p(N,N)\rangle$$

II - Vérifions que $N \xrightarrow{\langle\Theta\mathcal{O}(N),\mathcal{I}(N)\rangle} N\wedge N \xrightarrow{\psi} N = N \xrightarrow{\hat{\sigma}} N$

$$\psi<\theta O(N),I(N)>$$

$$= e(N,N)<q(N,N),\Gamma(N\supset N)<<I(N),T^{*}O(N)>,[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N)>p(N,N)><\Theta O(N),I(N)>$$

$$= e(N,N)<q(N,N)<\Theta O(N),I(N)>,\Gamma(N\supset N)<<I(N),T^{*}O(N)>,[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N)>p(N,N)$$
$$<\Theta O(N),I(N)>>$$

$$= e(N,N)<I(N),\Gamma(N\supset N)<<I(N),T^{*}O(N)>,[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N)>\Theta O(N)>$$

Mais $\Gamma(N\supset N)<<I(N),T^{*}O(N)>,[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N)>\Theta O(N)$

$$= \Gamma(N\supset N)<<\Theta O(N),T^{*}O(N)>,[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N)>$$

$$= e(N\supset N,N\supset N)<q(N\wedge((N\supset N)\supset(N\supset N)),N\supset N),e((N\supset N)\supset(N\supset N),(N\supset N)\supset(N\supset N))$$
$$<q(N,(N\supset N)\supset(N\supset N)),R(N\supset N)p(N,(N\supset N)\supset(N\supset N))>p(N\wedge((N\supset N)\supset(N\supset N)),N\supset N)>$$
$$<<\Theta O(N),T^{*}O(N)>,[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N)>$$

$$= e(N\supset N,N\supset N)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),e((N\supset N)\supset(N\supset N),(N\supset N)\supset(N\supset N))$$
$$<T^{*}O(N),R(N\supset N)\Theta O(N)>>$$

$$= e(N\supset N,N\supset N)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),e((N\supset N)\supset(N\supset N),(N\supset N)\supset(N\supset N))<T^{*}O(N),$$
$$[[q(T\wedge((N\supset N)\supset(N\supset N)),N\supset N)]^{*}]^{*}O(N)>>$$

$$= e(N\supset N,N\supset N)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*},e((N\supset N)\supset(N\supset N),(N\supset N)\supset(N\supset N))<q(T,(N\supset N)\supset(N\supset N)),$$
$$[[q(T\wedge((N\supset N)\supset(N\supset N)),N\supset N)]^{*}]^{*}p(T,(N\supset N)\supset(N\supset N))><I(T),T^{*}>>O(N)$$

$$= e(N\supset N,N\supset N)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*},[q(T\wedge((N\supset N)\supset(N\supset N)),N\supset N)]^{*}<I(T),T^{*}>>O(N)$$

$$= e(N\supset N,N\supset N)<q(T\wedge((N\supset N)\supset(N\supset N)),N\supset N),[q(T\wedge((N\supset N)\supset(N\supset N)),N\supset N)]^{*}$$
$$p(T\wedge((N\supset N)\supset(N\supset N)),N\supset N)><<I(T),T^{*}>,[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}>O(N)$$

$$= q(T\wedge((N\supset N)\supset(N\supset N)),N\supset N)<<I(T),T^{*}>,[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}>O(N)$$

$$= [\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N)$$

D'où $\psi\langle\Theta\mathcal{O}(N),\mathcal{I}(N)\rangle = e(N,N)\langle\mathcal{I}(N),[\hat{\sigma}q(T,N)]^*\mathcal{O}(N)\rangle$

$= e(N,N)\langle q(T,N),[\hat{\sigma}q(T,N)]^*p(T,N)\rangle\langle\mathcal{O}(N),\mathcal{I}(N)\rangle$

$= \hat{\sigma}q(T,N)\langle\mathcal{O}(N),\mathcal{I}(N)\rangle$

$= \hat{\sigma}$

Donc $\psi\langle\Theta\mathcal{O}(N),\mathcal{I}(N)\rangle = \hat{\sigma}$

III - Vérifions que $N\xrightarrow{\langle\hat{\sigma},\Theta\mathcal{O}(N)\rangle}N\wedge N\xrightarrow{\psi}N = N\xrightarrow{\langle\mathcal{I}(N),\hat{\sigma}\Theta\mathcal{O}(N)\rangle}N\wedge N\xrightarrow{\psi}N$

$\psi\langle\hat{\sigma},\Theta\mathcal{O}(N)\rangle$

$= e(N,N)\langle q(N,N),\Gamma(N\supset N)\langle\langle\mathcal{I}(N),T^*\mathcal{O}(N)\rangle,[\hat{\sigma}q(T,N)]^*\mathcal{O}(N)\rangle p(N,N)\rangle\langle\hat{\sigma},\Theta\mathcal{O}(N)\rangle$

$= e(N,N)\langle\Theta\mathcal{O}(N),\Gamma(N\supset N)\langle\langle\mathcal{I}(N),T^*\mathcal{O}(N)\rangle,[\hat{\sigma}q(T,N)]^*\mathcal{O}(N)\rangle\hat{\sigma}\rangle$

Regardons $\Gamma(N\supset N)\langle\langle\mathcal{I}(N),T^*\mathcal{O}(N)\rangle,[\hat{\sigma}q(T,N)]^*\mathcal{O}(N)\rangle\hat{\sigma}$

$\Gamma(N\supset N)\langle\langle\mathcal{I}(N),T^*\mathcal{O}(N)\rangle,[\hat{\sigma}q(T,N)]^*\mathcal{O}(N)\rangle\hat{\sigma}$

$= \Gamma(N\supset N)\langle\langle\hat{\sigma},T^*\mathcal{O}(N)\rangle,[\hat{\sigma}q(T,N)]^*\mathcal{O}(N)\rangle$

$= e(A,A)\langle q(N\wedge(A\supset A),A),e(A\supset A,A\supset A)\langle q(N,A\supset A),R(A)p(N,A\supset A)\rangle p(N\wedge(A\supset A),A)\rangle$
$\langle\langle\hat{\sigma},T^*\mathcal{O}(N)\rangle,[\hat{\sigma}q(T,N)]^*\mathcal{O}(N)\rangle$

où $A = N\supset N$

$= e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^*\mathcal{O}(N),e(A\supset A,A\supset A)\langle T^*\mathcal{O}(N),R(A)\hat{\sigma}\rangle\rangle$

$= e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^*\mathcal{O}(N),e(A\supset A,A\supset A)\langle T^*\mathcal{O}(N),[[\xi(A)]^*]^*R(A)\rangle\rangle$

$= e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^*\mathcal{O}(N),[\xi(A)]^*\langle R(A),T^*\mathcal{O}(N)\rangle\rangle$

$= \xi(A)\langle\langle R(A),T^*\mathcal{O}(N)\rangle,[\hat{\sigma}q(T,N)]^*\mathcal{O}(N)\rangle$

$$= e(A,A)\langle e(A,A)\langle p(A,B\wedge C),e(B,B)q(A,B\wedge C)\rangle p(A\wedge(B\wedge C),B),q(A\wedge(B\wedge C),B)\rangle$$
$$\langle\langle q(C\wedge B,A),\langle q(C,B),p(C,B)\rangle p(C\wedge B,A)\rangle,q(C,B)p(C\wedge B,A)\rangle\langle\langle R(A),T^{*}O(N)\rangle,$$
$$[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N)\rangle$$

où $B = A\supset A$ et $C = B\supset B$.

$$= e(A,A)\langle e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),e(B,B)\langle T^{*}O(N),R(A)\rangle\rangle,T^{*}O(N)\rangle$$

$$= T\langle O(N),e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),e(B,B)\langle T^{*}O(N),R(A)\rangle\rangle\rangle$$

$$= [\Delta(N)]^{*}\langle q(T,A),e(N,N)\langle\hat{\sigma}\Theta p(T,A),q(T,A)\rangle\rangle\langle O(N),e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),$$
$$e(B,B)\langle T^{*}O(N),R(A)\rangle\rangle\rangle$$

$$= [\Delta(N)]^{*}\langle e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),e(B,B)\langle T^{*}O(N),R(A)\rangle\rangle,e(N,N)\langle\hat{\sigma}\Theta O(N),$$
$$e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),e(B,B)\langle T^{*}O(N),R(A)\rangle\rangle\rangle\rangle$$

D'où $\psi\langle\hat{\sigma},\Theta O(N)\rangle$

$$= e(N,N)\langle\Theta O(N),[\Delta(N)]^{*}\langle e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),e(B,B)\langle T^{*}O(N),R(A)\rangle\rangle,$$
$$e(N,N)\langle\hat{\sigma}\Theta O(N),e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),e(B,B)\langle T^{*}O(N),R(A)\rangle\rangle\rangle\rangle\rangle$$

$$= \Delta(N)\langle\langle e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),e(B,B)\langle T^{*}O(N),R(A)\rangle\rangle,e(N,N)\langle\hat{\sigma}\Theta O(N),$$
$$e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),e(B,B)\langle T^{*}O(N),R(A)\rangle\rangle\rangle\rangle,\Theta O(N)\rangle$$

$$= \Gamma(N)\langle\langle q(A\wedge N,N),p(A,N)p(A\wedge N,N)\rangle,q(A,N)p(A\wedge N,N)\rangle\langle\langle e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),$$
$$e(B,B)\langle T^{*}O(N),R(A)\rangle\rangle,e(N,N)\langle\hat{\sigma}\Theta O(N),e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),$$
$$e(B,B)\langle T^{*}O(N),R(A)\rangle\rangle\rangle\rangle,\Theta O(N)\rangle$$

$$= \Gamma(N)\langle\langle\Theta O(N),e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),e(B,B)\langle T^{*}O(N),R(A)\rangle\rangle\rangle,e(N,N)\langle\hat{\sigma}\Theta O(N),$$
$$e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),e(B,B)\langle T^{*}O(N),R(A)\rangle\rangle\rangle\rangle$$

$$= e(N,N)\langle q(N\wedge A,N),e(A,A)\langle q(N,A),R(N)p(N,A)\rangle p(N\wedge A,N)\rangle\langle\langle\Theta O(N),$$
$$e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),e(B,B)\langle T^{*}O(N),R(A)\rangle\rangle\rangle,e(N,N)\langle\hat{\sigma}\Theta O(N),$$
$$e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),e(B,B)\langle T^{*}O(N),R(A)\rangle\rangle\rangle\rangle$$

$$= e(N,N)<e(N,N)<\hat{\sigma}\Theta O(N),e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N),e(B,B)<T^*O(N),R(A)>>>,$$
$$e(A,A)<e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N),e(B,B)<T^*O(N),R(A)>>,R(N)\Theta O(N)>>$$

$$= e(N,N)<e(N,N)<\hat{\sigma}\Theta O(N),e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N),e(B,B)<T^*O(N),R(A)>>>,$$
$$e(A,A)<e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N),e(B,B)<T^*O(N),R(A)>>,[[q(T\wedge A,N)]^*]^*O(N)>>$$

$$= e(N,N)<e(N,N)<\hat{\sigma}\Theta O(N),e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N),e(B,B)<T^*O(N),R(A)>>>,$$
$$[q(T\wedge A,N)]^*<O(N),e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N),e(B,B)<T^*O(N),R(A)>>>>$$

$$= q(T\wedge A,N)<<O(N),e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N),e(B,B)<\underline{T^*O(N)},R(A)>>>,$$
$$e(N,N)<\hat{\sigma}\Theta O(N),e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N),e(B,B)<T^*O(N),R(A)>>>>.$$

$$= e(N,N)<\hat{\sigma}\Theta O(N),e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N),e(B,B)<T^*O(N),R(A)>>>$$

$$= e(N,N)<\hat{\sigma}\Theta O(N),e(A,A)<q(N\wedge B,A),e(B,B)<q(N,B),R(A)p(N,B)>p(N\wedge B,A)>$$
$$<<I(N),T^*O(N)>,[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N)>>$$

$$= e(N,N)<\hat{\sigma}\Theta O(N),\Gamma(N\supset N)<<I(N),T^*O(N)>,[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N)>>$$

$$= e(N,N)<q(N,N),\Gamma(N\supset N)<<I(N),T^*O(N)>,[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N)>p(N,N)><I(N),\hat{\sigma}\Theta O(N)>$$

$$= \psi<I(N),\hat{\sigma}\Theta O(N)>$$

Donc $\psi<\hat{\sigma},\Theta O(N)> = \psi<I(N),\hat{\sigma}\Theta O(N)>$

IV – Vérifions que $N\wedge N \xrightarrow{<\hat{\sigma}p(N,N),\hat{\sigma}q(N,N)>} N\wedge N \xrightarrow{\psi} N$

$$N\wedge N \xrightarrow{<p(N,N),\psi<\hat{\sigma}p(N,N),q(N,N)>>} N\wedge N \xrightarrow{\psi} N$$

a) $\psi<\hat{\sigma}p(N,N),\hat{\sigma}q(N,N)>$

$$= e(N,N)<q(N,N),\Gamma(N\supset N)<<I(N),T^*O(N)>,[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N)>p(N,N)>$$
$$<\hat{\sigma}p(N,N),\hat{\sigma}q(N,N)>$$

$= e(N,N)<\hat{\sigma}q(N,N),\Gamma(N\supset N)<<I(N),T^{*}O(N)>,[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N)>\hat{\sigma}p(N,N)>$

Dans la section III, nous avons constaté que

$\Gamma(N\supset N)<<I(N),T^{*}O(N)>,[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N)>\hat{\sigma} =$

$[\Delta(N)]^{*}<e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),e(B,B)<T^{*}O(N),R(A)>>,e(N,N)<\hat{\sigma}\Theta O(N),$
$e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),e(B,B)<T^{*}O(N),R(A)>>>>$

où $A = N\supset N$ et $B = A\supset A$.

Alors $\psi<\hat{\sigma}p(N,N),\hat{\sigma}q(N,N)>$

$= e(N,N)<\hat{\sigma}q(N,N),[\Delta(N)]^{*}<e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),e(B,B)<T^{*}O(N),R(A)>>,$
$e(N,N)<\hat{\sigma}\Theta O(N),e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),e(B,B)<T^{*}O(N),R(A)>>>>p(N,N)>$

$= \Delta(N)<<e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),e(B,B)<T^{*}O(N),R(A)>>,e(N,N)<\hat{\sigma}\Theta O(N),$
$e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),e(B,B)<T^{*}O(N),R(A)>>>>p(N,N),\hat{\sigma}q(N,N)>$

$= \Gamma(N)<<q(A\wedge N,N),p(A,N)p(A\wedge N,N)>,q(A,N)p(A\wedge N,N)>$
$<<e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),e(B,B)<T^{*}O(N),R(A)>>,e(N,N)<\hat{\sigma}\Theta O(N),$
$e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),e(B,B)<T^{*}O(N),R(A)>>>>p(N,N),\hat{\sigma}q(N,N)>$

$= \Gamma(N)<<\hat{\sigma}q(N,N),e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),e(B,B)<T^{*}O(N),R(A)>>p(N,N)>,$
$e(N,N)<\hat{\sigma}\Theta O(N),e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),e(B,B)<T^{*}O(N),R(A)>>>p(N,N)>$

$= e(N,N)<q(N\wedge A,N),e(A,A)<q(N,A),R(N)p(N,A)>p(N\wedge A,N)>$
$<<\hat{\sigma}q(N,N),e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),e(B,B)<T^{*}O(N),R(A)>>p(N,N)>,$
$e(N,N)<\hat{\sigma}\Theta O(N),e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),e(B,B)<T^{*}O(N),R(A)>>>p(N,N)>$

$= e(N,N)<e(N,N)<\hat{\sigma}\Theta O(N),e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),e(B,B)<T^{*}O(N),R(A)>>>$
$p(N,N),e(A,A)<e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N),e(B,B)<T^{*}O(N),R(A)>>p(N,N),$
$R(N)\hat{\sigma}q(N,N)>>$

$$= e(N,N)\langle e(N,N)\langle \hat{\sigma}\theta O(N), e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N), e(B,B)\langle T^{*}O(N), R(A)\rangle\rangle\rangle$$
$$p(N,N), e(A,A)\langle e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N), e(B,B)\langle T^{*}O(N), R(A)\rangle\rangle p(N,N),$$
$$[[\xi(N)]^{*}]^{*}R(N)q(N,N)\rangle\rangle$$

$$= e(N,N)\langle e(N,N)\langle \hat{\sigma}\theta O(N), e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N), e(B,B)\langle T^{*}O(N), R(A)\rangle\rangle\rangle$$
$$p(N,N), [\xi(N)]^{*}\langle R(N)q(N,N), e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N), e(B,B)\langle T^{*}O(N),$$
$$R(A)\rangle\rangle p(N,N)\rangle\rangle$$

$$= \xi(N)\langle\langle R(N)q(N,N), e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N), e(B,B)\langle T^{*}O(N), R(A)\rangle\rangle p(N,N)\rangle,$$
$$e(N,N)\langle \hat{\sigma}\Theta O(N), e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N), e(B,B)\langle T^{*}O(N), R(A)\rangle\rangle\rangle p(N,N)\rangle$$

$$= e(N,N)\langle e(N,N)\langle p(N,A\wedge B), e(A,A)q(N,A\wedge B)\rangle p(N\wedge(A\wedge B),A), q(N\wedge(A\wedge B),A)\rangle$$
$$\langle\langle q(B\wedge A,N), \langle q(B,A), p(B,A)\rangle p(B\wedge A,N)\rangle, q(B,A)p(B\wedge A,N)\rangle\langle\langle R(N)q(N,N),$$
$$e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N), e(B,B)\langle T^{*}O(N), R(A)\rangle\rangle p(N,N)\rangle, e(N,N)\langle \hat{\sigma}\Theta O(N),$$
$$e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N), e(B,B)\langle T^{*}O(N), R(A)\rangle\rangle\rangle p(N,N)\rangle$$

$$= e(N,N)\langle e(N,N)\langle e(N,N)\langle \hat{\sigma}\Theta O(N), e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N), e(B,B)\langle T^{*}O(N),$$
$$R(A)\rangle\rangle\rangle p(N,N), e(A,A)\langle e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N), e(B,B)\langle T^{*}O(N), R(A)\rangle\rangle$$
$$p(N,N), R(N)q(N,N)\rangle\rangle, e(A,A)\langle[\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N), e(B,B)\langle T^{*}O(N), R(A)\rangle\rangle p(N,N)\rangle$$

b) $\psi\langle p(N,N), \psi\langle\hat{\sigma}p(N,N), q(N,N)\rangle\rangle$

$$= e(N,N)\langle q(N,N), \Gamma(N\supset N)\langle\langle I(N), T^{*}O(N)\rangle, [\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N)\rangle p(N,N)\rangle\langle p(N,N),$$
$$\psi\langle\hat{\sigma}p(N,N), q(N,N)\rangle\rangle$$

$$= e(N,N)\langle\psi\langle\hat{\sigma}p(N,N), q(N,N)\rangle, \Gamma(N\supset N)\langle\langle I(N), T^{*}O(N)\rangle, [\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N)\rangle p(N,N)\rangle$$

$$= e(N,N)\langle e(N,N)\langle q(N,N), \Gamma(N\supset N)\langle\langle I(N), T^{*}O(N)\rangle, [\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N)\rangle p(N,N)\rangle$$
$$\langle\hat{\sigma}p(N,N), q(N,N)\rangle, \Gamma(N\supset N)\langle\langle I(N), T^{*}O(N)\rangle, [\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N)\rangle p(N,N)\rangle$$

$$= e(N,N)\langle e(N,N)\langle q(N,N), \Gamma(N\supset N)\langle\langle I(N), T^{*}O(N)\rangle, [\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N)\rangle\hat{\sigma}p(N,N)\rangle,$$
$$\Gamma(N\supset N)\langle\langle I(N), T^{*}O(N)\rangle, [\hat{\sigma}q(T,N)]^{*}O(N)\rangle p(N,N)\rangle$$

Dans la section III, nous avons constaté

$\Gamma(N\supset N)<<I(N),T^*O(N)>,[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N)>\hat{\sigma}$

$= [\Delta(N)]^*<e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N),e(B,B)<T^*O(N),R(A)>>,e(N,N)<\hat{\sigma}\Theta O(N),$
$e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N),e(B,B)<T^*O(N),R(A)>>>>$

où $A = N\supset N$ et $B = A\supset A$

Alors $\psi<p(N,N),\psi<\hat{\sigma}p(N,N),q(N,N)>>$

$= e(N,N)<e(N,N)<q(N,N),[\Delta(N)]^*<e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N),$
$e(B,B)<T^*O(N),R(A)>>,e(N,N)<\hat{\sigma}\Theta O(N),e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N),$
$e(B,B)<T^*O(N),R(A)>>>>p(N,N)>,\Gamma(N\supset N)<<I(N),T^*O(N)>,$
$[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N)>p(N,N)>$

$= e(N,N)<\Delta(N)<<e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N),e(B,B)<T^*O(N),R(A)>>,$
$e(N,N)<\hat{\sigma}\Theta O(N),e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N),e(B,B)<T^*O(N),R(A)>>>>p(N,N),$
$q(N,N)>,\Gamma(N\supset N)<<I(N),T^*O(N)>,[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N)>p(N,N)>$

$= e(N,N)<\Gamma(N)<<q(A\wedge N,N),p(A,N)p(A\wedge N,N)>,q(A,N)p(A\wedge N,N)>$
$<<e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N),e(B,B)<T^*O(N),R(A)>>,e(N,N)<\hat{\sigma}\Theta O(N),$
$e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N),e(B,B)<T^*O(N),R(A)>>>>p(N,N),q(N,N)>,$
$\Gamma(N\supset N)<<I(N),T^*O(N)>,[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N)>p(N,N)>$

$= e(N,N)<\Gamma(N)<<q(N,N),e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N),e(B,B)<T^*O(N),R(A)>>$
$p(N,N)>,e(N,N)<\hat{\sigma}\theta O(N),e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N),e(B,B)<T^*O(N),R(A)>>>$
$p(N,N)>,\Gamma(N\supset N)<<I(N),T^*O(N)>,[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N)>p(N,N)>$

$= e(N,N)<e(N,N)<q(N\wedge A,N),e(A,A)<q(N,A),R(N)p(N,A)>p(N\wedge A,N)><<q(N,N),$
$e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N),e(B,B)<T^*O(N),R(A)>>p(N,N)>,e(N,N)<\hat{\sigma}\Theta O(N),$
$e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N),e(B,B)<T^*O(N),R(A)>>>p(N,N)>,e(A,A)<q(N\wedge B,A),$
$e(B,B)<q(N,B),R(A)p(N,B)>p(N\wedge B,A)><<I(N),T^*O(N)>,$
$[\hat{\sigma}q(T,N)]^*O(N)>p(N,N)>$

$$= e(N,N)<e(N,N)<e(N,N)<\hat{\sigma}\Theta O(N), e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^* O(N),$$
$$e(B,B)<T^* O(N), R(A)>>>p(N,N), e(A,A)<e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^* O(N),$$
$$e(B,B)<T^* O(N), R(A)>>p(N,N), R(N)q(N,N)>>,$$
$$e(A,A)<[\hat{\sigma}q(T,N)]^* O(N), e(B,B)<T^* O(N), R(A)>>p(N,N)>$$

D'où, par a et b,

$$\psi<\hat{\sigma}p(N,N), \hat{\sigma}q(N,N)> = \psi<p(N,N), \psi<\hat{\sigma}p(N,N), q(N,N)>>$$

V - Montrons que $\psi<\hat{\sigma}^m\Theta O(N), I(N)> : N \to N$ représente $\alpha(m,\_) : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, $\forall m \in \mathcal{N}$

<u>PREUVE</u> par induction sur m.

a) Si m = 0, montrons que $\psi<\hat{\sigma}^0\Theta O(N), I(N)>$ représente $\alpha(0,\_)$.
Par II, nous savons que $\psi<\Theta O(N), I(N)> = \hat{\sigma}$ c'est-à-dire $\psi<\Theta O(N), I(N)>$ représente la fonction successeur s. Donc $\psi<\Theta O(N), I(N)>$ représente $\alpha(0,\_)$ car $\alpha(0,\_) = s$.

b) Supposons le résultat vrai pour m, c'est-à-dire $\psi<\hat{\sigma}^m\Theta O(N), I(N)>$ représente $\alpha(m,\_)$,
montrons qu'alors le résultat est vrai pour m+1; c'est-à-dire $\psi<\hat{\sigma}^{m+1}\Theta O(N), I(N)>$ représente $\alpha(m+1,\_)$ et ceci n'est vérifié que si $\psi<\hat{\sigma}^{m+1}\Theta O(N), I(N)>\hat{\sigma}^n\Theta = \hat{\sigma}^{\alpha(m+1,n)}\Theta$, $\forall n \in \mathcal{N}$.

Preuve par induction sur n.

i) Si n = 0

$$\begin{aligned}\psi<\hat{\sigma}^{m+1}\Theta O(N), I(N)>\Theta &= \psi<\hat{\sigma}, \Theta O(N)>\hat{\sigma}^m\Theta \\ &= \psi<I(N), \hat{\sigma}\Theta O(N)>\hat{\sigma}^m\Theta, \text{ par III} \\ &= \psi<\hat{\sigma}^m\Theta, \hat{\sigma}\Theta>\end{aligned}$$

$$= \psi\langle\hat{\sigma}^m\Theta\mathcal{O}(N),\mathcal{I}(N)\rangle\hat{\sigma}\Theta$$

$$= \hat{\sigma}^{\alpha(m,1)}\Theta \text{ car } \psi\langle\hat{\sigma}^m\Theta\mathcal{O}(N),\mathcal{I}(N)\rangle \text{ représente}$$

$$\alpha(m,\_) \text{ par hypothèse}$$

$$= \hat{\sigma}^{\alpha(m+1,0)}\Theta \text{ par définition.}$$

D'où $\psi\langle\hat{\sigma}^{m+1}\Theta\mathcal{O}(N),\mathcal{I}(N)\rangle\hat{\sigma}^0\Theta = \hat{\sigma}^{\alpha(m+1,0)}\Theta$

ii) Supposons que $\psi\langle\hat{\sigma}^{m+1}\Theta\mathcal{O}(N),\mathcal{I}(N)\rangle\hat{\sigma}^n\Theta = \hat{\sigma}^{\alpha(m+1,n)}\Theta$

montrons que $\psi\langle\hat{\sigma}^{m+1}\Theta\mathcal{O}(N),\mathcal{I}(N)\rangle\hat{\sigma}^{n+1}\Theta = \hat{\sigma}^{\alpha(m+1,n+1)}\Theta$

$$\psi\langle\hat{\sigma}^{m+1}\Theta\mathcal{O}(N),\mathcal{I}(N)\rangle\hat{\sigma}^{n+1}\Theta = \psi\langle\hat{\sigma}^{m+1}\Theta,\hat{\sigma}^{n+1}\Theta\rangle$$

$$= \psi\langle\hat{\sigma}p(N,N),\hat{\sigma}q(N,N)\rangle\langle\hat{\sigma}^m\Theta,\hat{\sigma}^n\Theta\rangle$$

$$= \psi\langle p(N,N),\psi\langle\hat{\sigma}p(N,N),q(N,N)\rangle\rangle\langle\hat{\sigma}^m\Theta,\hat{\sigma}^n\Theta\rangle$$

$$= \psi\langle\hat{\sigma}^m\Theta,\psi\langle\hat{\sigma}\hat{\sigma}^m\Theta,\hat{\sigma}^n\Theta\rangle\rangle$$

$$= \psi\langle\hat{\sigma}^m\Theta,\psi\langle\hat{\sigma}^{m+1}\Theta,\hat{\sigma}^n\Theta\rangle\rangle$$

$$= \psi\langle\hat{\sigma}^m\Theta,\psi\langle\hat{\sigma}^{m+1}\Theta\mathcal{O}(N),\mathcal{I}(N)\rangle\hat{\sigma}^n\Theta\rangle$$

$$= \psi\langle\hat{\sigma}^m\Theta,\hat{\sigma}^{\alpha(m+1,n)}\Theta\rangle \text{ par hypothèse ii)}$$

$$= \psi\langle\hat{\sigma}^m\Theta\mathcal{O}(N),\mathcal{I}(N)\rangle\hat{\sigma}^{\alpha(m+1,n)}\Theta$$

$$= \hat{\sigma}^{\alpha(m,\alpha(m+1,n))}\Theta \text{ car } \psi\langle\hat{\sigma}^m\Theta\mathcal{O}(N),\mathcal{I}(N)\rangle$$

$$\text{représente } \alpha(m,\_) \text{ par hypothèse b)}$$

$$= \hat{\sigma}^{\alpha(m+1,n+1)}\Theta$$

D'où $\psi\langle\hat{\sigma}^{m+1}\Theta\mathcal{O}(N),\mathcal{I}(N)\rangle\hat{\sigma}^{n+1}\Theta = \hat{\sigma}^{\alpha(m+1,n+1)}\Theta$.

Donc, $\forall n\in\mathcal{N}$, $\psi\langle\hat{\sigma}^{m+1}\Theta\mathcal{O}(N),\mathcal{I}(N)\rangle\hat{\sigma}^n\Theta = \hat{\sigma}^{\alpha(m+1,n)}\Theta$, par induction, c'est-à-dire $\psi\langle\hat{\sigma}^{m+1}\Theta\mathcal{O}(N),\mathcal{I}(N)\rangle$ représente $\alpha(m+1,\_)$

Ainsi $\psi\langle\hat{\sigma}^0\Theta\mathcal{O}(N),\mathcal{I}(N)\rangle$ représente $\alpha(0,\_)$ et si $\psi\langle\hat{\sigma}^m\Theta\mathcal{O}(N),\mathcal{I}(N)\rangle$ représente $\alpha(m,\_)$, alors $\psi\langle\hat{\sigma}^{m+1}\Theta\mathcal{O}(N),\mathcal{I}(N)\rangle$ représente $\alpha(m+1,\_)$

D'où, par induction, $\psi\langle\hat{\sigma}^m\theta O(N), I(N)\rangle$ représente $\alpha(m,\_)$, $\forall m\in N$.

VI − $\forall s,t\in N$, $\psi\langle\hat{\sigma}^s\Theta,\hat{\sigma}^t\Theta\rangle = \psi\langle\hat{\sigma}^s\Theta O(N), I(N)\rangle\hat{\sigma}^t\Theta$

$= \hat{\sigma}^{\alpha(s,\_)\,t}\Theta$ car $\psi\langle\hat{\sigma}^s\Theta O(N), I(N)\rangle$ représente $\alpha(s,\_)$

$= \hat{\sigma}^{\alpha(s,t)}\Theta$

$\Rightarrow$ ψ représente α

$\Rightarrow$ α est représentable dans $\overline{\Phi}$

COROLLAIRE 2.9 La classe des fonctions représentables dans $\overline{\Phi}$ contient strictement la classe des fonctions primitives récursives.

PREUVE Le théorème 2.4 nous dit que toute fonction primitive récursive appartient à la classe des fonctions représentables dans $\overline{\Phi}$ et le théorème 2.8 nous donne une fonction représentable dans $\overline{\Phi}$ qui n'est pas primitive récursive.

2.6 *MORPHISMES CALCULABLES*

Si A = l'ensemble des fonctions primitives récursives

B = l'ensemble des fonctions représentables dans ϕ

C = l'ensemble des fonctions récursives

le théorème 2.6 et le corollaire 2.9 nous disent que $A \subsetneq B \subseteq C$

Pouvons-nous préciser la relation $B \subseteq C$, c'est-à-dire pouvons-nous décider si B = C ou si B est strictement contenu dans C?

Avant de répondre à cette question, nous allons démontrer que tout morphisme $f : N \to N$ de $\overline{\Phi}$ représente une fonction.

DEFINITION 2.10 Nous pouvons définir de façon inductive ce qu'est un morphisme calculable $f : T \to A$ dans $\overline{\phi}$.

Si $A = T$, $T \to T$ est calculable

Si $A = N$, $f : T \to N$ est calculable s'il existe un élément n de N tel que

$$f = \hat{o}^n\theta$$

Si $A = B\wedge C$, $f : T \to B\wedge C$ est calculable si $p(B,C)f : T \to B$ et $q(B,C)f : T \to C$ sont calculables

Si $A = B\supset C$, $f : T \to B\supset C$ est calculable si pour tout morphisme calculable $b : T \to B$, le morphisme $e(B,C)<I(B),\ fO(B)>b : T \to C$ est calculable.

DEFINITION 2.11 Un morphisme $f : A \to B$ est calculable si pour tout morphisme calculable $a : T \to A$, $fa : T \to B$ est calculable.

THEOREME 2.12 Un morphisme $f : A \to B$ est calculable si et seulement si $[fq(T,A)]^* : T \to A\supset B$ est calculable.

PREUVE $[fq(T,A)]^* : T \to A\supset B$ est calculable si et seulement si $\forall a : T \to A$ calculable, $e(A,B)<I(A),[fq(T,A)]^*O(A)>a$ est calculable.

Mais
$$\begin{aligned} e(A,B)<I(A),[fq(T,A)]^*O(A)>a &= e(A,B)<q(T,A),[fq(T,A)]^*p(T,A)><O(A),I(A)>a \\ &= fq(T,A)<O(A),I(A)>a \\ &= fI(A)a \\ &= a \end{aligned}$$

Donc, $[fq(T,A)]^*$ est calculable $\Leftrightarrow \forall a : T \to A$ calculable, $fa : T \to B$ est calculable

$\Leftrightarrow f : A \to B$ est calculable

<u>REMARQUE</u> Que signifie la notion de "morphisme calculable"?

a) Un morphisme $a : T \to N$ est calculable si et seulement si a représente un nombre naturel, c'est-à-dire si et seulement s'il existe un élément n de $\mathcal{N}$ tel que $a = \hat{\sigma}^n\theta$

b) Un morphisme $f : N \to N$ est calculable si et seulement si f représente une fonction. En effet

$f : N \to N$ est calculable

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathcal{N}$, $f\hat{\sigma}^n\theta : T \to N$ est calculable

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathcal{N}$, $\exists m\in\mathcal{N} \to f\hat{\sigma}^n\theta = \hat{\sigma}^m\theta$

$\Leftrightarrow \exists$ une fonction $\alpha : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ telle que $f\hat{\sigma}^n\theta = \hat{\sigma}^{\alpha(n)}\theta$

$\Leftrightarrow \exists$ une fonction $\alpha : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ représentée par $f : N \to N$

c) Un morphisme $\beta : N{\supset}N \to N{\supset}N$ associe à tout morphisme $f : N \to N$, un autre morphisme de N dans N de la façon suivante:

$f : N \to N \Rightarrow [fq(T,N)]^* : T \to N{\supset}N \Rightarrow \beta[fq(T,N)]^* : T \to N{\supset}N$

$\Rightarrow e(N,N)\langle I(N),\ \beta[fq(T,N)]^*\rangle : N \to N$

Le morphisme $\beta : N{\supset}N \to N{\supset}N$ est calculable si cette association préserve la calculabilité, c'est-à-dire si pour tout morphisme calculable $f : N \to N$, $e(N,N)\langle I(N),\ \beta[fq(T,N)]^*\rangle : N \to N$ est calculable.

<u>THEOREME 2.13</u> Les morphismes $\theta,\hat{\sigma},I(A),O(A),p(A,B),q(A,B)$ et $e(A,B)$ de $\overline{\phi}$ sont calculables, $\forall A,B\in|\phi|$

a) $\theta : T \to N$ est calculable par définition.

b) $\hat{\sigma}$ est calculable car pour tout $\hat{\sigma}^n\theta : T \to N$, $\hat{\sigma}\hat{\sigma}^n\theta = \hat{\sigma}^{n+1}\theta$ est calculable.

c) $I(A) : A \to A$ est calculable car si $a : T \to A$ est calculable, alors $I(A)a = a$ est calculable.

d) $\mathcal{O}(A) : A \to T$ est calculable car si $a : T \to A$ est calculable, alors $\mathcal{O}(A)a : T \to T$ est calculable.

e) $p(A,B) : A \wedge B \to A$ est calculable car si $f : T \to A \wedge B$ est calculable, alors $p(A,B)f$ est calculable par définition.

f) $q(A,B) : A \wedge B \to B$ est calculable car si $f : T \to A \wedge B$ est calculable, alors $q(A,B)f$ est calculable par définition.

g) $e(A,B) : A \wedge (A \supset B) \to B$ est calculable car si $g : T \to A \wedge (A \supset B)$ est calculable, alors $p(A,A \supset B)g : T \to A$ et $q(A,A \supset B)g : T \to A \supset B$ sont calculables

$\Rightarrow$ $e(A,B)\langle I(A), q(A,A \supset B)g\mathcal{O}(A)\rangle p(A,A \supset B)g$ est calculable par définition d'un morphisme calculable $T \to A \supset B$

$\Rightarrow$ $e(A,B)\langle p(A,A \supset B)g, q(A,A \supset B)g\mathcal{O}(A)p(A,A \supset B)g\rangle$ est calculable

$\Rightarrow$ $e(A,B)\langle p(A,A \supset B)g, q(A,A \supset B)g\rangle$ est calculable

$\Rightarrow$ $e(A,B)\langle p(A,A \supset B), q(A,A \supset B)\rangle g$ est calculable

$\Rightarrow$ $e(A,B)g$ est calculable

Donc, $e(A,B)$ est calculable.

<u>THEOREME 2.14</u> Si $\overline{\phi}(A,B)$ représente l'ensemble des morphismes de $\overline{\phi}$ ayant A pour domaine et B pour codomaine, les opérateurs

a) composition : $\overline{\phi}(A,B) \times \overline{\phi}(B,C) \to \overline{\phi}(A,C)$

$(f \quad , \quad g) \to gf$

b) produit : $\overline{\phi}(A,B) \times \overline{\phi}(A,C) \to \overline{\phi}(A,B \wedge C)$

$(f \quad , \quad g) \to \langle f,g\rangle$

c) étoile : $\overline{\phi}(A \wedge B,C) \to \overline{\phi}(A,B \supset C)$

$f \to f^*$

préservent la calculabilité, c'est-à-dire l'image par ces opérateurs de morphismes calculables est calculable et ceci, pour tous les objets A, B, C de $\overline{\phi}$

PREUVE

a) Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ calculables

alors $a : T \to A$ calculable $\Rightarrow$ fa calculable car f est calculable

$\Rightarrow g(fa) = (gf)a$ calculable car g est calculable

donc, gf est calculable.

b) Soient $f : A \to B$ et $g : A \to C$ calculables

alors par définition $<f,g>$ est calculable car $p(B,C)<f,g> = f$ et $q(B,C)<f,g> = g$.

c) Soit $f : A \wedge B \to C$ calculable

alors $a : T \to A$ et $b : T \to B$ calculables

$\Rightarrow$ $<a,b>$ calculable par b)

$\Rightarrow$ $f<a,b>$ calculable car f est calculable

$\Rightarrow$ $e(B,C)<q(A,B),f^*p(A,B)><a,b>$ est calculable

$\Rightarrow$ $e(B,C)<b,f^*a>$ est calculable

$\Rightarrow$ $e(B,C)<I(B),f^*aO(B)>\ b$ est calculable

donc, $e(B,C)<I(B),f^*aO(B)>b$ est calculable, $\forall b : T \to B$ calculable

$\forall a : T \to A$ calculable

$\Rightarrow$ f^*a est calculable, $\forall a : T \to A$ calculable

$\Rightarrow$ f^* est calculable.

COROLLAIRE 2.15 (des deux théorèmes précédents)

Le morphisme $\xi(A) : (((A \supset A) \supset (A \supset A)) \wedge (A \supset A)) \wedge A \to A$ est calculable.

PREUVE $\xi(A)$ est par définition le morphisme suivant:

$$\mathcal{e}(A,A)<\mathcal{e}(A,A)<p(A,B\wedge C),\mathcal{e}(B,B)q(A,B\wedge C)>p(A\wedge(B\wedge C),B)q(A\wedge(B\wedge C),B)><<q(C\wedge B,A),$$
$$<q(C,B),p(C,B)>p(C\wedge B,A)>,q(C,B)p(C\wedge B,A)> \text{ où } B = A\supset A \text{ et } C = B\supset B.$$

$\xi(A)$ n'est donc formé qu'à l'aide de morphismes projection p et q, de morphismes évaluation $\mathcal{e}$, tous calculables par le théorème 2.13, et des opérateurs composition et produit qui préservent la calculabilité. Donc le morphisme final $\xi(A)$ est calculable.

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat suivant:

THEOREME 2.16 Tout morphisme de $\overline{\phi}$ est calculable.

PREUVE par induction sur la longueur des preuves appartenant à un morphisme, un morphisme étant une classe d'équivalence de $\mathcal{D}_A(\phi)$ par rapport à $\equiv$.

a) Définition inductive de la longueur d'une preuve de $\mathcal{D}_A(\phi)$.

Si α est une preuve de $\mathcal{D}_A(\phi)$, α est définie par une des conditions 1, 3, 4 ou 5 de la section IC de la preuve du théorème 2.5, la condition 2 étant inutile dans le cas de la catégorie vide ϕ.

1. Si α est une des preuves énumérées dans la condition 1, $\lambda(\alpha)$ + 1
3. Si α est de la forme $A\rho B\varphi C$, $\lambda(\alpha) = \lambda(A\rho B) + \lambda(B\varphi C)$
4. Si α est de la forme $A<A\rho B,A\varphi C>(B)\wedge(C)$, $\lambda(\alpha) = \lambda(A\rho B) + \lambda(A\varphi C) + 1$
5. Si α est de la forme $A((A)\wedge(B)\rho C)^*(B)\supset(C)$, alors $\lambda(\alpha) = \lambda((A)\wedge(B)\rho C) + 1$

b) Montrons que tout morphisme contenant une preuve de longueur 1 est calculable.

Ces morphismes sont $I(A)$, $O(A)$, Θ, $\hat{\sigma}$, $p(A,B)$, $q(A,B)$, $e(A,B)$ et $R(A)$. $\forall A,B\in|\overline{\phi}|$. Le théorème 2.13 nous montre que tous ces morphismes, sauf $R(A)$ sont calculables.

Soit A, un objet de $\overline{\phi}$. Montrons que $R(A) : N \to (A\supset A)\supset(A\supset A)$ est calculable, c'est-à-dire $R(A)\hat{\sigma}^n\Theta$ est calculable, $\forall n\in N$.

Preuve par induction sur la valeur de n.

i) Pour $n = 0$, $R(A)\Theta = [[q(T\wedge(A\supset A),A)]^*]^*$

Par le théorème 2.13, $q(T\wedge(A\supset A),A)$ est calculable et par le théorème 2.14, $[q(T\wedge(A\supset A),A)]^*$ et $[[q(T\wedge(A\supset A),A)]^*]^*$ sont calculables. Par conséquent, $R(A)\Theta$ est calculable.

ii) Supposons que $R(A)\hat{\sigma}^n\Theta$ est calculable et montrons qu'alors $R(A)\hat{\sigma}^{n+1}\Theta$ est calculable

$$R(A)\hat{\sigma}^{n+1}\Theta = R(A)\hat{\sigma}\hat{\sigma}^n\Theta = [[\xi(A)]^*]^*R(A)\hat{\sigma}^n\Theta$$

Par le corollaire 2.15, $\xi(A)$ est calculable et comme l'opérateur étoile préserve la calculabilité, $[[\xi(A)]^*]^*$ est calculable. Comme $R(A)\hat{\sigma}^n\Theta$ est calculable par hypothèse, $[[\xi(A)]^*]^*R(A)\hat{\sigma}^n\Theta$ est calculable, la composition préservant la calculabilité. D'où $R(A)\hat{\sigma}^{n+1}\Theta$ est calculable.

Par induction, nous avons $R(A)\hat{\sigma}^n\Theta$ est calculable, $\forall n\in N$, c'est-à-dire $R(A)$ est calculable, $\forall A\in|\overline{\phi}|$.

Donc, tous les morphismes contenant une preuve de longueur 1 sont calculables.

c) Supposons que tous les morphismes contenant une preuve de longueur inférieure ou égale à m sont calculables.

Soit $f : A \to B$, un morphisme contenant une preuve $A\rho B$ de longueur $m+1$, alors la preuve $A\rho B$ est de la forme i) $A\varphi C\omega B$ où $A\varphi C$ et $C\omega B$ sont des preuves

ou ii) $A<A\varphi C, A\omega D>C\wedge D$ où $B = C\wedge D$, $A\varphi C$ et $A\omega D$ sont des preuves

ou iii) $A(A\wedge C\varphi D)^*C\supset D$ où $B = C\supset D$ et $A\wedge C\varphi D$ est une preuve.

i) Si $A\rho B = A\varphi C\omega B$

$m+1 = \lambda(A\rho B) = \lambda(A\varphi C\omega B) = \lambda(A\varphi C) + \lambda(C\omega B)$

$\Rightarrow \lambda(A\varphi C) \leq m$ et $\lambda(C\omega B) \leq m$ car la longueur de toute preuve est plus grande ou égale à 1.

Par hypothèse, les morphismes $g = [A\varphi C] : A \to C$ et $h = [C\omega B] : C \to B$ sont calculables.

D'où $f = [A\rho B] = [C\omega B][A\varphi C] = hg$ est la composition de deux morphismes calculables, donc est calculable par le théorème 2.14.

ii) Si $B = C\wedge D$ et $A\rho C\wedge D = A<A\varphi C, A\omega D>C\wedge D$

$m+1 = \lambda(A\rho C\wedge D) = \lambda(A<A\varphi C,A\omega D>C\wedge D) = \lambda(A\varphi C) + \lambda(A\omega D) + 1$

$\Rightarrow \lambda(A\varphi C) \leq m$ et $\lambda(A\omega D) \leq m$.

Par hypothèse, les morphismes $g = [A\varphi C] : A \to C$ et $h = [A\omega D] : A \to D$ sont calculables et alors, $f = <g,h>$ est calculable, par définition.

iii) Si $B = C\supset D$ et $A\rho C\supset D = A(A\wedge C\varphi D)^*C\supset D$,

$m+1 = \lambda(A\rho C\supset D) = \lambda(A(A\wedge C\varphi D)^*C\supset D)$

$= \lambda(A\wedge C\varphi D) + 1.$

Alors $\lambda(A\wedge C\varphi D) = m$.

Par hypothèse, le morphisme $g = [A\wedge C\varphi D] : A\wedge C \to D$ est calculable et comme l'opérateur étoile préserve la calculabilité, d'après le théorème 2.14, $f = g^*$ est calculable.

Donc, le morphisme $f : A \to B$ contenant une preuve de longueur $m+1$ est calculable.

Par induction, nous avons donc démontré que tout morphisme contenant une preuve est calculable et comme tout morphisme de $\overline{\phi}$ est une classe d'équivalence de preuves, tout morphisme de $\overline{\phi}$ est calculable.

<u>COROLLAIRE 2.17</u> Tous les morphismes $T \to N$ de $\overline{\phi}$ sont de la forme $\hat{\sigma}^n\theta : T \to N$ et tous les morphismes $f : N^n \to N^m$, $m \in \mathcal{N}^+$, sont des représentations de fonctions récursives.

<u>PREUVE</u>

a) Soit $T \to N$ dans $\overline{\phi}$. $T \to N$ est calculable, donc est de la forme $\hat{\sigma}^n\theta : T \to N$.

b) Soit $f : N^n \to N$, un morphisme de $\overline{\phi}$. Alors, $\forall (a_1,\ldots,a_n) \in \mathcal{N}^n$,

$\exists m \in \mathcal{N}$ tel que $f<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta> = \sigma^m\theta$

car tout morphisme $T \to N$ de $\overline{\phi}$ est de la forme $\sigma^n\theta$.

Définissons une fonction g de $\mathcal{N}^n$ dans $\mathcal{N}$ par $g(a_1,\ldots,a_n) = m$, m étant l'entier introduit dans la phrase précédente et ceci pour tout élément $(a_1,\ldots,a_n)$ de $\mathcal{N}^n$. Alors,

$$f<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta> = \sigma^m\theta = \sigma^{g(a_1,\ldots,a_n)}\theta,\ \forall (a_1,\ldots,a_n) \in \mathcal{N}^n$$

$f : N^n \to N$ est donc une représentation de fonction.

c) Soit $f : N^n \to N^m$, $m \in \mathcal{N}^+$, un morphisme de $\overline{\phi}$.

Si $\Pi(m,1) = p(N,N)p(N^2,N)\ldots p(N^{m-1},N) : N^m \to N$

$\Pi(m,2) = q(N,N)p(N^2,N)\ldots p(N^{m-1},N) : N^m \to N$

$$\Pi(m,3) = \quad q(N^2,N)\ldots p(N^{m-1},N) : N^m \to N$$

...

$$\Pi(m,m) = \quad q(N^{m-1},N) : N^m \to N$$

Alors les morphismes $\Pi(m,1)f, \ldots, \Pi(m,m)f : N^m \to N$ représentent des fonctions par b).

Soit f_i, la fonction représentée par $\Pi(m,i)f$, $\forall i \in [1,m]$, alors, comme le produit de deux représentations de morphismes est la représentation du produit des deux morphismes, quand un tel produit existe,

$f = \langle \ldots \langle \Pi(m,1)f, \Pi(m,2)f \rangle, \ldots \rangle, \Pi(m,m)f \rangle$ est la représentation de $\langle \ldots \langle f_1, f_2 \rangle, \ldots \rangle, f_m \rangle : N^n \to N^m$.

$f : N^n \to N^m$, $m \in N^+$, est donc une représentation de fonction.

d) Comme toute fonction $N^n \to N^m$, $m \in N^+$, représentable dans $\overline{\Phi}$ est récursive, un morphisme $N^n \to N^m$ de $\overline{\Phi}$ ne peut représenter qu'une fonction récursive. D'où tout morphisme $N^n \to N^m$, $m \in N^+$, de $\overline{\Phi}$ est une représentation de fonction récursive.

2.7 FONCTION RÉCURSIVE NON REPRÉSENTABLE DANS $\overline{\Phi}$

Nous sommes maintenant en mesure de répondre à la question précédemment posée: La classe des fonctions représentables dans $\overline{\phi}$ est-elle égale à la classe des fonctions récursives ou est-elle strictement contenue dans cette dernière?

<u>THEOREME 2.18</u> Il existe une fonction récursive qui n'est pas représentable dans $\overline{\Phi}$.

<u>PREUVE</u> Nous allons construire, par la méthode de diagonalisation, une fonction récursive $K : N \to N$ qui ne peut être représentée dans $\overline{\Phi}$ que si $0 = 1$ dans Ens.

I - Considérons les fonctions et relations récursives suivantes:

1. $D(x) = \mu y[T(y) \wedge (\exists z)[z \leq x \wedge x = y*z]]$

   ($D(x)$ *est le domaine de* x *si* x *est un morphisme*)

2. $C(x) = \mu y[T(y) \wedge (\exists z)[z \leq x \wedge x = z*y]]$

   ($C(x)$ *est le codomaine de* x *si* x *est un morphisme*)

3. $M_{N,N}(x) = M(x) \wedge D(x) = R(5) \wedge C(x) = R(5)$

   ($M_{N,N}(x)$ *si* x *est un morphisme ayant* N *pour domaine et* N *pour codomaine*)

4. $M_{T,N}(x) = M(x) \wedge D(x) = R(3) \wedge C(x) = R(5)$

   ($M_{T,N}(x)$ *si* x *est un morphisme ayant* T *pour domaine et* N *pour codomaine*)

5. $L(0) = R(5)*R(29)*R(5)$

   $L(n+1) = \mu y[y \geq L(n) \wedge M_{N,N}(y)]$

   ($L(n)$ *est le* n*ième* *nombre* x *pour lequel nous avons* $M_{N,N}(x)$)

II - a) La fonction suivante est partiellement récursive.

$J(n,f) = \mu t[\mathrm{Nom}(\Omega_S(R(3)*Y(n)*f,t))]$.

b) $J(n,L(n))$ est définie, $\forall n \in N$.

Preuve. Soit $n \in N$. Par définition de $L(n)$ et de $Z(n)$, nous avons $M_{N,N}(L(n))$ et $M_{T,N}(Z(n))$, c'est-à-dire $L(n)$ est un nombre de Gödel d'une preuve $N\rho N$ ou du morphisme $[N\rho N]$ et $Z(n)$ est le nombre de Gödel d'une preuve $T\varphi N$ ou du morphisme $[T\varphi N]$. Alors $R(3)*Y(n)*L(n)$ est le nombre de Gödel de la preuve $T\varphi N\rho N$ ou du morphisme $[T\varphi N\rho N]$. Le corollaire 2.17 affirmant que ce morphisme est de la forme $\hat{\sigma}^m\theta$, il existe un élément m de N tel que $R(3)*Y(n)*L(n)$ et $Z(m)$ sont les nombres de Gödel de deux preuves équivalentes ou du même morphisme. Par définition de Ω_S (théorème 2.6), cela signifie que $Z(m)$ appartient à l'image de $\Omega_S(R(3)*Y(n)*L(n),\_) : N \to N$. Ainsi,

$$(\exists w)[\Omega_S(R(3)*Y(n)*L(n),w) = Z(m)].$$

Comme $\mathrm{Nom}(Z(n))$, $(\exists w)[\mathrm{Nom}(\Omega_S(R(3)*Y(n)*L(n),w))]$.

Par conséquent, $\mu t[\mathrm{Nom}(\Omega_S(R(3)*Y(n)*L(n),w))]$ est définie, $\forall n \in N$.

Mais cette expression est $J(n,L(n))$.

Donc, $J(n,L(n))$ est définie, $\forall n \in N$.

c) La fonction suivante étant partiellement récursive et définie partout est récursive

$$J(n,L(n)) = \mu t[\mathrm{Nom}(\Omega_S(R(3)*Y(n)*L(n),t))].$$

III - Les fonctions suivantes sont récursives

6. $Q(n) = Z^{-1}(\Omega_S(R(3)*Y(n)*L(n),\ J(n,L(n))))$

7. $K(n) = Q(n) + 1.$

Que représente la fonction $K : N \to N$? Nous pouvons faire la liste ordonnée des nombres x qui sont des nombres de Gödel de morphismes de la forme $[NfN]$, c'est-à-dire des nombres x pour lesquels nous avons $M_{N,N}(x)$. Si f_n est la fonction représentée par le morphisme décrit par le $n^{\text{ième}}$ nombre de la liste ci-dessus,

$$K(n) = f_n(n) + 1$$

IV - La fonction récursive $K : N \to N$ n'est pas représentable dans $\overline{\Phi}$.

En effet, si K est représentable par un morphisme [N⍺N] de $\overline{\Phi}$, le nombre de Gödel de N⍺N apparaît dans la liste ordonnée $\{x \mid M_{N,N}(x)\}$ décrite ci-dessus et y a un certain rang m.

Alors L(m) = nombre de Gödel de N⍺N,

$$\begin{aligned} \text{et } \varphi(m) &= Z^{-1}(\Omega_S(R(3)*Y(m)*L(m), J(m, L(m)))) \\ &= f_m(m) \\ K(m) &= f_m(m) + 1 \end{aligned}$$

Mais $f_m = K$, d'où $K(m) = K(m) + 1$

Comme K est récursive, $K(m) \in N$ et alors $0 = 1$. Ceci est faux dans Ens et par conséquent, K n'est pas représentable dans $\overline{\Phi}$.

<u>COROLLAIRE 2.19</u> La classe des fonctions représentables dans $\overline{\Phi}$ est strictement contenue dans la classe des fonctions récursives.

Dans notre définition de catégorie pré-récursive, nous avons omis l'unicité de l'axiome de Peano-Lawvere. Nous l'avons omis car l'unicité ne saurait se traduire au niveau des nombres de Gödel, par une relation récursive. Mais nous pouvons maintenant l'introduire en définissant une catégorie pré-récursive avec unicité comme étant une catégorie pré-récursive satisfaisant la condition suivante:

Pour tout morphisme $g : A \to A$ et tout morphisme $h : N \to A$ de la catégorie, si $h\sigma = gh$ alors $h = e(A,A)\langle h\theta O(N), e(A\supset A, A\supset A)\langle [gq(N,A)]^*, R(A)\rangle\rangle$.

Examinons quelques propriétés des catégories pré-récursives avec unicité.

1. Comme toute catégorie pré-récursive avec unicité est pré-récursive, toute fonction primitive récursive est représentable dans chaque catégorie pré-récursive avec unicité.

2. Si nous ajoutons une dix-neuvième condition à la relation d'équivalence $\equiv$ introduite dans la preuve du théorème 2.5, soit

   19. si $N\sigma N\alpha A \equiv N\alpha A\beta A$, alors

   $N\alpha A \equiv N\langle NOT\theta N\alpha A, N((N)\wedge(A)qA\beta A)^*B, NRC\rangle(B)\wedge(C)eB\rangle(A)\wedge(B)eA$

   où $B = (A)\supset(A)$ et $C = (B)\supset(B)$

   nous obtenons la construction de la catégorie pré-récursive avec unicité libre engendrée par une petite catégorie A, et ceci pour toute petite catégorie A.

3. Notons $\overline{\phi}_\mu$, la catégorie pré-récursive avec unicité libre engendrée par la catégorie vide ϕ. En adaptant la preuve du théorème 4.49 que nous verrons plus loin, nous pouvons démontrer que tout morphisme $f : N^n \to N^t$, $t\epsilon N^+$, de $\overline{\phi}_\mu$ représente une fonction récursive.

4. Tout comme pour $\overline{\phi}$, tout morphisme de $\overline{\phi}_\mu$ est calculable. Par conséquent, tout morphisme $a : T \to N^n$, $n\epsilon N^+$, de $\overline{\phi}_\mu$ est de la forme

   $\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots\rangle,\sigma^{a_n}\theta\rangle$, pour $(a_1,\ldots,a_n)\;\epsilon N^n$. Si l'on dit qu'un tel morphisme représente un produit de nombres naturels, tout morphisme $T \to N^n$, $n\epsilon N^+$, de $\overline{\phi}_\mu$ représente un produit de nombres naturels et tout produit de nombres naturels ou tout élément de N^n, $n\epsilon N^+$, est représenté dans $\overline{\phi}_\mu$.

Si $S(\overline{\phi})$ et $S(\overline{\phi}_\mu)$ représentent les sous-catégories pleines de $\overline{\phi}$ et de $\overline{\phi}_\mu$ respectivement où $|S(\overline{\phi})| = |S(\overline{\phi}_\mu)| = \{N^i | i \in \mathcal{N}\}$, ces deux catégories possèdent les propriétés suivantes:

a) Toute fonction primitive récursive et tout produit de nombres naturels sont représentables dans chacune de ces catégories.

b) Tout morphisme de chacune de ces catégories représente un produit de nombres naturels, une fonction récursive ou est un morphisme ayant pour codomaine l'objet terminal de la catégorie.

c) Il existe une fonction récursive mais non primitive récursive représentable dans chacune de ces catégories.

d) Il existe une fonction récursive qui n'est représentable dans aucune de ces catégories.

Une dernière remarque avant de terminer ce chapitre. Dans la définition de catégorie pré-récursive, nous pourrions remplacer la condition d'existence d'une famille de morphismes $\{R(A) : N \to (A \supset A) \supset (A \supset A) | A \in |A|\}$ par la condition suivante:

A est fermée sous le schéma suivant:

$$\psi \ \frac{b : T \to A \qquad f : A \to A}{\psi(b,f) : N \to A}$$

ψ vérifiant les équations suivantes pour tout morphisme $b : T \to A$ et pour tout morphisme $f : A \to A$ de A:

$$\psi(b,f) = \theta \quad \text{et} \quad \psi(b,f)\sigma = f\psi(b,f).$$

Cette structure engendrerait aussi une catégorie $S(\phi)$ partageant les propriétés de $S(\overline{\phi})$ et $S(\overline{\phi}_\mu)$ énumérées ci-haut.

CHAPITRE 3

CATÉGORIES RÉCURSIVES

Nous avons vu que dans $\overline{\phi}$, la catégorie pré-récursive libre engendrée par la catégorie vide ϕ, la classe des fonctions représentables dans $\overline{\phi}$ contient strictement la classe des fonctions primitives récursives et est strictement contenue dans celle des fonctions récursives.

Y aurait-il moyen de trouver une structure que nous appellerions "catégorie récursive" telle que dans la catégorie récursive libre engendrée par ϕ, la classe des fonctions représentables coincide avec la classe des fonctions récursives?

Nous verrons qu'au moins deux structures possèdent cette propriété et même plus. Ils présentent une solution au cas des fonctions partiellement récursives.

3.1 *MORPHISMES DE CATÉGORIES PRÉ-RÉCURSIVES*

Avant de proposer une solution au problème soulevé, nous allons étudier un certain nombre de morphismes qui se retrouvent dans toute catégorie pré-récursive. Ces morphismes nous seront utiles pour formuler de nouvelles structures.

Si A est une catégorie pré-récursive, A possède les morphismes suivants:

a) $\oplus : N^2 \rightarrow N$

$= e(N,N)<p(N,N),e(M,M)<p(M,(M\supset M)\wedge((M\supset M)\supset(M\supset M)),e(M\supset M,M\supset M)$

$q(M,(M\supset M)\wedge((M\supset M)\supset(M\supset M))><[q(T,N)]^*O(N),<[[\sigma e(N,N)<q(N\supset N,N),$

$p(N\supset N,N)>]^*q(T,N\supset N)]^*O(N),R(M)>>q(N,N)>$ où $M = N\supset N$

$= e(N,N)<p(N,N),e(M,M)<[q(T,N)]^*O(N),e(M\supset M,M\supset M)<[[\sigma e(N,N)$

$<q(N\supset N,N),p(N\supset N,N)>]^*q(T,N\supset N)]^*O(N),R(M)>>q(N,N)>$ où $M = N\supset N$.

$\oplus$ satisfait les équations suivantes:

$\oplus<I(N),\theta O(N)> = e(N,N)<I(N),[q(T,N)]^*O(N)\theta O(N)>$

$= q(T,N)<O(N),I(N)>$

$= I(N)$

$\oplus<p(N,N),\sigma q(N,N)>$

$= \sigma e(N,N)<q(N\supset N,N),p(N\supset N,N)><e(M,M)<[q(T,N)]^*O(N),e(M\supset M,M\supset M)<[[\sigma e(N,N)$

$<q(N\supset N,N),p(N\supset N,N)>]^*q(T,N\supset N)]^*O(N),R(M)>>q(N,N),p(N,N)>$

$= \sigma e(N,N)<p(N,N),e(M,M)<[q(T,N)]^*O(N),e(M\supset M,M\supset M)<[[\sigma e(N,N)<q(N\supset N,N),$

$p(N\supset N,N)>]^*q(T,N\supset N)]^*,R(M)>>q(N,N)>$

$= \sigma\oplus$

Donc $\oplus$ représente la fonction addition.

b) $\otimes : N^2 \rightarrow N^2$

$= e(N,N^2)<p(N,N),e(S,S)<p(S,(S\supset S)\wedge((S\supset S)\supset(S\supset S)),e(S\supset S,S\supset S)$

$q(S,(S\supset S)\wedge((S\supset S)\supset(S\supset S))><[<q(T,N),\theta p(T,N)>]^*O(N),<[[<p(N,N),\oplus>$

$e(N,N^2)<q(N\supset N^2,N),p(N\supset N^2,N)>]^*q(T,N\supset N^2)]^*O(N),R(S)>>q(N,N)>$

où $S = N\supset N^2$

$$= e(N,N^2)<p(N,N),e(S,S)<[<q(T,N),\theta p(T,N)>]^*0(N),e(S\supset S,S\supset S)<[[<p(N,N),\oplus> e(N,N^2)<q(N\supset N^2,N),p(N\supset N^2,N)>]^*q(T,N\supset N^2)]^*0(N),R(S)>>q(N,N)> \text{ où } S = N\supset N^2$$

$\otimes$ satisfait les équations suivantes:

$$\otimes<I(N),\theta 0(N)>$$
$$= e(N,N^2)<I(N),[<q(T,N),\theta p(T,N)>]^*0(N)\theta 0(N)>$$
$$= <q(T,N),\theta p(T,N)><0(N),I(N)>$$
$$= <I(N),\theta 0(N)>$$

$$\otimes<p(N,N),\sigma q(N,N)>$$
$$= <p(N,N),\oplus>e(N,N^2)<q(N\supset N^2,N),p(N\supset N^2,N)><e(S,S)<[q(T,N),\theta p(T,N)>]^*0(N), e(S\supset S,S\supset S)<[[<p(N,N),\oplus>e(N,N^2)<q(N\supset N^2,N),p(N\supset N^2,N)>]^*q(T,N\supset N^2)]^*0(N), R(S)>>q(N,N),p(N,N)>$$

$$= <p(N,N),\oplus>e(N,N^2)<p(N,N),e(S,S)<[<q(T,N),\theta p(T,N)>]^*0(N),e(S\supset S,S\supset S) <[[<p(N,N),\oplus>e(N,N^2)<q(N\supset N^2,N),p(N\supset N^2,N)>]^*q(T,N\supset N^2)]^*0(N),R(S)>> q(N,N)>$$

$$= <p(N,N),\oplus>\otimes$$

Alors $p(N,N)\otimes<I(N),\theta 0(N)> = p(N,N)<I(N),\theta 0(N)> = I(N)$

$p(N,N)\otimes<p(N,N),\sigma q(N,N)> = p(N,N)<p(N,N),\oplus>\otimes = p(N,N)\otimes$

$q(N,N)\otimes<I(N),\theta 0(N)> = q(N,N)<I(N),\theta 0(N)> = \theta 0(N)$

$q(N,N)\otimes<p(N,N),\sigma q(N,N)> = q(N,N)<p(N,N),\oplus>\otimes = \oplus\otimes$

$= \oplus<p(N,N)\otimes,q(N,N)\otimes>$

Donc $p(N,N)\otimes$ représente $\pi_{2,1}$ et $q(N,N)\otimes$ représente la multiplication.

c) Considérons

$\delta : N\supset N \to N^3$

$= <<\theta O(N\supset N), e(N,N)<\theta O(N\supset N), I(N\supset N)>>, \sigma\theta O(N\supset N)>$

$\varepsilon : (N\supset N)\wedge N^3 \to N^3$

$= <<\sigma p(N,N)p(N^2,N)q(N\supset N,N^3), e(N,N)<\sigma p(N,N)p(N^2,N)q(N\supset N,N^3), p(N\supset N,N^3)>>,$

$q(N,N)\otimes<q(N,N)p(N^2,N), q(N^2,N)>q(N\supset N,N^3)>$

$\gamma : (N\supset N)\wedge N \to N^3$

$= e(N^3,N^3)<\delta p(N\supset N,N), e(V,V)<\varepsilon^* p(N\supset N,N), R(N^3)q(N\supset N,N)>>$ où $V = N^3\supset N^3$

$\gamma<I(N\supset N), \theta O(N\supset N)>$

$= e(N^3,N^3)<\delta p(N\supset N,N), e(V,V)<\varepsilon^* p(N\supset N,N), R(N^3)q(N\supset N,N)>><I(N\supset N), \theta O(N\supset N)>$

$= e(N^3,N^3)<\delta, e(V,V)<\varepsilon^*, R(N^3)\theta O(N\supset N)>>$

$= e(N^3,N^3)<\delta, e(V,V)<\varepsilon^*, [[q(T\wedge V,N^3)]^*]^* O(N\supset N)>>$

$= e(N^3,N^3)<\delta, [q(T\wedge V,N^3)]^*<O(N\supset N), \varepsilon^*>>$

$= q(T\wedge V,N^3)<<O(N\supset N), \varepsilon^*>, \delta>$

$= \delta$

$\gamma<p(N\supset N,N), \sigma q(N\supset N,N)>$

$= e(N^3,N^3)<\delta p(N\supset N,N), e(V,V)<\varepsilon^* p(N\supset N,N), R(N^3)q(N\supset N,N)>><p(N\supset N,N),$

$\sigma q(N\supset N,N)>$

$= e(N^3,N^3)<\delta p(N\supset N,N), e(V,V)<\varepsilon^* p(N\supset N,N), R(N^3)\sigma q(N\supset N,N)>>$

$= e(N^3,N^3)<\delta p(N\supset N,N), e(V,V)<\varepsilon^* p(N\supset N,N), [[\xi(N^3)]^*]^* R(N^3)q(N\supset N,N)>>$

$= e(N^3,N^3)<\delta p(N\supset N,N), [\xi(N^3)]^*<R(N^3)q(N\supset N,N), \varepsilon^* p(N\supset N,N)>>$

$$= \xi(N^3)\langle\langle R(N^3)q(N\supset N,N),\varepsilon^*p(N\supset N,N)\rangle,\delta p(N\supset N,N)\rangle$$

$$= \ldots$$

$$= e(N^3,N^3)\langle e(N^3,N^3)\langle\delta p(N\supset N,N),e(V,V)\langle\varepsilon^*p(N\supset N,N),R(N^3)q(N\supset N,N)\rangle\rangle,$$
$$\varepsilon^*p(N\supset N,N)\rangle$$

$$= \varepsilon\langle p(N\supset N,N),e(N^3,N^3)\langle\delta p(N\supset N,N),e(V,V)\langle\varepsilon^*p(N\supset N,N),R(N^3)q(N\supset N,N)\rangle\rangle\rangle$$

$$= \varepsilon\langle p(N\supset N,N),\gamma\rangle$$

$$= \langle\langle\sigma p(N,N)p(N^2,N)q(N\supset N,N^3),e(N,N)\langle\sigma p(N,N)p(N^2,N)q(N\supset N,N^3),p(N\supset N,N^3)\rangle\rangle,$$
$$q(N,N)\otimes\langle q(N,N)p(N^2,N),q(N^2,N)\rangle q(N\supset N,N^3)\rangle\langle p(N\supset N,N),\gamma\rangle$$

$$= \langle\langle\sigma p(N,N)p(N^2,N)\gamma,e(N,N)\langle\sigma p(N,N)p(N^2,N)\gamma,p(N\supset N,N)\rangle\rangle,q(N,N)\otimes$$
$$\langle q(N,N)p(N^2,N)\gamma,q(N^2,N)\gamma\rangle$$

Si $\gamma_1 = p(N,N)p(N^2,N)\gamma$, $\gamma_2 = q(N,N)p(N^2,N)\gamma$ et $\gamma_3 = q(N^2,N)\gamma$,

alors $\gamma_1\langle I(N\supset N),\theta O(N\supset N)\rangle = \theta O(N\supset N)$

$\gamma_1\langle p(N\supset N,N),\sigma q(N\supset N,N)\rangle = \sigma\gamma_1$

$\gamma_2\langle I(N\supset N),\theta O(N\supset N)\rangle = e(N,N)\langle\theta O(N,N),I(N\supset N)\rangle$

$\gamma_2\langle p(N\supset N,N),\sigma q(N\supset N,N)\rangle = e(N,N)\langle\sigma\gamma_1,p(N\supset N,N)\rangle$

$\gamma_3\langle I(N\supset N),\theta O(N\supset N)\rangle = \sigma\theta O(N\supset N)$

$\gamma_3\langle p(N\supset N,N),\sigma q(N\supset N,N)\rangle = q(N,N)\otimes\langle\gamma_2,\gamma_3\rangle$

Soit $\tilde{\gamma} = \gamma_3{}^* : N\supset N \to N\supset N$.

Alors, si $g : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ est une fonction représentée par $\tilde{g} : N \to N$ dans A, $e(N,N)\langle I(N),\tilde{\gamma}[\tilde{g}q(T,N)]^*O(N)\rangle : N \to N$ représente la fonction $\mathcal{P}(g) : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, définie comme suit:

$$P(g)0 = 1,\ P(g)(n+1) = g(n) \times P(g)(n) = \prod_{i=0}^{n} g(i),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

d) $\overline{sg} : N \to N$

$= e(N,N)<\sigma\theta 0(N), e(N\supset N, N\supset N)<[\theta 0(T\wedge N)]^* 0(N), R(N)>>$

$\overline{sg}\theta = e(N,N)<\sigma\theta, e(N\supset N, N\supset N)<[\theta 0(T\wedge N)]^*, R(N)\theta>>$

$= e(N,N)<\sigma\theta, e(N\supset N, N\supset N)<[\theta 0(T\wedge N)]^*, [q(T\wedge(N\supset N), N)]^*]^*>>$

$= e(N,N)<\sigma\theta, [q(T\wedge(N\supset N), N)]^*<I(T), [\theta 0(T\wedge N)]^*>>$

$= q(T\wedge(N\supset N), N)<<I(T), [\theta 0(T\wedge N)]^*>, \sigma\theta>$

$= \sigma\theta$

$\overline{sg}\sigma = e(N,N)<\sigma\theta 0(N), e(N\supset N, N\supset N)<[\theta 0(T\wedge N)]^* 0(N), R(N)>>$

$= e(N,N)<\sigma\theta 0(N), e(N\supset N, N\supset N)<[\theta 0(T\wedge N)]^* 0(N), [[\xi(N)]^*]^* R(N)>>$

$= e(N,N)<\sigma\theta 0(N), [\xi(N)]^*<R(N), [\theta 0(T\wedge N)]^* 0(N)>>$

$= \xi(N)<<R(N), [\theta 0(T\wedge N)]^* 0(N)>, \sigma\theta 0(N)>$

$= \ldots$

$= e(N,N)<e(N,N)<\sigma\theta 0(N), e(N\supset N, N\supset N)<[\theta 0(T\wedge N)]^* 0(N), R(N)>>, [\theta 0(T\wedge N)]^* 0(N)>$

$= \theta 0(T\wedge N)<0(N), e(N,N)<\sigma\theta 0(N), e(N\supset N, N\supset N)<[\theta 0(T\wedge N)]^* 0(N), R(N)>>>$

$= \theta 0(N)$

Donc, $\overline{sg}$ représente la fonction $\overline{\mathit{sg}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui envoie 0 sur 1 et tout élément différent de zéro sur zéro.

e) $sg : N \to N$

$= \overline{sg}\ \overline{sg}$

$sg\theta = \overline{sg}\ \overline{sg}\theta = \overline{sg}\sigma\theta = \theta 0(N)\theta = \theta$

$sg\sigma = \overline{sg}\ \overline{sg}\sigma = \overline{sg}\theta 0(N) = \sigma\theta 0(N)$

Donc, sg représente la fonction $\mathit{sg} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui envoie 0 sur 0 et tout élément différent de zéro sur 1.

f) $\tilde{A} : N \to N^2$

$= e(N^2,N^2)<<\theta,\theta>O(N),e(N^2\supset N^2,N^2\supset N^2)<[<\sigma p(N,N),p(N,N)>q(T,N^2)]^*O(N),$
$R(N^2)>>$

$\tilde{A}\theta = e(N^2,N^2)<<\theta,\theta>,e(N^2\supset N^2,N^2\supset N^2)<[<\sigma p(N,N),p(N,N)>q(T,N^2)]^*,R(N^2)\theta>$

$= e(N^2,N^2)<<\theta,\theta>,e(N^2\supset N^2,N^2\supset N^2)<[<\sigma p(N,N),p(N,N)>q(T,N^2)]^*,$
$[[q(T\wedge(N^2\supset N^2),N^2)]^*]^*>>$

$= e(N^2,N^2)<<\theta,\theta>,[q(T\wedge(N^2\supset N^2),N^2)]^*I(T),[<\sigma p(N,N),p(N,N)>q(T,N^2)]^*>>$

$= q(T\wedge(N^2\supset N^2),N^2)<<I(T),[<\sigma p(N,N),p(N,N)>q(T,N^2)]^*>,<\theta,\theta>>$

$= <\theta,\theta>$

$\tilde{A}\sigma = e(N^2,N^2)<<\theta,\theta>O(N),e(N^2\supset N^2,N^2\supset N^2)<[<\sigma p(N,N),p(N,N)>q(T,N^2)]^*O(N),$
$R(N^2)\sigma>>$

$= e(N^2,N^2)<<\theta,\theta>O(N),e(N^2\supset N^2,N^2\supset N^2)<[<\sigma p(N,N),p(N,N)>q(T,N^2)]^*O(N),$
$[[\xi(N^2)]^*]^*R(N^2)>>$

$= e(N^2,N^2)<<\theta,\theta>O(N),[\xi(N^2)]^*<R(N^2),[<\sigma p(N,N),p(N,N)>q(T,N^2)]^*O(N)>>$

$= \xi(N^2)<<R(N^2),[<\sigma p(N,N),p(N,N)>q(T,N^2)]^*>O(N),<\theta,\theta>O(N)>$

$= \ldots$

$= e(N^2,N^2)<e(N^2,N^2)<<\theta,\theta>O(N),e(N^2\supset N^2,N^2\supset N^2)<[<\sigma p(N,N),p(N,N)>q(T,N^2)]^*$
$O(N),R(N^2)>>,[<\sigma p(N,N),p(N,N)>q(T,N^2)]^*O(N)>$

$= e(N^2,N^2)<\tilde{A},[<\sigma p(N,N),p(N,N)>q(T,N^2)]^*O(N)>$

$= <\sigma p(N,N),p(N,N)>q(T,N^2)<O(N),\tilde{A}>$

$= <\sigma p(N,N),p(N,N)>\tilde{A}$

Alors, $p(N,N)\tilde{A}\theta = p(N,N)<\theta,\theta> = \theta$

$p(N,N)\tilde{A}\sigma = p(N,N)<\sigma p(N,N),p(N,N)>\tilde{A} = \sigma p(N,N)\tilde{A}$

$q(N,N)\tilde{A}\theta = q(N,N)<\theta,\theta> = \theta$

$q(N,N)\tilde{A}\sigma = q(N,N)<\sigma p(N,N),p(N,N)>\tilde{A} = p(N,N)\tilde{A}$

Donc, $p(N,N)\tilde{\tilde{A}}$ représente $I(N)$ et $q(N,N)\tilde{\tilde{A}}$ représente la fonction antécédent A. Par conséquent, notons A, le morphisme $q(N,N)\tilde{\tilde{A}}$.

<u>LEMME 3.1</u> Le morphisme $A\sigma : N \to N$ représente l'identité $I(N) : N \to N$.

<u>PREUVE</u> $A\sigma = q(N,N)\tilde{\tilde{A}}\sigma = q(N,N)\langle\sigma p(N,N),p(N,N)\rangle\tilde{\tilde{A}} = p(N,N)\tilde{\tilde{A}}$.

Montrons maintenant par induction que $A\sigma\sigma^n\theta = \sigma^n\theta$, $\forall n\in N$.

a) $A\sigma\sigma^0\theta = A\sigma\theta = p(N,N)\tilde{\tilde{A}}\theta = p(N,N)\langle\theta,\theta\rangle = \theta$.

b) Si $A\sigma\sigma^n\theta = \sigma^n\theta$, alors

$$\begin{aligned} A\sigma\sigma^{n+1}\theta &= p(N,N)\tilde{\tilde{A}}\sigma^{n+1}\theta = p(N,N)\tilde{\tilde{A}}\sigma\sigma^n\theta \\ &= p(N,N)\langle\sigma p(N,N),p(N,N)\rangle\tilde{\tilde{A}}\sigma^n\theta = \sigma p(N,N)\tilde{\tilde{A}}\sigma^n\theta = \\ &= \sigma A\sigma\sigma^n\theta = \sigma\sigma^n\theta = \sigma^{n+1}\theta. \end{aligned}$$

Donc, par induction, $A\sigma\sigma^n\theta = \sigma^n\theta = \sigma^{I(n)}\theta$, $\forall\, n\in N$ et $A\sigma$ représente $I(N)$.

3.2 <u>CATÉGORIES RÉCURSIVES</u>

<u>DEFINITION 3.2</u> Une catégorie A est dite récursive si

a) elle est pré-récursive,

b) elle possède un morphisme $\rho : N\supset N \to N$ tel que

i) $q(N,N)\otimes\langle e(N,N)\langle A\rho,I(N\supset N)\rangle,sg\ \rho\rangle = \theta O(N\supset N)$

ii) $\overline{sg}e(N,N)\langle A\rho,\tilde{\gamma}\rangle = \theta O(N\supset N)$

iii) $q(N,N)\otimes\langle\overline{sge}(N,N), sg\rho q(N,N\supset N)\rangle = \theta O(N\wedge(N\supset N))$

iv) Pour tout morphisme $\alpha : T \to N\supset N$ et tout morphisme $\sigma^n\theta : T \to N$ de A, si $e(N,N)\langle\sigma^n\theta,\alpha\rangle = \theta$ et $\overline{sge}(N,N)\langle\sigma^n\theta,\tilde{\gamma}\alpha\rangle = \theta$, alors $\rho\alpha = \sigma\sigma^n\theta = \sigma^{n+1}\theta$.

<u>REMARQUE</u> Regardons ce que signifie le morphisme $\rho : N\supset N \to N$.

A. Pour tout morphisme $g : T \to N\supset N$ de A, les conditions i), ii) et iii) deviennent:

i) $q(N,N)\otimes\langle e(N,N)\langle A\rho g,g\rangle, sg\,\rho g\rangle = \theta$

ii) $\overline{sge}(N,N)\langle A\rho g,\tilde{\gamma}g\rangle = \theta$

iii) $q(N,N)\otimes\langle\overline{sge}(N,N)\langle I(N),gO(N)\rangle,\overline{sg}\ \rho gO(N)\rangle = \theta O(N)$

a) Si $\rho g = \theta$, les conditions i) et ii) ne nous apprennent rien car le côté gauche des équations devient alors θ. Mais la condition iii) se transforme car

$$\begin{aligned}
&q(N,N)\otimes\langle\overline{sge}(N,N)\langle I(N),gO(N)\rangle,\overline{sg}\ \rho gO(N)\rangle\\
&= q(N,N)\otimes\langle\overline{sge}(N,N)\langle I(N),gO(N)\rangle,\overline{sg}\ \theta O(N)\rangle\\
&= q(N,N)\otimes\langle\overline{sge}(N,N)\langle I(N),gO(N)\rangle,\sigma\theta O(N)\rangle\\
&= q(N,N)\otimes\langle p(N,N),\sigma q(N,N)\rangle\langle\overline{sge}(N,N)\langle I(N),gO(N)\rangle,\theta O(N)\rangle\\
&= \theta\otimes\langle\overline{sge}(N,N)\langle I(N),gO(N)\rangle,\theta O(N)\rangle\\
&= \theta\otimes\langle I(N),\theta O(N)\rangle\overline{sge}(N,N)\langle I(N),gO(N)\rangle\\
&= \theta\langle I(N),\theta O(N)\rangle\overline{sge}(N,N)\langle I(N),gO(N)\rangle\\
&= \overline{sge}(N,N)\langle I(N),gO(N)\rangle.
\end{aligned}$$

Ainsi, iii) devient $sge(N,N)\langle I(N),gO(N)\rangle = \theta O(N)$

b) Si ρg est de la forme σb, pour un morphisme $b : T \to N$ de A, la condition iii) devient $\theta O(N) = \theta O(N)$. Par contre,

$q(N,N)\otimes\langle e(N,N)\langle A\rho g,g\rangle, sg\ \rho g\rangle$

$= q(N,N)\otimes\langle e(N,N)\langle A\rho g,g\rangle, sg\ \sigma b\rangle$

$= q(N,N)\otimes\langle e(N,N)\langle A\rho g,g\rangle,\sigma\theta\rangle$

$= q(N,N)\otimes\langle p(N,N),\sigma q(N,N)\rangle\langle e(N,N)\langle A\rho g,g\rangle,\theta\rangle$

$= q(N,N)\langle p(N,N),\oplus\rangle\otimes\langle e(N,N)\langle A\rho g,g\rangle,\theta\rangle$

$= \oplus\otimes\langle e(N,N)\langle A\rho g,g\rangle,\theta\rangle$

$= \oplus\otimes\langle I(N),\theta O(N)\rangle e(N,N)\langle A\rho g,g\rangle$

$= \oplus\langle I(N),\theta O(N)\rangle e(N,N)\langle A\rho g,g\rangle$

$= e(N,N)\langle A\rho g,g\rangle$

i) devient $e(N,N)\langle A\rho g,g\rangle = \theta$

et ii) est $\overline{sg}e(N,N)\langle A\rho g,\tilde{\gamma}g\rangle = \theta$.

B. Pour tout morphisme $f : N \to N$ de A,

a) Si $[fq(T,N)]^* = \theta$, alors $\overline{sg}f = \theta O(N)$

b) Si $\rho[fq(T,N)]^*$ est de la forme σb pour un morphisme $b : T \to N$ de A,

$fA\sigma b = fA\rho[fq(T,N)]^* = fq(T,N)\langle I(T),A\rho[fq(T,N)]^*\rangle$

$= e(N,N)\langle A\rho[fq(T,N)]^*,[fq(T,N)]^*\rangle = \theta$ et

$\overline{sg}e(N,N)\langle I(N),\tilde{\gamma}[fq(T,N)]^*O(N)\rangle A\rho[fq(T,N)]^*$

$= \overline{sg}e(N,N)\langle A\rho[fq(T,N)]^*,\tilde{\gamma}[fq(T,N)]^* = \theta$.

C. Pour toute fonction $h : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ représentée par le morphisme $\tilde{h} : N \to N$ de A,

a) Si $\rho[\tilde{h}q(T,N)]^* = \theta$, alors $\overline{sg}h = 0O(\mathcal{N}) = \kappa$, la fonction constante zéro.

b) Si $\rho[\tilde{h}q(T,N)]^*$ est de la forme $\sigma\sigma^n\theta$, alors

$h(n) = hA(n+1) = 0$ et $\overline{sg}P(h)(n) = \overline{sg}P(h)A(n+1) = 0$

car $P(h)$ est représentée par $e(N,N)\langle I(N),\tilde{\gamma}[\tilde{h}q(T,N)]^*O(N)\rangle$.

Mais $h(n) = 0$ et $\overline{\delta g}P(h)(n) = 0$

$\Leftrightarrow \quad h(n) = 0$ et $P(h)(n) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{si } n=0,\ h(n) = 0 \text{ et} \\ \text{si } n\neq 0,\ h(n) = 0 \text{ et } \prod_{i=0}^{n-1} h(i) \neq 0, \text{ donc } h(i) \neq 0,\ \forall i \in [1,n-1]. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad n = \mu y[h(y)=0]$

Donc, si $\rho[\tilde{h}q(T,N)]^*$ est de la forme $\sigma\sigma^n\theta$, alors $\mu y[h(y)=0]$ est défini et $n = \mu y[h(y)=0]$.

c) Si $\mu y[h(y)=0]$ est défini, alors $h(\mu y[h(y)=0]) = 0$ et $P(h)(\mu y[h(y)=0]) \neq 0$, c'est-à-dire $\overline{\delta g}P(h)(\mu y[h(y)=0]) = 0$.

Alors $e(N,N)\langle\sigma^{\mu y[h(y)=0]}\theta, [\tilde{h}q(T,N)]^*\rangle = \sigma^{h(\mu y[h(y)=0])}\theta = \sigma^0\theta = \theta$,

$\overline{sg}e(N,N)\langle\sigma^{\mu y[h(y)=0]}\theta, \tilde{\gamma}[\tilde{h}q(T,N)]^*\rangle$

$= \overline{sg}e(N,N)\langle I(N), \tilde{\gamma}[\tilde{h}q(T,N)]^*O(N)\rangle\sigma^{\mu y[h(y)=0]}\theta$

$= \sigma^{\overline{\delta g}P(h)(\mu y[h(y)=0])}\theta = \theta$

et la condition iv) nous dit que dans ces conditions,

$\rho[\tilde{h}q(T,N)]^* = \sigma\sigma^{\mu y[h(y)=0]}\theta$.

En résumé,

si $\mu y[h(y)=0]$ est défini, $\rho[\tilde{h}q(T,N)]^* = \sigma\sigma^{\mu y[h(y)=0]}\theta$;

si $\mu y[h(y)=0]$ n'est pas défini, $\rho[\tilde{h}q(T,N)]^*$ ne peut être de la forme $\sigma\sigma^n\theta$, $\forall n \in N$;

si $\rho[\tilde{h}q(T,N)]^* = \theta$, alors $\overline{\delta g}h = \kappa$, la fonction constante zéro.

Donc ρ ne représente pas le "minimum" mais le successeur du minimum. Ainsi, si la fonction $\mu h : N \to N$ est définie pour la fonction $h : N^2 \to N$, représentée par le morphisme $\tilde{h} : N^2 \to N$, $\rho[\tilde{h}q(T,N^2)]^*$ représente $\delta \circ \mu h$, où δ est la fonction successeur.

Dans cette définition, nous avons précisé le rôle du morphisme $\rho : N \supset N \to N$ par les conditions i), ii) et iii). Mais nous n'avons besoin que de la condition d'unicité iv) pour obtenir les résultats suivants: "Toute fonction récursive est représentable dans une catégorie récursive. Toute fonction $f : \mathcal{N}^n \to \mathcal{N}^k$, $k \in \mathcal{N}^+$, $n \in \mathcal{N}^+$ représentable dans $\mathcal{L}_\rho(\phi)$, la catégorie récursive libre engendrée par ϕ, est récursive." Par conséquent, la définition suivante serait suffisante.

<u>DEFINITION 3.3</u> Une catégorie est dite récursive (μ) si

a) elle est pré-récursive,

b) elle possède un morphisme $\mu : N \supset N \to N$ satisfaisant la propriété suivante:

Pour tout morphisme $\alpha : T \to N \supset N$ et tout morphisme $\sigma^n\theta : T \to N$ de A, si $e(N,N)\langle\sigma^n\theta,\alpha\rangle = \theta$ et $\overline{sge}(N,N)\langle\sigma^n\theta,\tilde{\gamma}\alpha\rangle = \theta$, alors $\mu\alpha = \sigma^n\theta$.

<u>REMARQUE</u> Dans le cas d'une catégorie récursive (μ), $\mu g = \mu y[e(N,N)\langle I(N),gO(N)\rangle\sigma^y\theta=\theta]$, pour tout morphisme $g : T \to N \supset N$ pour lequel $\mu y[e(N,N)\langle I(N),gO(N)\rangle\sigma^y\theta=\theta]$ existe. Pour les autres morphismes $g : T \to N \supset N$, μg peut être défini de n'importe quelle façon.

<u>THEOREME 3.4</u> Toute catégorie récursive est récursive (μ).

<u>PREUVE</u> Soit A, une catégorie récursive. Montrons que le morphisme $A\rho : N \supset N \to N$ munit A d'une structure de catégorie récursive (μ). Soient $\alpha : T \to N \supset N$ et $\sigma^n\theta : T \to N$, deux morphismes de A tels que $e(N,N)\langle\sigma^n\theta,\alpha\rangle = \theta$ et $\overline{sge}(N,N)\langle\sigma^n\theta,\tilde{\gamma}\alpha\rangle = \theta$. Par l'unicité dans une catégorie récursive, $\rho\alpha = \sigma\sigma^n\theta$. Et $A\rho\alpha = A\sigma\sigma^n\theta = \sigma^n\theta$, par le lemme 3.1. Donc, $A\rho$ satisfait la

condition de la définition 3.3 et A est primitive récursive (μ).

DEFINITION 3.5 a) Soient A et B, deux catégories récursives. Un foncteur $F : A \to B$ est dit récursif s'il est pré-récursif et si $F(\rho_A) = \rho_B$.

b) Dans le cas de deux catégories récursives (μ) A et B, un foncteur $F : A \to B$ sera récursif (μ) s'il est pré-récursif et si $F(\mu_A) = \mu_B$.

DEFINITION 3.6 Soit A, une catégorie récursive ou récursive (μ). Une fonction partielle $f : N^k \to N^n$, $k \in N^+$, $n \in N^+$, est représentable dans A s'il existe un morphisme $\tilde{f} : N^k \to N^n$ tel que pour tout $(a_1,\ldots,a_k) \in N^k$ pour lequel $f(a_1,\ldots,a_k)$ est défini,

$$\tilde{f}<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_k}\theta> =$$

$$<\ldots<\sigma^{\pi_{n,1}f(a_1,\ldots,a_k)}\theta,\sigma^{\pi_{n,2}f(a_1,\ldots,a_k)}\theta>,\ldots,\sigma^{\pi_{n,n}f(a_1,\ldots,a_k)}\theta>$$

THEOREME 3.7 Soit A, une catégorie récursive (μ). Toute fonction récursive est représentable dans A.

PREUVE par induction sur la longueur des descriptions associées aux fonctions récursives.

Nous reprenons la preuve du théorème 2.4: "Toute fonction primitive récursive est représentable dans chaque catégorie pré-récursive" dans laquelle nous remplaçons "fonction primitive récursive" par "fonction récursive". Nous n'avons qu'un seul cas à ajouter à cette preuve. C'est sous l'hypothèse B : "Toute fonction récursive ayant une description de longueur inférieure ou égale à n est représentable dans A."

iv) f admet une description de la forme $\mu\overline{g}$ et $f = \mu g$ où g est la fonction décrite par $\overline{g}$: $N^{n+1} \to N$.

Les égalités $\lambda(f) = \lambda(\mu\overline{g}) = \lambda(\overline{g}) + 1$ nous montrent que $\lambda(\overline{g}) = n$. Par hypothèse, g est donc représentable dans A par un morphisme $\tilde{g}$ car g admet une description de longueur n. Nous savons aussi que μg est définie. Pour tout élément $(a_1,\ldots,a_n)$ de N^n, il existe donc un élément y de N tel que $g(a_1,\ldots,a_n,y) = 0$. Montrons que f est représentée par $\mu[\tilde{g}]^* : N^n \to N \supset N \to N$.

I - Soit $(a_1,\ldots,a_n) \in N^n$ et soit $b = \mu y(g(a_1,\ldots,a_n,y) = 0)$. Essayons de caractériser b.

$$b = \mu y(g(a_1,\ldots,a_n,y) = 0) = \mu y(g(a_1,\ldots,a_n,\_)(y) = 0)$$

$$\Leftrightarrow g(a_1,\ldots,a_n,b) = g(a_1,\ldots,a_n,\_)(b) = 0$$
$$\text{et si } b \neq 0, g(a_1,\ldots,a_n,c) = g(a_1,\ldots,a_n,\_)(c) \neq 0, \forall c<b$$

$$\Leftrightarrow g(a_1,\ldots,a_n,\_)(b) = 0 \text{ et si } b \neq 0, \quad \prod_{i=0}^{b-1} g(a_1,\ldots,a_n,\_)(i) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow g(a_1,\ldots,a_n,\_)(b) = 0 \text{ et } P(g(a_1,\ldots,a_n,\_))(b) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow g(a_1,\ldots,a_n,\_)(b) = 0 \text{ et } \overline{sg}P(g(a_1,\ldots,a_n,\_))(b) = 0$$

$$\Leftrightarrow g(a_1,\ldots,a_n,\_)(b) = 0 \text{ et } \overline{sg}P(g(a_1,\ldots,a_n,\_))(b) = 0$$

II - Comme $\tilde{g}$ représente g, le morphisme $h : N \to N$, défini par

$h = \tilde{g}<<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>O(N),I(N)>$ représente la fonction $g(a_1,\ldots,a_n,\_) : N \to N$.

En effet, $h\sigma^d\theta = \tilde{g}<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>0(N),I(N)>\sigma^d\theta$

$= \tilde{g}<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>,\sigma^d\theta>$

$= \sigma^{g(a_1,\ldots,a_n,d)}\theta$, $\forall d\in N$ car $\tilde{g}$ représente g

et $k = e(N,N)<I(N),\tilde{\gamma}[hq(T,N)]^*0(N)$ représente $P(g(a_1,\ldots,a_n,\text{—}))$ (cas c de la section 3.1).

III - Démontrons que $\mu[\tilde{g}]^*<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta> = \sigma^b\theta = \sigma^{f(a_1,\ldots,a_n)}\theta$.

Pour ceci, il faut vérifier que

$e(N,N)<\sigma^b\theta,[\tilde{g}]^*<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta> = \theta$ et

$\overline{sg}e(N,N)<\sigma^b\theta,\tilde{\gamma}[\tilde{g}]^*<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>> = \theta$

a) $e(N,N)<\sigma^b\theta,[\tilde{g}]^*<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>$

$= e(N,N)<q(N^n,N),[\tilde{g}]^*p(N^n,N)><<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots,\sigma^{a_n}\theta>,\sigma^b\theta>$

$= \tilde{g}<<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>,\sigma^b\theta>$

$= \sigma^{g(a_1,\ldots,a_n,b)}\theta$ car $\tilde{g}$ représente g

$= \sigma^0\theta = \theta$

b) Constatons que $[\tilde{g}]^*<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>$

$=[\tilde{g}<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>0(N),I(N)>q(T,N)]^*$.

En effet, $[\tilde{g}]^*<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>$

$= [e(N,N)<q(T,N),[\tilde{g}]^*<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>\ p(T,N)>]^*$

à cause de la structure cartésienne fermée

$= [e(N,N)<I(N),[\tilde{g}]^*<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots,\sigma^{a_n}\theta>O(N)>q(T,N)]^*$

$= [e(N,N)<q(N^n,N),[\tilde{g}]^*p(N^n,N)><\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots,\sigma^{a_n}\theta>O(N),$
$I(N)>q(T,N)]^*$

$= [\tilde{g}<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots,\sigma^{a_n}\theta>O(N),I(N)>q(T,N)]^*$

$= [hq(T,N)]^*$

c) $\overline{sg}e(N,N)<\sigma^b\theta,\tilde{\gamma}[\tilde{g}]^*<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>>$

$= \overline{sg}e(N,N)<\sigma^b\theta,\tilde{\gamma}[hq(T,N)]^*>$

$= \overline{sg}e(N,N)<I(N),\tilde{\gamma}[hq(T,N)]^*O(N)>\sigma^b\theta$

$= \overline{sg}k\sigma^b\theta$

Comme k représente $\mathcal{P}(g(a_1,\ldots,a_n,\_))$, $\overline{sg}$ la fonction $\overline{\delta g}$ et la composée de deux morphismes représentant des fonctions représente la composée de ces fonctions, alors

$\overline{sg}k$ représente $\overline{\delta g}\mathcal{P}(g(a_1,\ldots,a_n,\_)) : N \to N$

et $\overline{sg}k\sigma^b\theta = \sigma^{\overline{\delta g}\mathcal{P}(g(a_1,\ldots,a_n,\_))(b)}\theta$

$= \sigma^{\overline{\delta g}\mathcal{P}(g(a_1,\ldots,a_n,b))}\theta$

$= \sigma^0\theta = \theta$

D'où $\overline{sge}(N,N)\langle\sigma^b\theta,\tilde{\gamma}[\tilde{g}]^*\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots\rangle,\sigma^{a_n}\theta\rangle\rangle = \theta$

$\sigma^b\theta$ satisfait les équations de la condition b de la définition d'une catégorie récursive (μ) et par conséquent

$$\mu[\tilde{g}]^*\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots\rangle,\sigma^{a_n}\theta\rangle = \sigma^b\theta = \sigma^{g(a_1,\ldots,a_n,\_)(b)}\theta$$
$$= \sigma^{f(a_1,\ldots,a_n)}\theta,\ \forall(a_1,\ldots,a_n)\in N^n$$

Donc $\mu[\tilde{g}]^*$ représente f.

<u>COROLLAIRE 3.8</u> Soit A, une catégorie récursive. Toute fonction récursive est représentable dans A.

<u>COROLLAIRE 3.9</u> (de la preuve du théorème 3.7) Soit A, une catégorie récursive (μ) (respectivement récursive). Toute fonction partiellement récursive est représentable dans A.

<u>PREUVE</u> La preuve du théorème 3.7 n'a qu'à être modifiée à l'avant-dernière ligne.

$\mu[\tilde{g}]^*\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots\rangle,\sigma^{a_n}\theta\rangle = \sigma^{f(a_1,\ldots,a_n)}\theta$, pour tous les éléments $(a_1,\ldots,a_n)\in N^n$ pour lesquels $f(a_1,\ldots,a_n)$ est défini.

Donc, $\mu[\tilde{g}]^*$ représente f.

<u>THEOREME 3.10</u> Soit A, une petite catégorie. Il existe une catégorie récursive (μ) libre engendrée par A, notée $L_\mu(A)$.

PREUVE Nous reprenons la preuve du théorème 2.5 affirmant le résultat pour $\overline{A}$, pré-récursive. Nous n'indiquerons ici que les modifications majeures à apporter.

I - Soit $\mathcal{D}_\mu(A)$, le système déductif suivant:

A) ajouter μ comme symbole primitif

B) la définition de "termes" est identique

C) dans la définition des preuves, ajouter:

1) ix) $(N)\supset(N)\mu N$

II - Dans la définition de la relation d'équivalence $\equiv$, ajouter

19. Pour toute preuve $T\alpha(N)\supset(N)$ et toute preuve de la forme $T\sigma^n\theta N$, si $T<T\sigma^n\theta N, T\alpha(N)\supset(N)>(N)\wedge((N)\supset(N))eN \equiv T\theta N$ et $T<T\sigma^n\theta N, T\alpha(N)\supset(N)\tilde{\gamma}(N)\supset(N)>(N)\wedge((N)\supset(N))e\overline{NsgN} \equiv T\theta N$, alors $T\alpha(N)\supset(N)\mu N \equiv T\sigma^n\theta N$ où $(N)\supset(N)\tilde{\gamma}(N)\supset(N), \overline{Nsg}N, NsgN, (N)\wedge(N)\otimes(N)\wedge(N)$ sont les preuves correspondant aux morphismes définis dans la section 3.1 (par exemple $T\theta N$ est la preuve correspondant au morphisme $\theta : T \to N$) et où les preuves de la forme $T\sigma^n\theta N$ sont définies par induction par les deux équations suivantes:

1. $T\sigma^0\theta N = T\theta N$
2. $T\sigma^{n+1}\theta N = T\sigma^n\theta N\sigma N$.

III - B) Dans la définition de $\overline{F}$ sur les preuves, ajouter

1. ix) $\overline{F}(N\supset N\mu N) = \mu_X : N_X\supset N_X \to N_X$.

THEOREME 3.11 Soit A, une petite catégorie. Il existe une catégorie récursive libre engendrée par A, notée $L_\rho(A)$.

PREUVE Reprenons la preuve du théorème précédent. Remplaçons μ par ρ. Dans la condition 19 de la définition de la relation d'équivalence, remplaçons la conclusion par: "alors $T\alpha(N)\supset(N)\rho N \equiv T\beta N\sigma N$" et ajoutons-y trois conditions:

20. $(N)\supset(N)<(N)\supset(N)<(N)\supset(N)\rho N \;\widetilde{A}\; (N)\wedge(N)qN,(N)\supset(N)I(N)\supset(N)>$
$(N)\wedge((N)\supset(N))eN,(N)\supset(N)\rho NsgN>(N)\wedge(N)\otimes(N)\wedge(N)qN \equiv (N)\supset(N)OT\theta N$

21. $(N)\supset(N)<(N)\supset(N)\rho N \;\widetilde{A}\; (N)\wedge(N)qN,(N)\supset(N)\widetilde{\gamma}(N)\supset(N)>(N)\wedge((N)\supset(N))eN\overline{sg}N \equiv$
$(N)\supset(N)OT\theta N$

22. $(N)\wedge((N)\supset(N))<(N)\wedge((N)\supset(N))eN\overline{sg}N,(N)\wedge((N)\supset(N))q(N)\supset(N)\rho N\overline{sg}N>$
$(N)\wedge(N)\otimes(N)\wedge(N)qN \equiv (N)\wedge((N)\supset(N))OT\theta N$

Le reste de la preuve est identique.

THEOREME 3.12 Toute fonction $f : N^k \to N$, $k \in N^+$, représentable dans $L_\mu(\phi)$ est récursive.

PREUVE Reprenons la preuve du théorème 2.6. Nous n'indiquons ici que les modifications à apporter.

II - Ajouter le nombre 71 pour μ dans la liste des nombres de Gödel.

Les relations suivantes sont primitives récursives.

$TP_\mu(x) = TP(x)$

$ST_\mu(x) = ST(x)$

$T_\mu(x) = T(x)$

$MP_\mu(x) \equiv MP(x) \wedge x = F(5)*R(11)*F(5)*R(71)*R(5)$

$SM_\mu(x) = SM(x)$ (où nous remplaçons $MP(v)$ par $MP_\mu(v)$)

$M_\mu(x) = M(x)$ (où nous remplaçons $SM(n)$ par $SM_\mu(n)$)

$xW_\mu y = xWy$ (où nous remplaçons $M(x)$ par $M_\mu(x)$)

$xV_\mu y$ = xVy (où nous remplaçons $M(x)$ par $M_\mu(x)$ et xWy par $xW_\mu y$)

$xS_\mu y$ $\equiv$ $xV_\mu y \vee yV_\mu x$.

(La relation S_μ tient compte des conditions 1,2,4,5,6,7,8,11,12,13,14,15, 16,17 et 18 de la définition de la relation d'équivalence $\equiv$).

IV - Les fonctions et relations suivantes sont partiellement récursives.

$$J(n,f) = \mu t(\mathrm{Nom}(\Omega_{S_\mu}(R(3)*Y(n)*f,t)))$$

$$U(f) = Z(\mu n[\mathrm{Zéro}(\Omega_{S_\mu}(R(3)*Y(n)*f,J(n,f)))])$$

$$xR_\mu y \equiv xW_\mu y \vee [M_\mu(x) \wedge (\exists f)[0<f<x \wedge x = R(3)*R(13)*F(R(3))* R(7)*F(R(5))*R(43)*f*R(17)*R(53)*F(R(5))*R(11)*F(R(5)) R(71)*R(5) \wedge U(f) \text{ est défini} \wedge y = U(f)]$$

(*condition* 19) (voir la remarque qui suit ce théorème)

$xB_\mu y$ = $xV_\mu y$ (où nous remplaçons $xW_\mu y$ par $xR_\mu y$)

$xN_\mu y$ $\equiv$ $xR_\mu y \vee yR_\mu x$

V - Si $f : N^k \to N$ est représentable dans $L_\mu(\phi)$ par le morphisme $\tilde{f}$, considérons

$$g(a_1,\ldots,a_k) = R(3)*G[H[\ldots[H[H[Z(a_1),Z(a_2)],Z(a_3)],\ldots]Z(a_{k-1})]Z(a_k)]*\tilde{f}$$

Alors $f(a_1,\ldots,a_k) = Z^{-1}[\Omega_{N_\mu}\{g(a_1,\ldots,a_k),\ \mu y[\mathrm{Nom}(\Omega_{N_\mu}(g(a_1,\ldots,a_k),y))]\}]$,
$\forall (a_1,\ldots,a_k)\in N^k$.

Par conséquent, f est récursive.

REMARQUE Regardons sous quelles conditions U(f) est défini.

1. Considérons la relation $x\mathcal{Q}y \equiv M(x) \wedge M(y) \wedge (C(x) = C(y)) \wedge (D(x) = D(y))$, où les fonctions $C(x)$ et $D(x)$ sont celles définies dans la section 2.7. Cette relation entre deux nombres représentant des morphismes satisfait les conditions 1 à 18 de la définition de la relation d'équivalence $\equiv$ dans le sens suivant: si deux morphismes satisfont une de ces conditions, leurs nombres de Gödel sont en relation $\mathcal{Q}$. Et comme S_μ est la plus petite relation entre deux nombres représentant des morphismes qui satisfait les conditions 1,2,4,5,6,7,8,11,12,13,14,15,16,17,18, alors $xS_\mu y \Rightarrow x\mathcal{Q}y$.

2. U(f) est défini

$\Rightarrow (\exists n)[J(n,f) \text{ est défini}]$

$\Rightarrow (\exists n)(\exists t)[\mathrm{Nom}(\Omega_{S_\mu}(R(3)*Y(n)*f,t))]$

$\Rightarrow (\exists n)(\exists t)(\exists m)[\Omega_{S_\mu}(R(3)*Y(n)*f,t) = Z(m)]$

$\Rightarrow (\exists n)(\exists m)[R(3)*Y(n)*fS_\mu Z(m)]$

$\Rightarrow (\exists n)(\exists m)[R(3)*Y(n)*f\mathcal{Q}Z(m)]$

$\Rightarrow (\exists n)(\exists m)[C(R(3)*Y(n)*f) = C(Z(m)) = R(5) \wedge$
$D(R(3)*Y(n)*f) = D(Z(m)) = R(3)]$

$\Rightarrow (\exists n)M_{T,N}(R(3)*Y(n)*f)$

$\Rightarrow M_{N,N}(f)$

Donc, si U(f) est défini, f est le nombre de Gödel d'une preuve de la forme NgN.

3. U(f) est défini

$\Leftrightarrow \mu n[\mathrm{Zéro}(\Omega_{S_\mu}(R(3)*Y(n)*f,J(n,f)))]$ est défini

$$\Leftrightarrow (\exists n)[\text{Zéro}\,(\Omega_{S_\mu}(R(3)*Y(n)*f,J(n,f)))\ \wedge$$

$$(\forall m<n)[\sim\text{Zéro}\,[\Omega_{S_\mu}(R(3)*Y(m)*f,J(m,f))]]]$$

$$\Leftrightarrow (\exists n)[\text{Zéro}\,(\Omega_{S_\mu}(R(3)*Y(n)*f,J(n,f)))\ \wedge\ (\forall m<n)[J(m,f)\ \text{est défini}\ \wedge$$

$$\sim\text{Zéro}\,[\Omega_{S_\mu}(R(3)*Y(m)*f,J(m,f))]]]$$

$$\Leftrightarrow (\exists n)[\text{Zéro}\,[\Omega_{S_\mu}(R(3)*Y(n)*f,J(n,f))]\ \wedge\ (\forall m<n)[\text{Nom}\,[\Omega_{S_\mu}(R(3)*Y(m)*f,$$

$$J(m,f))]\ \wedge\ \sim\text{Zéro}\,[\Omega_{S_\mu}(R(3)*Y(m)*f,J(m,f))]]]$$

$$\Leftrightarrow (\exists n)\,[\Omega_{S_\mu}(R(3)*Y(n)*f,J(n,f)) = Z(0)\ \wedge$$

$$(\forall m<n)(\exists s(m))\,[\Omega_{S_\mu}(R(3)*Y(m)*f,J(m,f)) = Z(s(m))\ \wedge\ s(m)\neq 0]]$$

4. Si nous nous rappelons la définition de $T\sigma^t\theta N$ (preuve du théorème 3.10), $T\sigma^t\theta N$ est la preuve dont le nombre de Gödel est $Z(t)$. Si nous notons $(N)\supset(N)\tilde{\gamma}(N)\supset(N)$ (respectivement $N\overline{sg}N$) la preuve qui correspond au morphisme $\tilde{\gamma}$: $N\supset N - N\supset N$ (respectivement $\overline{sg} : N \to N$) de la section 3.1 et si NgN est la preuve dont le nombre de Gödel est f, preuve dont l'existence est assurée par la section 2 de cette remarque, alors

U(f) est défini

$$\Leftrightarrow (\exists n)[T\sigma^n\theta NgN \equiv T\theta N\ \wedge\ (\forall m<n)(\exists s(m))[T\sigma^m\theta NgN \equiv T\sigma^{s(m)}\theta N\ \wedge\ s(m)\neq 0]]$$

$$\Leftrightarrow (\exists n)(\exists t(n))[T\sigma^n\theta NgN \equiv T\theta N\ \wedge\ t(n)\neq 0\ \wedge$$

$$T{<}T\sigma^n\theta N, T((T)\wedge(N)\,qNgN)^*(N)\supset(N)\tilde{\gamma}(N)\supset(N){>}(N)\wedge((N)\supset(N))eN \equiv T\sigma^{t(n)}\theta N]$$

(par les propriétés de $(N)\supset(N)\tilde{\gamma}(N)\supset(N)$).

$$\Leftrightarrow (\exists n)[T\sigma^n\theta NgN \equiv T\theta N\ \wedge\ T{<}T\sigma^n\theta N, T[(T)\wedge(N)\,qNgN]^*(N)\supset(N)\tilde{\gamma}(N)\supset(N){>}$$

$$(N)\wedge((N)\supset(N))eN\overline{sg}N \equiv T\theta N]$$

Comme $T\sigma^n\theta NgN \equiv T{<}T\sigma^n\theta N, T[(T)\wedge(N)\,qNgN]^*(N)\supset(N){>}(N)\wedge((N)\supset(N))eN,$

$\Leftrightarrow (\exists n)[T{<}T\sigma^{n}\theta N, T[(T)\wedge(N)qNgN]^{*}(N)\supset(N){>}(N)\wedge((N)\supset(N))eN| \equiv T\theta N \wedge$

$T{<}T\sigma^{n}\theta N, T[(T)\wedge(N)qNgN]^{*}(N)\supset(N)\tilde{\gamma}(N)\supset(N){>}(N)\wedge((N)\supset(N))eN\overline{sg}N \equiv T\theta N|$

$\Leftrightarrow$ il existe un élément n de N tel que les preuves $T\sigma^{n}\theta N$ et $T[(T)\wedge(N)qNgN]^{*}(N)\supset(N)$ satisfont les deux équations de la condition 19. de la définition de la relation d'équivalence $\equiv$.

$\Leftrightarrow$ il existe un élément n de N tel que les preuves $T\sigma^{n}\theta N$ et $T[(T)\wedge(N)qNgN]^{*}(N)\supset(N)$ μN et $T\sigma^{n}\theta N$ sont équivalentes par rapport à $\equiv$.

Donc, U(f) est défini si et seulement si il existe un élément n de N tel que les nombres Z(n) et R(3)*R(13)*F(R(3))*R(7)*F(R(5))*R(43)*f*R(53)*F(R(5))*R(11)*F(R(5))*R(71)*R(5) sont les nombres de Gödel de deux preuves équivalentes par rapport à $\equiv$ et alors, U(f) = Z(n).

<u>COROLLAIRE 3.13</u> Toute fonction $N^{k} \rightarrow N^{n}$, $n \in N^{+}$, $k \in N^{+}$, représentable dans $L_{\mu}(\phi)$, est récursive.

<u>THEOREME 3.14</u> Toute fonction partielle $f : N^{k} \rightarrow N$, $k \in N^{+}$, représentable dans $L_{\mu}(\phi)$, est partiellement récursive.

<u>PREUVE</u> En reprenant la preuve du théorème précédent, nous n'avons qu'à modifier l'avant-dernière ligne.

Alors $f(a_1,\ldots,a_k) = Z^{-1}[\Omega_{N_\mu}\{g(a_1,\ldots,a_k),\mu y[\mathrm{Nom}(\Omega_{N_\mu}(g(a_1,\ldots,a_k),y))]\}]$, pour tous les éléments $(a_1,\ldots,a_k)$ de N^{k} pour lesquels $f(a_1,\ldots,a_k)$ est défini. Par conséquent, f est partiellement récursive.

<u>COROLLAIRE 3.15</u> Toute fonction partielle $N^{k} \rightarrow N^{n}$, $n \in N^{+}$, $k \in N^{+}$, représentable dans $L_{\mu}(\phi)$, est partiellement récursive.

<u>THEOREME 3.16</u> Toute fonction $f : N^k \to N$, $k \in N^+$, représentable dans $L_\rho(\phi)$, est récursive.

<u>PREUVE</u> Nous reprenons la preuve du théorème 3.12 où nous remplaçons partout μ par ρ sauf pour les expressions $xW_\rho y$ et $xR_\rho y$ dont les définitions suivent.

Si $\# \tilde{\bar{A}}$ = nombre de Gödel de la preuve $N\ \tilde{\bar{A}}\ (N)\wedge(N)$ qui correspond au morphisme

$\tilde{\bar{A}} : N \to N \wedge N$ de la section 3.1,

$\# \overline{sg}$ = nombre de Gödel de la preuve $N\ \overline{sg}\ N$,

$\# sg$ = nombre de Gödel de la preuve $N\ sg\ N$,

$\# \otimes$ = nombre de Gödel de la preuve $(N)\wedge(N)\ \otimes\ (N)\wedge(N)$,

$\# \tilde{\gamma}$ = nombre de Gödel de la preuve $(N)\wedge(N)\ \tilde{\gamma}\ (N)\supset(N)$,

$xW_\rho y \equiv xW_\mu y \vee$

$(\exists a)(\exists b)[0<a<x \wedge 0<b<x \wedge T(a) \wedge T(b) \wedge$

$x = a*R(61)*a*R(61)*a*R(71)*\tilde{\bar{A}}*R(43)*R(5)*R(19)*a*R(29)*a*R(67)*b*R(47)$

$*R(5)*R(19)*a*R(71)*\#sg*R(67)*\#\otimes*R(43)*R(5) \wedge$

$y = a*R(23)*R(3)*R(31)*R(5)] \vee$

(*condition* 20)

$(\exists a)[0<a<x \wedge T(a) \wedge x = a*R(61)*a*R(71)*\#\tilde{\bar{A}}*R(43)*R(5)*R(19)*\#\tilde{\gamma}*R(67)$

$*F(R(5))*R(7)*F(a)*R(47)*\#\overline{sg}] \wedge y = a*R(23)*R(3)*R(31)*R(5)] \vee$

(*condition* 21)

$(\exists a)(\exists b)[0<a<x \wedge 0<b<x \wedge T(a) \wedge T(b) \wedge$

$x = a*R(61)*a*R(47)*\#\overline{sg}*R(19)*a*R(43)*b*R(71)*\#\overline{sg}*R(67)*\#\otimes*R(43)*R(5) \wedge$

$y = a*R(23)*R(3)*R(31)*R(5)]$

(*condition* 22)

$xR_\rho y \equiv xW_\rho y \vee [M_\rho(x) \wedge (\exists f)[0<f<x \wedge x = R(3)*R(13)*F(R(3))*R(7)*F(R(5))*R(43)$
$*f*R(17)*R(53)*F(R(5))*R(11)*F(R(5))*R(71)*R(5) \wedge U(f)$ est défini $\wedge$
$y = U(f)*R(37)*R(5)]$.

COROLLAIRE 3.17 Toute fonction $f : N^k \to N^n$, $n\in N^+$, $k\in N^+$, représentable dans $L_\rho(\phi)$, est récursive. Toute fonction partielle $f : N^k \to N^n$, $n\in N^+$, $k\in N^+$, représentable dans $L_\rho(\phi)$ est partiellement récursive.

Donc, l'ensemble des fonctions représentables dans $L_\mu(\phi)$ (respectivement $L_\rho(\phi)$) est l'ensemble des fonctions récursives. L'ensemble des fonctions partielles représentables dans $L_\mu(\phi)$ (respectivement $L_\rho(\phi)$) est l'ensemble des fonctions partiellement récursives.

THEOREME 3.18 Tout morphisme $f : N^k \to N$, $k\in N^+$, de $L_\mu(\phi)$ (respectivement $L_\rho(\phi)$) représente une fonction partielle.

PREUVE

a) Soit $f : N^k \to N$, $k\in N^+$, un morphisme de $L_\mu(\phi)$. Notons par $\#(N^k)$, le nombre de Gödel du terme N^k et par $\#(N^k)*\#f*R(5)$, le nombre de Gödel d'une preuve de $\mathcal{D}_\mu(\phi)$ dont la classe d'équivalence par rapport à $\equiv_\mu$ est le morphisme f. Définissons $\#(a_1,\ldots,a_k)$ comme étant le nombre de Gödel de la preuve

$T<\ldots T<T\sigma^{a_1}\theta N, T\sigma^{a_2}\theta N>N^2,\ldots,T\sigma^{a_k}\theta N>N^k$, c'est-à-dire

$\#(a_1,\ldots,a_k) = R(3)*R(61)*\ldots*R(3)*R(61)*Z(a_1)*R(19)*Z(a_2)*R(67)*$
$\#(N^2)*\ldots*R(19)*Z(a_k)*R(67)*\#(N^k)$ et ceci pour tout élément $(a_1,\ldots,a_k)$ de N^k.

Considérons la fonction partielle $V_f : N^k \to N$, définie par

$V_f(a_1,\ldots,a_k) = \mu n[(\exists t)\ \Omega_{S_\mu}(\#(a_1,\ldots,a_k)*\#(f)*R(5),t) = Z(n)$ et montrons que V_f est représentée par f. Soit $(a_1,\ldots,a_k) \in N^k$ pour lequel $V_f(a_1,\ldots,a_k)$ est définie. Il existe donc un élément n et un élément t de N tels que $\Omega_{S_\mu}(\#(a_1,\ldots,a_k)*\#(f)*R(5),t) = Z(n)$. Ceci signifie que la preuve dont le nombre de Gödel est $\#(a_1,\ldots,a_k)*\#(f)*R(5)$ est équivalente à la preuve dont le nombre de Gödel est Z(n), c'est-à-dire la preuve $T\sigma^n\theta N$. Comme le morphisme $f<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_k}\theta>$ est la classe d'équivalence de la preuve dont le nombre de Gödel est $\#(a_1,\ldots,a_k)*\#(f)*R(5)$, alors $f<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_k}\theta> = \sigma^n\theta = \sigma^{V_f(a_1,\ldots,a_k)}\theta$.

Donc le morphisme f représente la fonction partielle V_f. Ainsi tout morphisme $f : N^k \to N$ de $L_\mu(\phi)$, $k\in N^+$, représente une fonction partielle.

b) Pour les morphismes $f : N^k \to N$ de $L_\rho(\phi)$, $k\in N^+$, nous reprenons la preuve de a) et nous n'y modifions que l'indice μ par ρ.

<u>COROLLAIRE 3.19</u> Tout morphisme $f : N^k \to N^n$, $k\in N^+$, $n\in N^+$, de $L_\mu(\phi)$ ou de $L_\rho(\phi)$ représente une fonction partielle.

<u>COROLLAIRE 3.20</u> Tout morphisme $f : N^k \to N^n$, $k\in N^+$, $n\in N^+$, de $L_\mu(\phi)$ ou de $L_\rho(\phi)$ représente une fonction partiellement récursive.

Considérons la sous-catégorie $S_\mu^+(\phi)$ de $L_\mu(\phi)$ où $|S_\mu^+(\phi)| = \{N^i | i\in N^+\}$, alors "toute fonction partiellement récursive est représentable dans $S_\mu^+(\phi)$ et tout morphisme de $S_\mu^+(\phi)$ représente une fonction partiellement récursive."

Si nous définissons $S_\mu(\phi)$ comme étant la sous-catégorie pleine de $L_\mu(\phi)$ où $|S_\mu(\phi)| = \{N^i | i \epsilon N\}$, nous obtenons en plus des morphismes de $S_\mu^+(\phi)$, tous les morphismes de $L_\mu(\phi)$ dont le domaine est de la forme N^n et dont le codomaine est T, l'objet terminal de $S_\mu(\phi)$ et tous les morphismes de $L_\mu(\phi)$ de la forme $T \to N^n$. Ces derniers se divisent en deux groupes. Un premier groupe est formé des morphismes ayant la forme $<...<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,...>,\sigma^{a_n}\theta>$ pour $(a_1,...,a_n) \epsilon N^n$; nous dirons alors que ces morphismes représentent un produit de nombres naturels ou un élément de N^n. Le deuxième groupe est celui des morphismes admettant dans leur écriture des interventions de la forme μf pour un certain nombre de morphismes $f : T \to N\supset N$, ces morphismes f étant tels qu'il n'existe aucun élément n de N pour lequel $\sigma^n\theta : T \to N$ et $f : T \to N\supset N$ satisfont les équations $e(N,N)<\sigma^n\theta,f> = \theta$ et $\overline{sge}(N,N)<\sigma^n\theta,\tilde{\gamma}f> = \theta$. Nous appellerons les morphismes de ce deuxième groupe des indéterminés. Ainsi, tout morphisme de $S_\mu(\phi)$ est, soit un morphisme de codomaine T, soit un indéterminé ou représente une fonction partiellement récursive ou un produit de nombres naturels. Réciproquement, tout produit de nombres naturels et toute fonction partiellement récursive sont représentables dans $S_\mu(\phi)$.

Nous obtenons les mêmes résultats pour les catégories $S_\rho^+(\phi)$ et $S_\rho(\phi)$.

Comme dans le cas des catégories pré-récursives, nous pourrions modifier quelque peu les structures de catégorie récursive sans toutefois modifier les résultats obtenus, soit en travaillant à partir d'une catégorie pré-récursive avec unicité au lieu d'une catégorie pré-récursive, soit en remplaçant dans la définition d'une catégorie pré-récursive la condition d'existence d'une famille de morphismes $\{R(A) | A \epsilon A\}$ par le schéma ψ, introduit à la fin du chapitre 2.

CHAPITRE 4

CATÉGORIES PRIMITIVES RÉCURSIVES

Revenons au problème original, celui de trouver une catégorie dont la classe des fonctions représentables est la classe des fonctions primitives récursives.

Comme l'axiome de Peano-Lawvere nous a fourni une structure trop riche, prenons le schéma de Gödel et appliquons-le à une catégorie cartésienne munie d'un objet N et de morphismes σ et θ, l'aspect cartésien de la catégorie étant nécessaire afin d'assurer la présence des puissances de N. Cette structure nous permettra de construire une catégorie dont chaque morphisme représente une fonction primitive récursive ou un produit de nombres naturels, à moins que son codomaine ne soit l'objet terminal de la catégorie, et où toute fonction primitive récursive et tout produit de nombres naturels y sont représentés. Mais cette catégorie n'est pas la seule à posséder cette propriété et ceci fera l'objet de la seconde partie de ce chapitre.

I - CATÉGORIES PRIMITIVES RÉCURSIVES (A)

4.1 CATÉGORIES PRIMITIVES RÉCURSIVES (A)

DEFINITION 4.1 Une catégorie A est dite primitive récursive (A) si

a) elle est cartésienne,

b) elle possède un objet N_A, muni d'un morphisme $\sigma_A : N_A \to N_A$ et d'un morphisme $\theta_A : T \to N_A$, où T est l'objet terminal de A,

c) elle est fermée sous un opérateur

$(r_A)^{\circ}_{A} : \mathcal{A}(N_A{}^n, N_A) \times \mathcal{A}(N_A{}^{n+2}, N_A) \rightarrow \mathcal{A}(N_A{}^{n+1}, N_A)$, $\forall n \in \mathbb{N}^+$,

où $\mathcal{A}(A,B)$ représente l'ensemble des morphismes de $\mathcal{A}$ ayant A pour domaine et B pour codomaine, l'opérateur possédant les propriétés suivantes:

Pour tout morphisme $g : N_A{}^n \rightarrow N_A$ et tout morphisme $h : N_A{}^{n+2} \rightarrow N_A$ de $\mathcal{A}$,

$$(r_A)_A(g,h)\langle I(N_A{}^n), \theta_A 0(N_A{}^n)\rangle = g : N_A{}^n \rightarrow N_A$$

$$(r_A)_A(g,h)\langle p(N_A{}^n, N_A), \sigma q(N_A{}^n, N_A)\rangle = h\langle I(N_A{}^{n+1}), (r_A)_A(g,h)\rangle : N_A{}^{n+1} \rightarrow N_A$$

REMARQUE

a) Lorsqu'il n'y a aucun danger de confusion, nous éviterons les indices $\mathcal{A}$ des termes et des morphismes de $\mathcal{A}$.

b) L'opérateur r_A défini ci-dessus représente l'opérateur "récurrence" introduit dans la définition de l'ensemble des fonctions primitives récursives. Les deux propriétés

$$r_A(g,h)\langle I(N), \theta 0(N)\rangle = g$$

$$r_A(g,h)\langle p(N^n,N), \sigma q(N^n,N)\rangle = h\langle I(N^{n+1}), r_A(g,h)\rangle$$

traduisent les égalités suivantes:

Pour $g : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ et $h : \mathbb{N}^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}$, si f = récurrence (g,h)

$$f(a_1,\dots,a_n,0) = g(a_1,\dots,a_n),$$

$$f(a_1,\dots,a_n,m+1) = h(a_1,\dots,a_n,m,f(a_1,\dots,a_n,m)),$$

$$\forall (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{N}^n,\ \forall m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

EXEMPLE La catégorie des ensembles, étant fermée sous la récurrence, est une catégorie primitive récursive (A).

DEFINITION 4.2 Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, deux catégories primitives récursives (A). Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est dit primitif récursif (A) s'il préserve strictement la structure primitive récursive (A), c'est-à-dire il préserve strictement la structure cartésienne et si

$$F(N_{\mathcal{C}}) = N_{\mathcal{D}}, \quad F(\theta_{\mathcal{C}}) = \theta_{\mathcal{D}}, \quad F(\sigma_{\mathcal{C}}) = \sigma_{\mathcal{D}}, \quad F((r_A)_{\mathcal{C}}(g,h)) = (r_A)_{\mathcal{D}}(F(g),F(h))$$

pour chaque $g : N_{\mathcal{C}}^{\,n} \to N_{\mathcal{C}}$ et chaque $h : N_{\mathcal{C}}^{\,n+2} \to N_{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$.

4.2 MORPHISMES DESCRIPTIFS ET REPRÉSENTATIONS DES FONCTIONS PRIMITIVES RÉCURSIVES.

Toute catégorie primitive récursive (A) possède des morphismes dits descriptifs, induits par les descriptions des fonctions primitives récursives et ces morphismes représentent des fonctions primitives récursives.

DEFINITION 4.3 Soit $\mathcal{A}$, une catégorie primitive récursive (A). Une fonction $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ est représentable dans $\mathcal{A}$ s'il existe un morphisme $\tilde{f} : N^k \to N^n$ tel que

$$\forall (a_1,a_2,\ldots,a_k) \in \mathbb{N}^k,$$

$$\tilde{f}<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_k}\theta> =$$

$$<\ldots<\sigma^{\pi_{m,1}f(a_1,\ldots,a_k)}\theta,\sigma^{\pi_{m,2}f(a_1,\ldots,a_k)}\theta>,\ldots>,\sigma^{\pi_{m,m}f(a_1,\ldots,a_k)}\theta>$$

<u>DEFINITION 4.4</u> Dans toute catégorie primitive récursive (A) A, définissons

$\tilde{\kappa}_A$ = le morphisme $\theta_A O(N_A)$,

$\tilde{\delta}_A$ = le morphisme σ_A,

$(\tilde{\pi}_{1,1})_A$ = le morphisme $I(N_A)$,

$(\tilde{\pi}_{m+1,i})_A$ = le morphisme $(\tilde{\pi}_{m,i})_A\, p(N_A^{\ m}, N_A)$, $\forall i \in [1,m]$,

$(\tilde{\pi}_{m+1,m+1})_A$ = le morphisme $q(N_A^{\ m}, N_A)$, $\forall m \in N^+$.

<u>LEMME 4.5</u> Soit A, une catégorie primitive récursive (A),

a) le morphisme $\tilde{\kappa}_A : N_A \to N_A$ représente la fonction constante zéro κ,

b) le morphisme $\tilde{\delta}_A : N_A \to N_A$ représente la fonction successeur δ,

c) les morphismes $(\tilde{\pi}_{m,i})_A : N_A^{\ m} \to N_A$ représentent les projections $\pi_{m,i}$, $\forall i \in [1,m]$, $\forall m \in N^+$.

<u>PREUVE</u> Nous omettons les indices A pour plus de clarté dans les formules.

a) $\tilde{\kappa}\sigma^n\theta = \theta O(N)\sigma^n\theta = \theta O(T) = \theta I(T) = \theta = \sigma^{\kappa(n)}\theta$, $\forall n \in N$ car $\kappa(n) = 0$, $\forall n \in N$.
Donc $\tilde{\kappa}$ représente κ.

b) $\tilde{\delta}\sigma^n\theta = \sigma\sigma^n\theta = \sigma^{n+1}\theta = \sigma^{\delta(n)}\theta$, $\forall n \in N$.
Donc $\tilde{\delta}$ représente δ.

c) Preuve par induction sur la valeur de m dans $\pi_{m,i}$

1) m = 1

$\tilde{\pi}_{1,1}\sigma^n\theta = I(N)\sigma^n\theta = \sigma^n\theta = \sigma^{I(n)}\theta$, $\forall n \in N$

Donc $\tilde{\pi}_{1,1}$ représente $I(N)$ ou la projection $\pi_{1,1} : N \to N$.

2) m = w+1

Supposons que $\tilde{\pi}_{m,i}$ représente $\pi_{m,i}$, $\forall\, i\in[1,m]$, $\forall\, m\in[1,w]$.

Montrons que $\tilde{\pi}_{w+1,i}$ représente $\pi_{w+1,i}$, $\forall\, i\in[1,w+1]$.

i) Pour $i\in[1,w]$, $\tilde{\pi}_{w+1,i}<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_{w+1}}\theta>$

$= \tilde{\pi}_{w,i}p(N^w,N)<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_{w+1}}\theta>$

$= \tilde{\pi}_{w,i}<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_w}\theta>$

$= \sigma^{\pi_{w,i}(a_1,\ldots,a_w)}\theta$ car $\tilde{\pi}_{w,i}$ représente $\pi_{w,i}$ par hypothèse

$= \sigma^{\pi_{w+1,i}(a_1,\ldots,a_w,a_{w+1})}\theta$, $\forall\,(a_1,\ldots,a_{w+1})\in N^{w+1}$

Donc, $\tilde{\pi}_{w+1,i}$ représente $\pi_{w+1,i}$, $\forall i\in[1,w]$.

ii) Pour $i = w+1$, $\tilde{\pi}_{w+1,w+1}<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_{w+1}}\theta>$

$= q(N^w,N)<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_{w+1}}\theta>$

$= \sigma^{a_{w+1}}\theta$

$= \sigma^{\pi_{w+1,w+1}(a_1,\ldots,a_{w+1})}\theta$, $\forall\,(a_1,\ldots,a_{w+1})\in N^{w+1}$

Donc, $\tilde{\pi}_{w+1,w+1}$ représente $\pi_{w+1,w+1}$.

Par conséquent, $\tilde{\pi}_{w+1,i}$ représente $\pi_{w+1,i}$, $\forall i\in[1,w+1]$.

Ainsi, par induction, tout morphisme $\tilde{\pi}_{m,i}$ représente la projection $\pi_{m,i}$, $\forall i\in[1,m]$, $\forall m\in N^+$.

<u>LEMME 4.6</u> Soit A, une catégorie primitive récursive (A).

a) Si les morphismes $f : \mathrm{N}^n \to \mathrm{N}^m$ et $g : \mathrm{N}^n \to \mathrm{N}$ représentent les fonctions $\alpha : N^n \to N^m$ et $\beta : N^n \to N$, alors $\langle f,g\rangle : \mathrm{N}^n \to \mathrm{N}^{m+1}$ représente $\langle\alpha,\beta\rangle : N^n \to N^{m+1}$.

b) Si les morphismes $f : \mathrm{N}^n \to \mathrm{N}^m$ et $g : \mathrm{N}^m \to \mathrm{N}^t$ représentent les fonctions $\alpha : N^n \to N^m$ et $\beta : N^m \to N^t$, alors $gf : \mathrm{N}^n \to \mathrm{N}^t$ représente $\beta\alpha : N^n \to N^t$.

c) Si les morphismes $f : \mathrm{N}^n \to \mathrm{N}$ et $h : \mathrm{N}^{n+2} \to \mathrm{N}$ représentent les fonctions $\alpha : N^n \to N$ et $\beta : N^{n+2} \to N$, alors $r_A(f,g) : \mathrm{N}^{n+1} \to \mathrm{N}$ représente récurrence $(\alpha,\beta) : N^{n+1} \to N$.

<u>PREUVE</u>

a) Si $f : \mathrm{N}^n \to \mathrm{N}^m$ représente $\alpha : N^n \to N^m$ et $g : \mathrm{N}^n \to \mathrm{N}$ représente $\beta : N^n \to N$,

$$\langle f,g\rangle\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots,\sigma^{a_n}\theta\rangle$$

$$= \langle f\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots\rangle,\sigma^{a_n}\theta\rangle, g\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots\rangle,\sigma^{a_n}\theta\rangle\rangle$$

$$= \langle\ldots\langle\sigma^{\pi_{m,1}\alpha(a_1,\ldots,a_n)}\theta,\sigma^{\pi_{m,2}\alpha(a_1,\ldots,a_n)}\theta\rangle,\ldots\rangle,\sigma^{\pi_{m,m}\alpha(a_1,\ldots,a_n)}\theta\rangle,$$
$$\sigma^{\beta(a_1,\ldots,a_n)}\theta\rangle, \quad \text{par hypothèse}$$

$$= \langle\ldots\langle\sigma^{\pi_{m+1,1}\langle\alpha,\beta\rangle(a_1,\ldots,a_n)}\theta,\sigma^{\pi_{m+1,2}\langle\alpha,\beta\rangle(a_1,\ldots,a_n)}\theta\rangle,\ldots\rangle,$$
$$\sigma^{\pi_{m+1,m+1}\langle\alpha,\beta\rangle(a_1,\ldots,a_n)}\theta\rangle, \ \forall(a_1,\ldots,a_n)\in N^n$$

Donc $\langle f,g\rangle : \mathrm{N}^n \to \mathrm{N}^{m+1}$ représente $\langle\alpha,\beta\rangle : N^n \to N^{m+1}$.

b) Si $f : \mathrm{N}^n \to \mathrm{N}^m$ représente $\alpha : N^n \to N^m$ et $g : \mathrm{N}^m \to \mathrm{N}^t$ représente $\beta : N^m \to N^t$,

$$gf<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots,\sigma^{a_n}\theta>$$

$$= g(f<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots,\sigma^{a_n}\theta>)$$

$$= g<\ldots<\sigma^{\pi_{m,1}\alpha(a_1,\ldots,a_n)}\theta,\sigma^{\pi_{m,2}\alpha(a_1,\ldots,a_n)}\theta>,\ldots>,\sigma^{\pi_{m,m}\alpha(a_1,\ldots,a_n)}\theta>$$

$$= <\ldots<\sigma^{\pi_{t,1}\beta(\pi_{m,1}\alpha(a_1,\ldots,a_n),\pi_{m,2}\alpha(a_1,\ldots,a_n),\ldots,\pi_{m,m}\alpha(a_1,\ldots,a_n))}\theta,\ldots>,$$

$$\sigma^{\pi_{t,t}\beta(\pi_{m,1}\alpha(a_1,\ldots,a_n),\ldots,\pi_{m,m}\alpha(a_1,\ldots,a_n))}\theta>$$

$$= <\ldots<\sigma^{\pi_{t,1}\beta\alpha(a_1,\ldots,a_n)}\theta,\ldots>,\sigma^{\pi_{t,t}\beta\alpha(a_1,\ldots,a_n)}\theta>, \forall(a_1,\ldots,a_n)\in\mathcal{N}^n$$

Donc $gf : N^n \to N^t$ représente $\beta\alpha : \mathcal{N}^n \to \mathcal{N}^t$.

c) Si $f : N^n \to N$ représente $\alpha : \mathcal{N}^n \to \mathcal{N}$ et $h : N^{n+2} \to N$ représente $\beta : \mathcal{N}^{n+2} \to \mathcal{N}$, montrons par induction sur la dernière composante de $\mathcal{N}^{n+1}$ que $r_A(f,h) : N^{n+1} \to N$ représente récurrence $(\alpha,\beta) : \mathcal{N}^{n+1} \to \mathcal{N}$

1) $r_A(f,h)<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>,\theta>$

$= r_A(f,h)<I(N^n),\theta O(N^n)><\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>$

$= f<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>$ par définition de r_A

$= \sigma^{\alpha(a_1,\ldots,a_n)}\theta$ car f représente α

$= \sigma^{\text{récurrence }(\alpha,\beta)\ (a_1,\ldots,a_n,0)}\theta$

2) Supposons que $r_A(f,h)<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>,\sigma^m\theta> =$

$\sigma^{\text{récurrence }(f,h)\ (a_1,a_2,\ldots,m)}\theta,$

alors $r_A(f,h)<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>,\sigma^{m+1}\theta>$

$= r_A(f,h)<p(N^n,N),\sigma q(N^n,N)><\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>,\sigma^m\theta>$

$= h<<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\ldots>,\sigma^m\theta>,\ r_A(f,h)<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\ldots>,\sigma^m\theta>>$ par définition de r_A

$= h<<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\ldots>,\sigma^m\theta>,\ \sigma^{\text{récurrence }(\alpha,\beta)(a_1,\ldots,a_n,m)}\theta>$ par hypothèse

$= \sigma^{\beta(a_1,\ldots,a_n,m,\ \text{récurrence }(\alpha,\beta)(a_1,\ldots,a_n,m))}\theta$

$= \sigma^{\text{récurrence }(\alpha,\beta)(a_1,\ldots,a_n,m+1)}\theta,\ \forall(a_1,\ldots,a_n)\in N^n$

Donc, par induction,

$r_A(f,h)<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>,\sigma^{a_{n+1}}\theta>$

$= \sigma^{\text{récurrence }(\alpha,\beta)(a_1,\ldots,a_n,a_{n+1})}\theta,\ \forall(a_1,\ldots,a_n,a_{n+1})\in N^{n+1}$

D'où, $r_A(f,h) : N^{n+1} \to N$ représente récurrence $(\alpha,\beta) : N^{n+1} \to N$.

DEFINITION 4.7 Soit A, une catégorie primitive récursive (A) et soit $\mathcal{D}$, l'ensemble des descriptions des fonctions primitives récursives. Tout morphisme de A qui appartient à l'image de $\mathcal{D}$ sous la fonction β définie ci-après est appelé morphisme descriptif de A.

$\beta : \mathcal{D} \to$ "Morphismes de A" est la fonction définie de façon inductive par:

i) $\beta(\bar{\kappa}) = \tilde{\kappa}_A$, $\beta(\bar{\delta}) = \tilde{\delta}_A$, $\beta(\bar{\pi}_{m,i}) = (\tilde{\pi}_{m,i})_A$, $\forall i\in[1,m]$, $\forall m\in N^+$,

ii) Si $\bar{f} : N^n \to N^m$ et $\bar{g} : N^n \to N$ sont des descriptions et si $\beta(\bar{f}) : N_A{}^n \to N_A{}^m$ et $\beta(\bar{g}) : N_A{}^n \to N_A$ sont définis,

$\beta(<\bar{f},\bar{g}>) = <\beta(\bar{f}),\beta(\bar{g})>$

iii) Si $\bar{f} : N^n \to N^m$ et $\bar{g} : N^m \to N^s$ sont des descriptions et si

$\beta(\bar{f}) : {N_A}^n \to {N_A}^m$ et $\beta(\bar{g}) : {N_A}^m \to {N_A}^s$ sont définis,

$\beta(\bar{g}\bar{f}) = \beta(\bar{g})\beta(\bar{f})$

iv) Si $\bar{g} : N^n \to N$ et $\bar{h} : N^{n+2} \to N$ sont des descriptions et si

$\beta(\bar{g}) : {N_A}^n \to N$ et $\beta(\bar{h}) : {N_A}^{n+2} \to N_A$ sont définis,

$\beta(r(\bar{g},\bar{h})) = ({r_A})_A(\beta(\bar{g}),\beta(\bar{h}))$.

<u>REMARQUE</u> Tout morphisme descriptif de A est de la forme $\tilde{f}$ où $\tilde{f}$ est l'expression obtenue en remplaçant dans l'expression $\bar{f}$, $\bar{f}$ étant une description de fonction primitive récursive, $\bar{\kappa}, \bar{\delta}, \bar{\pi}_{m,i}$ par $\tilde{\kappa}_A, \tilde{\delta}_A, (\tilde{\pi}_{m,i})_A$ et r par $(r_A)_A$.

<u>THEOREME 4.8</u> Soit A, une catégorie primitive récursive (A). L'image par $\beta : \mathcal{D} \to$ "morphismes de A", fonction introduite dans la définition 4.7, de toute description $\bar{f}$ de fonction primitive récursive représente la fonction f associée à $\bar{f}$.

<u>PREUVE</u> par induction sur la longueur des descriptions.

a) Soit $\bar{f}$, une description de longueur 1. Alors $\bar{f}$ a une des formes $\bar{\kappa}$, $\bar{\delta}$, $\bar{\pi}_{i,m}$, $\forall i \in [1,m]$, $\forall m \in N^+$.

Par le lemme 4.5, nous savons que $\tilde{\kappa}_A = \beta(\bar{\kappa})$ représente κ, $\bar{\delta}_A = \beta(\bar{\delta})$ représente δ et $(\bar{\pi}_{i,m})_A = \beta(\bar{\pi}_{i,m})$ représente $\pi_{i,m}$, $\forall i \in [1,m]$, $\forall m \in N^+$

Donc, l'image par β de toute description $\bar{f}$ de longueur 1 représente la fonction f associée à $\bar{f}$.

b) Supposons le résultat vrai pour toute description de longueur inférieure ou égale à n.

Soit $\bar{f}$, une description de longueur n+1. $\bar{f}$ est alors de l'une des formes suivantes: $<\bar{g},\bar{h}>$, $\bar{g}\bar{h}$ ou $r(\bar{g},\bar{h})$

i) $\bar{f} = <\bar{g},\bar{h}>$ où $\bar{g} : N^n \to N^m$ et $\bar{h} : N^n \to N$ et $\lambda(\bar{f}) = n+1 = \lambda(\bar{g}) + \lambda(\bar{h}) + 1$

Alors $\lambda(\bar{g})$ et $\lambda(\bar{h})$ sont de longueur inférieure ou égale à n et par hypothèse, $\beta(\bar{g})$ représente une fonction g et $\beta(\bar{h})$, une fonction h. Par le lemme 4.6, le cas a) nous dit qu'alors $<\beta(\bar{g}),\beta(\bar{h})>$ représente $<g,h>$ et comme $<\beta(\bar{g}),\beta(\bar{h})> = \beta(<\bar{g},\bar{h}>)$ par définition, $\beta(\bar{f}) = \beta(<\bar{g},\bar{h}>)$ représente $<g,h>$, c'est-à-dire f la fonction associée à $\bar{f}$.

ii) $\bar{f} = \bar{g}\bar{h}$ où $\bar{g} : N^m \to N^s$ et $\bar{h} : N^n \to N^m$ et $\lambda(\bar{f}) = n+1 = \lambda(\bar{g}) + \lambda(\bar{h})$

Comme la longueur d'une description est toujours plus grande ou égale à 1, $\lambda(\bar{g}) \le n$ et $\lambda(\bar{h}) \le n$. Par hypothèse, $\beta(\bar{g})$ représente une fonction g et $\beta(\bar{h})$, une fonction h. Par le lemme 4.6 b), $\beta(\bar{g})\beta(\bar{h})$ représente gh. D'où $\beta(\bar{f}) = \beta(\bar{g},\bar{h}) = \beta(\bar{g}),\beta(\bar{h})$ représente gh, c'est-à-dire f, la fonction associée à $\bar{f}$.

iii) $\bar{f} = r(\bar{g},\bar{h})$ où $\bar{g} : N^n \to N$ et $\bar{h} : N^{n+2} \to N$ et

$\lambda(\bar{f}) = n+1 = \lambda(\bar{g}) + \lambda(\bar{h}) + 1$

Alors $\lambda(\bar{g}) \le n$ et $\lambda(\bar{h}) \le n$ et par hypothèse, $\beta(\bar{g})$ représente une fonction g et $\beta(\bar{h})$, une fonction h. Par le cas c) du lemme 4.6, $r_A(\beta(\bar{g}),\beta(\bar{h}))$ représente récurrence (g,h).

D'où $\beta(\bar{f}) = \beta(r(\bar{g},\bar{h})) = (r_A)_A(\beta(\bar{g}),\beta(\bar{h}))$ représente récurrence (g,h), c'est-à-dire f, la fonction associée à $\bar{f}$.

Ainsi, l'image par β de toute description $\bar{f}$ de longueur n+1 représente la fonction associée à la description $\bar{f}$.

Par induction, nous pouvons conclure que l'image par β de toute description $\bar{f}$ représente la fonction associée à $\bar{f}$.

<u>COROLLAIRE 4.9</u> Soit $\mathcal{A}$, une catégorie primitive récursive (A). Tout morphisme descriptif de $\mathcal{A}$ représente une fonction primitive récursive.

<u>COROLLAIRE 4.10</u> Soit $\mathcal{A}$, une catégorie primitive récursive (A). Toute fonction primitive récursive est représentable dans $\mathcal{A}$.

<u>PREUVE</u> Soit f, une fonction primitive récursive. Soit $\bar{f}$, une description de f. Alors $\beta(\bar{f})$, morphisme de $\mathcal{A}$, représente f.

4.3 *CATÉGORIES PRIMITIVES RÉCURSIVES* (A) *LIBRES*

La notion de catégorie primitive récursive (A) permet de générer des catégories primitives récursives (A) libres.

<u>THEOREME 4.11</u> Soit A, une petite catégorie. Il existe une catégorie primitive récursive (A) libre engendrée par A.

<u>PREUVE</u> Nous donnons ici la définition du système déductif $\mathcal{D}_A(A)$, la relation d'équivalence servant à définir $L_A(A)$ et la définition, pour tout foncteur $F : A \to \mathcal{B}$ où $\mathcal{B}$ est une catégorie primitive récursive (A), de l'unique foncteur $\tilde{F} : L_A(A) \to \mathcal{B}$ qui vérifie l'égalité $\tilde{F}\eta(A) = F$.

Tous les détails de la preuve sont analogues à ceux du théorème 2.5.

I - Soit $\mathcal{D}_A(\mathcal{A})$, le système déductif suivant:

a) les symboles primitifs sont:

$T \quad N \quad \wedge \quad (\quad) \quad , \quad O \quad I \quad \theta \quad \sigma \quad p \quad q \quad < \quad > \quad : \quad r_A \quad \to$

b) les termes de $\mathcal{D}_A(\mathcal{A})$ sont définis de façon inductive:

1. tout objet de $\mathcal{A}$ est un terme de $\mathcal{D}_A(\mathcal{A})$.
2. T et N sont des termes de $\mathcal{D}_A(\mathcal{A})$ $\quad$ (T et $N \notin |\mathcal{A}|$)
3. Si A et B sont des termes, $(A)\wedge(B)$ est aussi un terme.
4. Ce sont les seuls termes.

c) les expressions suivantes sont les axiomes de $\mathcal{D}_A(\mathcal{A})$:

i) $I(A) : A \to A$, pour tout terme A de $\mathcal{D}_A(\mathcal{A})$,

ii) $O(A) : A \to T$, pour tout terme A de $\mathcal{D}_A(\mathcal{A})$,

iii) $\theta : T \to N$

iv) $\sigma : N \to N$

v) $p(A,B) : (A)\wedge(B) \to A$ pour tous les termes A et B de $\mathcal{D}_A(\mathcal{A})$,

vi) $q(A,B) : (A)\wedge(B) \to B$ pour tous les termes A et B de $\mathcal{D}_A(\mathcal{A})$.

d) les preuves sont définies de façon inductive:

1. les axiomes de $\mathcal{D}_A(\mathcal{A})$ sont des preuves
2. les morphismes $f : X \to Y$ de $\mathcal{A}$ sont des preuves,
3. si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont des preuves, $gf : A \to C$ est une preuve
4. si $f : A \to B$ et $g : A \to C$ sont des preuves, $<f,g> : A \to (B)\wedge(C)$ est aussi une preuve.
5. si je définis $N^0 = T$, $N^1 = N$, $N^{n+1} = (N^n)\wedge(N)$ et si $g : N^n \to N$ et $h : N^{n+2} \to N$ où $n \in \mathbb{N}^+$, sont des preuves, $r_A(g,h) : N^{n+1} \to N$ est aussi une preuve.
6. Ce sont les seules preuves.

e) Si $f : A \to B$ est une preuve de $\mathcal{D}_A(\mathcal{A})$,

A est appelé domaine de f,

B est appelé codomaine de f.

II - Définissons $\mathcal{L}_A(\mathcal{A})$

a) les objets de $\mathcal{L}_A(\mathcal{A})$ sont les termes de $\mathcal{D}_A(\mathcal{A})$,

b) les morphismes de $\mathcal{L}_A(\mathcal{A})$ sont les classes d'équivalence des preuves de $\mathcal{D}_A(\mathcal{A})$, par rapport à la relation d'équivalence $\equiv_A$ décrite ci-après,

c) la relation d'équivalence $\equiv_A$ sur l'ensemble des preuves de $\mathcal{D}_A(\mathcal{A})$ est la plus petite relation satisfaisant les conditions suivantes:

1. $f \equiv_A f$, pour toute preuve $f : A \to B$ de $\mathcal{D}_A(\mathcal{A})$
2. si $f \equiv_A g$, alors $g \equiv_A f$
3. si $f \equiv_A g$ et $g \equiv_A h$, alors $f \equiv_A h$
4. si $f \equiv_A g$ et $h \equiv_A j$ et $\langle f,h\rangle$ est une preuve, alors $\langle f,h\rangle \equiv_A \langle g,j\rangle$.
5. si $f \equiv_A g$ et $h \equiv_A j$ et hf est une preuve, alors $hf \equiv_A jg$.
6. si $g : N^n \to N$ et $h : N^{n+2} \to N \in \mathcal{D}_A(\mathcal{A})$ et si $g \equiv_A k$ et $h \equiv_A \ell$, alors $r_A(g,h) \equiv_A r_A(k,\ell)$
7. si $f : A \to B$ est une preuve, $fI(A) \equiv_A f$ et $I(B)g \equiv_A g$
8. $I(X) \equiv_A 1_X$, $\forall X \in |\mathcal{A}|$, où $1_X : X \to X$ est le morphisme identité de X dans $\mathcal{A}$.
9. $gf \equiv_A g \circ f$ si $f,g \in \mathcal{A}$ et $g \circ f$ est défini.
10. $f \equiv_A O(A)$, pour toute preuve $f : A \to T$ de $\mathcal{D}_A(\mathcal{A})$
11. $p(A,B)\langle f,g\rangle \equiv_A f$, $\forall f : C \to A$, $g : C \to B \in \mathcal{D}_A(\mathcal{A})$
12. $g(A,B)\langle f,g\rangle \equiv_A g$, $\forall f : C \to A$, $g : C \to B \in \mathcal{D}_A(\mathcal{A})$
13. $\langle p(A,B)f, q(A,B)f\rangle \equiv_A f$, $\forall f : C \to A \wedge B \in |\mathcal{A}|$

14. $r_A(g,h)<I(N^n),\theta 0(N^n)> \equiv_A g$ pour toute preuve $g : N^n \to N$ et toute preuve $h : N^{n+2} \to N$ de $\mathcal{D}_A(A)$, $\forall n\in N^+$.

15. $h<I(N^{n+1}), r_A(g,h)> \equiv_A r_A(g,h)<p(N^n,N),\sigma q(N^n,N)>$ pour toute preuve $g : N^n \to N$ et toute preuve $h : N^{n+2} \to N$ de $\mathcal{D}_A(A)$, $\forall n\in N^+$.

d) Regardons la relation "$R(f,g)$ si et seulement si domaine f = domaine g et codomaine f = codomaine g" sur l'ensemble des preuves de $\mathcal{D}_A(A)$. Cette relation satisfait toutes les conditions ci-haut mentionnées. Comme $\equiv_A$ est la plus petite relation satisfaisant ces conditions, $f \equiv_A g \Rightarrow R(f,g)$ c'est-à-dire si $f \equiv_A g$, domaine f = domaine g et codomaine f = codomaine g.
Nous pouvons donc définir domaine $[f]$ = domaine f, codomaine $[g]$ = codomaine g, où $[f]$ = classe d'équivalence par rapport à $\equiv_A$ de f.

e) Les morphismes de $L_A(A)$ sont donc les classes d'équivalence de $\mathcal{D}_A(A)$ par rapport à $\equiv_A$.
La loi de composition est définie comme suit:

$$[g][f] = [g\circ f] \text{ où } f : A \to B, \text{ et } g : B \to C \text{ sont des preuves de } \mathcal{D}_A(A).$$

f) Le foncteur $\eta_A(A) : A \to L_A(A)$ est défini en envoyant tout objet de A sur lui-même dans $L_A(A)$ et tout morphisme de A sur sa classe d'équivalence dans $L_A(A)$, tout morphisme de A étant une preuve de $\mathcal{D}_A(A)$.
Tout comme dans la preuve du théorème 2.5, nous pouvons vérifier que $\eta(A)$ est un foncteur.

g) Soient B, une catégorie primitive récursive (A) et $F : A \to B$, un foncteur, il existe un et un seul foncteur primitif récursif $\tilde{F} : L_A(A) \to B$ tel que $\tilde{F}\eta_A(A) = F$.

i) Définissons $\bar{F} : \mathcal{D}_A(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$ de façon inductive

α) sur les termes de $\mathcal{D}_A(\mathcal{A})$:

pour tout objet A de $\mathcal{A}$, $\bar{F}(A) = F(A)$

pour les termes T et N, $\bar{F}(T) = T_{\mathcal{B}}$ et $\bar{F}(N) = N_{\mathcal{B}}$

pour tout terme de la forme $A \wedge B$, $\bar{F}(A \wedge B) = F(A) \wedge F(B)$

β) sur les preuves de $\mathcal{D}_A(\mathcal{A})$:

1. pour les axiomes de $\mathcal{D}_A(\mathcal{A})$,

$$\begin{aligned}
\bar{F}(I(A)) &= I_{\mathcal{B}}(\bar{F}(A)), \quad \text{pour tout terme A de } \mathcal{D}_A(\mathcal{A}) \\
\bar{F}(O(A)) &= O_{\mathcal{B}}(\bar{F}(A)) \\
\bar{F}(\theta) &= \theta_{\mathcal{B}} \\
\bar{F}(\sigma) &= \sigma_{\mathcal{B}} \\
\bar{F}(p(A,B)) &= p_{\mathcal{B}}(\bar{F}(A),\bar{F}(B)) \\
\bar{F}(q(A,B)) &= q_{\mathcal{B}}(\bar{F}(A),\bar{F}(B))
\end{aligned}$$

2. pour tout morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{A}$, $\bar{F}(f) = F(f) : F(X) \to F(Y)$

3. $\bar{F}(gf) = \bar{F}(g)\bar{F}(f)$, $\forall\, f : A \to B,\ g : B \to C \in \mathcal{D}_A(\mathcal{A})$

4. $\bar{F}(<f,g>) = <\bar{F}(f),\bar{F}(g)>$, $\forall\, f : A \to B,\ g : B \to C \in \mathcal{D}_A(\mathcal{A})$

5. $\bar{F}(r_A(g,h)) = (r_A)_{\mathcal{B}}(\bar{F}(g),\bar{F}(h))$, $\forall\, g : N^n \to N \in \mathcal{D}_A(\mathcal{A})$,
$\forall\, h : N^{n+2} \to N \in \mathcal{D}_A(\mathcal{A})$

ii) Par des vérifications analogues à celle du théorème 2.5, nous constatons que la relation $\#$

$$f : A \to B \ \# \ g : A \to B \iff \bar{F}(f) = \bar{F}(g)$$

satisfait toutes les conditions de $\equiv_A$.

D'où, par définition de $\equiv_A$, nous avons

$$f \equiv_A g \Rightarrow f \ \# \ g \Rightarrow \bar{F}(f) = \bar{F}(g)$$

ce qui nous permet de définir $\tilde{F} : \mathcal{L}_A(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$ de la façon suivante:

$\tilde{F}(A) = \bar{F}(A)$, pour tout objet A de $L_A(A)$.

$\tilde{F}([f]) = \bar{F}(f)$, pour tout morphisme [f] de $L_A(A)$.

Nous pouvons ainsi vérifier (référence: preuve du théorème 2.5) que $\tilde{F} : L_A(A) \to B$ ainsi défini, est l'unique foncteur tel que $\tilde{F}\eta_A(A) = F$.

Donc, $L_A(A)$ est la catégorie primitive récursive (A) libre engendrée par A.

REMARQUE

a) Dans l'écriture des objets, nous omettrons des parenthèses lorsque ceci n'entraîne aucune ambiguité.

b) Par la suite, nous noterons

$I(A) = [I(A)]$, $O(A) = [O(A)]$, $\Theta = [\theta]$, $\hat{\sigma} = [\sigma]$, $p(A,B) = [p(A,B)]$, $q(A,B) = [q(A,B)]$, $r_A([g],[h]) = [r_A(g,h)]$.

4.4 PREUVES DESCRIPTIVES DE $D_A(A)$

Tout comme une description de fonction primitive récursive induit sur $L_A(A)$ un morphisme descriptif, elle induit sur $D_A(A)$ une preuve dite descriptive. Nous verrons par la suite que toute preuve $f : N^n \to N^t$, $n \in N^+$, $t \in N^+$, de $D_A(\phi)$ est équivalente par rapport à $\equiv_A$ à une preuve descriptive et la classe d'équivalence d'une preuve descriptive représente une fonction primitive récursive. Donc, tout morphisme $f : N^n \to N^t$, $n \in N^+$, $t \in N^+$, de $L_A(\phi)$ représente une fonction primitive récursive.

DEFINITION 4.12 Soit A, une petite catégorie. Définissons

$$\kappa_{\mathcal{D}_A(A)} = \text{la preuve } \theta O(N) \text{ de } \mathcal{D}_A(A)$$

$$\delta_{\mathcal{D}_A(A)} = \text{la preuve } \sigma \text{ de } \mathcal{D}_A(A)$$

$$(\pi_{1,1})_{\mathcal{D}_A(A)} = \text{la preuve } I(N) \text{ de } \mathcal{D}_A(A)$$

$$(\pi_{m+1,i})_{\mathcal{D}_A(A)} = \text{la preuve } \pi_{m,i}\ p(N^m,N) \text{ de } \mathcal{D}_A(A),\ \forall i \in [1,m],\ \forall m \in N^+$$

$$(\pi_{m+1,m+1})_{\mathcal{D}_A(A)} = \text{la preuve } q(N^m,N) \text{ de } \mathcal{D}_A(A),\ \forall m \in N^+$$

LEMME 4.13 Soit A, une petite catégorie. La fonction [ ] : preuves de $\mathcal{D}_A(A)$ $\to$ Morphismes de $L_A(A)$ qui envoie toute preuve sur sa classe d'équivalence par rapport à $\equiv_A$, envoie

$$\kappa_{\mathcal{D}_A(A)} \quad \text{sur} \quad \tilde{\kappa}_{L_A(A)},$$

$$\delta_{\mathcal{D}_A(A)} \quad \text{sur} \quad \tilde{\delta}_{L_A(A)},$$

$$(\pi_{m,i})_{\mathcal{D}_A(A)} \quad \text{sur} \quad (\tilde{\pi}_{m,i})_{L_A(A)}$$

tels que définis dans les définitions 4.4 et 4.12.

PREUVE

a) $\tilde{\kappa}_{L_A(A)} = \theta\hat{O}(N) = [\theta][O(N)] = [\theta O(N)] = [\kappa_{\mathcal{D}_A(A)}]$

b) $\tilde{\delta}_{L_A(A)} = \hat{\sigma} = [\sigma] = \delta_{\mathcal{D}_A(A)}$

c) Montrons par induction que $(\pi_{m,i})_{\mathcal{D}_A(A)} = (\pi_{m,i})_{L_A(A)}$

i) Pour m = 1, $(\tilde{\pi}_{1,1})_{L_A(A)} = I(N) = [I(N)] = [(\pi_{1,1})_{\mathcal{D}_A(A)}]$

ii) Supposons que $(\tilde{\pi}_{j,i})_{L_A(A)} = [(\pi_{j,i})_{\mathcal{D}_A(A)}]$, $\forall i\in[1,j]$, $\forall j \leq m$

montrons qu'alors $(\tilde{\pi}_{m+1,i})_{L_A(A)} = [(\pi_{m+1,i})_{\mathcal{D}_A(A)}]$, $\forall i\in[1,m+1]$

Pour $i\in[1,m]$,

$$(\tilde{\pi}_{m+1,i})_{L_A(A)} = (\tilde{\pi}_{m,i})_{L_A(A)}\, p(N^m,N) \underset{\text{hypothèse}}{=} [(\pi_{m,i})_{\mathcal{D}_A(A)}]\,[p(N^m,N)] \quad \text{par}$$

$$= [(\pi_{m,i})_{\mathcal{D}_A(A)}\, p(N^n,N)] = [(\pi_{m+1,i})_{\mathcal{D}_A(A)}]$$

Pour i = m+1

$$(\tilde{\pi}_{m+1,m+1})_{L_A(A)} = q(N^m,N) = [q(N^m,N)] = [(\pi_{m+1,m+1})_{\mathcal{D}_A(A)}]$$

Donc, par induction, $(\tilde{\pi}_{m,i})_{L_A(A)} = [(\pi_{m,i})_{\mathcal{D}_A(A)}]$, $\forall i\in[1,m]$, $\forall m\in N^+$.

<u>DEFINITION 4.14</u> Soit A, une petite catégorie et soit $\mathcal{D}$, l'ensemble des descriptions des fonctions primitives récursives. Toute preuve de $\mathcal{D}_A(A)$ qui appartient à l'image de $\mathcal{D}$ sous la fonction α définie ci-après, est appelée preuve descriptive de $\mathcal{D}_A(A)$.

$\alpha : \mathcal{D} \to \mathcal{D}_A(A)$ est la fonction définie de façon inductive par:

i) $\alpha(\kappa) = \kappa_{\mathcal{D}_A(A)}$, $\alpha(\bar{s}) = s_{\mathcal{D}_A(A)}$, $\alpha(\bar{\pi}_{m,i}) = (\pi_{m,i})_{\mathcal{D}_A(A)}$, $\forall i\in[1,m]$, $\forall m\in N^+$

ii) Si $\bar{f} : N^n \to N^m$ et $\bar{g} : N^n \to N$ sont des descriptions et si $\alpha(\bar{f}) : N^n \to N^m$ et $\alpha(\bar{g}) : N^n \to N$ sont définies,

alors $\alpha(<\bar{f},\bar{g}>) = <\alpha(\bar{f}),\alpha(\bar{g})>$

iii) Si $\bar{f} : N^n \to N^m$ et $\bar{g} : N^m \to N^s$ sont des descriptions et si $\alpha(\bar{f}) : N^n \to N^m$ et $\alpha(\bar{g}) : N^m \to N^s$ sont définies,

$\alpha(\bar{g}\bar{f}) = \alpha(\bar{g})\alpha(\bar{f})$

iv) Si $\bar{g} : N^n \to N$ et $\bar{h} : N^{n+2} \to N$ sont des descriptions et si $\alpha(\bar{g}) : N^n \to N$ et $\alpha(\bar{h}) : N^{n+2} \to N$ sont définies,

$\alpha(r(\bar{g},\bar{h})) = r_A(\alpha(\bar{g}),\alpha(\bar{h}))$

<u>LEMME 4.15</u> Soit A, une catégorie. L'ensemble des preuves descriptives de $\mathcal{D}_A(A)$ est fermé sous "le produit par N", la composition et l'opérateur r_A.

<u>PREUVE</u>

a) Si les preuves $h : N^n \to N^m$ et $k : N^n \to N$ de $\mathcal{D}_A(A)$ sont des preuves descriptives, il existe des descriptions $\bar{f} : N^n \to N^m$ et $\bar{g} : N^n \to N$ telles que $\alpha(\bar{f}) = h$ et $\alpha(\bar{g}) = k$. Comme $\mathcal{D}$ est fermée sous le "produit par N", $<\bar{f},\bar{g}> : N^n \to N^{m+1}$ est une description et $\alpha(<\bar{f},\bar{g}>) = <\alpha(\bar{f}),\alpha(\bar{g})> = <h,k>$ par définition de α.

D'où $<h,k>$, le "produit par N" de h et k, est une preuve descriptive.

b) Un raisonnement analogue nous montre que l'ensemble des preuves descriptives est fermée sous la composition et sous l'opérateur r_A.

<u>LEMME 4.16</u> Soit A, une petite catégorie. Si $\beta : \mathcal{D} \to$ Morphismes de $L_A(A)$ est la fonction introduite dans la définition 4.7, $\alpha : \mathcal{D} \to$ Preuves de $\mathcal{D}_A(A)$ est la fonction introduite dans la définition 4.13 et $\lfloor\,\rfloor$: Preuves de $\mathcal{D}_A(A) \to$ Morphismes de $L_A(A)$ est la fonction utilisée dans le lemme 4.13, alors $\beta = \lfloor\,\rfloor\,\alpha$

<u>PREUVE</u> par induction sur la longueur des descriptions.

a) Soit une description $\bar{f}$ dont la longueur est 1.

$\bar{f}$ est alors $\bar{\kappa}$, $\bar{\delta}$ ou $\bar{\pi}_{m,i}$, $\forall i\in[1,m]$, $\forall m\in N^+$

$$[\,]\ \alpha(\bar{\kappa}) = [\,]\ \kappa_{\mathcal{D}_A(A)} = [\kappa_{\mathcal{D}_A(A)}] = \tilde{\kappa}_{L_A(A)} \text{ par le lemme 4.12}$$
$$= \beta(\bar{\kappa})$$

$$[\,]\ \alpha(\bar{\delta}) = [\,]\ \delta_{\mathcal{D}_A(A)} = [\delta_{\mathcal{D}_A(A)}] = \tilde{\delta}_{L_A(A)} \text{ par le lemme 4.12}$$
$$= \beta(\bar{\delta})$$

$$[\,]\ \alpha(\bar{\pi}_{m,i}) = [\,]\ (\pi_{m,i})_{\mathcal{D}_A(A)} = [(\pi_{m,i})_{\mathcal{D}_A(A)}] = (\tilde{\pi}_{m,i})_{L_A(A)} \text{ par le lemme 4.12}$$
$$= \beta(\bar{\pi}_{m,i}),\ \forall i\in[1,m],\ \forall m\in N^+$$

D'où $[\,]\ \alpha(\bar{f}) = \beta(\bar{f})$, pour toute description $\bar{f}$ dont la longueur est 1.

b) Supposons que $[\,]\ \alpha(\bar{f}) = \beta(\bar{f})$ pour toute description de longueur inférieure ou égale à m.

Soit $\bar{f}$, une des description de longueur m+1.

$\bar{f}$ est de la forme $\langle\bar{g},\bar{h}\rangle$, $\bar{h}\bar{g}$ ou $r(\bar{g},\bar{h})$

1) Si $\bar{f} = \langle\bar{g},\bar{h}\rangle$, alors $m+1 = \lambda(\bar{f}) = \lambda(\bar{g}) + \lambda(\bar{h}) + 1$. Donc $\lambda(\bar{g}) \leq m$ et $\lambda(\bar{h}) \leq m$ et par hypothèse, $[\,]\ \alpha(\bar{g}) = \beta(\bar{g})$ et $[\,]\ \alpha(\bar{h}) = \beta(\bar{h})$.

$\beta(\bar{f}) = \beta(<\bar{g},\bar{h}>) = <\beta(\bar{g}),\beta(\bar{h})> = <[\,]\ \alpha(\bar{g}),\ [\,]\ \alpha(\bar{h})> = <[\alpha(\bar{g})],[\alpha(\bar{h})]>$

$= [<\alpha(\bar{g}),\alpha(\bar{h})>] = [\alpha(<\bar{g},\bar{h}>)] = [\,]\ \alpha<\bar{g},\bar{h}> = [\,]\ \alpha(\bar{f})$

ii) Si $\bar{f} = \bar{h}\bar{g}$, alors $m+1 = \lambda(\bar{f}) = \lambda(\bar{g}) + \lambda(\bar{h})$. Comme la longueur d'une description est toujours strictement positive, $\lambda(\bar{g}) \leq m$ et $\lambda(\bar{h}) \leq m$ et par hypothèse, $[\,]\ \alpha(\bar{g}) = \beta(\bar{g})$ et $[\,]\ \alpha(\bar{h}) = \beta(\bar{h})$.

$\beta(\bar{f}) = \beta(\bar{h}\bar{g}) = \beta(\bar{h})\beta(\bar{g}) = [\,]\ \alpha(\bar{h})\ [\,]\ \alpha(\bar{g}) = [\alpha(\bar{h})][\alpha(\bar{g})] = [\alpha(\bar{h})\alpha(\bar{g})]$

$= [\alpha(\bar{h}\bar{g})] = [\alpha(\bar{f})] = [\,]\ \alpha(\bar{f})$

iii) Si $\bar{f} = r(\bar{g},\bar{h})$, alors $m+1 = \lambda(\bar{f}) = \lambda(\bar{g}) + \lambda(\bar{h}) + 1$. Donc $\lambda(\bar{g}) \leq m$ et $\lambda(\bar{h}) \leq m$ et par hypothèse, $[\,]\alpha(\bar{g}) = \beta(\bar{g})$ et $[\,]\ \alpha(\bar{h}) = \beta(\bar{h})$.

$\beta(\bar{f}) = \beta(r(\bar{g},\bar{h})) = r_A(\beta(\bar{g}),\beta(\bar{h})) = r_A([\,]\ \alpha(\bar{g}),\ [\,]\ \alpha(\bar{h}))$

$= r_A([\alpha(\bar{g})],[\alpha(\bar{h})]) = [r_A(\alpha(\bar{g}),\alpha(\bar{h}))] = [\alpha(r_A(\bar{g},\bar{h}))]$

$= [\,]\ \alpha(r_A(\bar{g},\bar{h})) = [\,]\ \alpha\bar{f}$

D'où, si $\lambda(\bar{f}) = m+1$, $\beta(\bar{f}) = [\,]\ \alpha(\bar{f})$

Par induction, $\beta(\bar{f}) = [\,]\ \alpha(\bar{f})$, pour toute description $\bar{f}$. Donc, $\beta = [\,]\ \alpha$.

<u>COROLLAIRE 4.17</u> Soit A, une petite catégorie. Un morphisme de $L_A(A)$ est descriptif si et seulement s'il est la classe d'équivalence d'une preuve descriptive.

<u>PREUVE</u>

a) Si g est un morphisme descriptif, il existe une description $\bar{f}$ telle que $\beta(\bar{f}) = g$. Mais alors $g = \beta(\bar{f}) = [\,]\ \alpha(\bar{f}) = [\alpha(\bar{f})]$. Comme $\alpha(\bar{f})$ est une preuve descriptive, g est la classe d'équivalence d'une preuve descriptive.

b) Si g est la classe d'équivalence d'une preuve descriptive h, alors $g = [h]$ et il existe une description $\bar{f}$ telle que $\alpha(\bar{f}) = h$, h étant descriptive.

D'où $g = [h] = [\alpha(\bar{f})] = [\ ]\alpha(\bar{f}) = \beta(\bar{f})$ et g est un morphisme descriptif.

4.5 SQUELETTE $S_A(\phi)$ DE $L_A(\phi)$

Soit $L_A(\phi)$, la catégorie primitive récursive (A) libre engendrée par ϕ. Examinons certaines propriétés de $L_A(\phi)$ et de $\mathcal{D}_A(\phi)$.

DEFINITION 4.18 A tout objet de $L_A(\phi)$, associons un nombre appelé puissance de l'objet, de façon inductive.

a) $\Pi(T) = 0$, $\Pi(N) = 1$

b) si $\Pi(B)$ et $\Pi(C)$ sont définis, $\Pi((B)\wedge(C)) = \Pi(B) + \Pi(C)$

REMARQUE $\Pi(B)$ est égal au nombre d'apparitions du symbole N dans B.

DEFINITION 4.19 A tout objet de $L_A(\phi)$, associons un nombre appelé longueur de l'objet, de façon inductive.

a) $\rho(T) = 1$, $\rho(N) = 1$

b) si $\rho(B)$ et $\rho(C)$ sont définis, $\rho((B)\wedge(C)) = \rho(B) + \rho(C)$

<u>REMARQUE</u> $\rho(B)$ est égal au nombre d'apparitions des symboles N et T dans B et $\rho(B) \geq 1$, $\forall B \in |L_A(\phi)|$.

<u>LEMME 4.20</u> Soient B et C, deux objets de $L_A(\phi)$, alors $B \wedge C \simeq C \wedge B$.

<u>PREUVE</u> Montrons que $<q(B,C),p(B,C)>$ est l'inverse de $<q(C,B),p(C,B)>$

$$
\begin{aligned}
& <q(C,B),p(C,B)><q(B,C),p(B,C)> \\
&= <q(C,B)<q(B,C),p(B,C)>,p(C,B)<q(B,C),p(B,C)>> \\
&= <p(B,C),q(B,C)> \\
&= I(B \wedge C)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& <q(B,C),p(B,C)><q(C,B),p(C,B)> \\
&= <q(B,C)<q(C,B),p(C,B)>,p(B,C)<q(C,B),p(C,B)> \\
&= <p(C,B),q(C,B)> \\
&= I(C \wedge B)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow <q(B,C),p(B,C)> = <q(C,B),p(C,B)>^{-1}$$

$$\Rightarrow B \wedge C \xrightarrow[\sim]{<q(B,C),p(B,C)>} C \wedge B$$

<u>LEMME 4.21</u> Soient B et C, deux objets de $L_A(\phi)$, si $B \simeq D$ et $C \simeq E$, alors $B \wedge C \simeq D \wedge E$.

<u>PREUVE</u> Soient γ, l'isomorphisme de B à D

β, l'isomorphisme de C à E.

Montrons que $<\gamma p(B,C),\beta q(B,C)>$ est l'inverse de $<\gamma^{-1}p(D,E),\beta^{-1}q(D,E)>$

$$<\gamma p(B,C),\beta q(B,C)><\gamma^{-1}p(D,E),\beta^{-1}q(D,E)>$$
$$= <\gamma p(B,C)<\gamma^{-1}p(D,E),\beta^{-1}q(D,E)>,\beta q(B,C)<\gamma^{-1}p(D,E),\beta^{-1}q(D,E)>>$$
$$= <\gamma\gamma^{-1}p(D,E),\beta\beta^{-1}qD,E)>$$
$$= <p(D,E),q(D,E)>$$
$$= I(D\wedge E)$$

$$<\gamma^{-1}p(D,E),\beta^{-1}q(D,E)><\gamma p(B,C),\beta q(B,C)>$$
$$= <\gamma^{-1}p(D,E)<\gamma p(B,C),\beta q(B,C)>,\beta^{-1}q(D,E)<\gamma p(B,C),\beta q(B,C)>>$$
$$= <\gamma^{-1}\gamma p(B,C),\beta^{-1}\beta q(B,C)>$$
$$= <p(B,C),q(B,C)>$$
$$= I(B\wedge C)$$

D'où $<\gamma p(B,C),\beta q(B,C)> = <\gamma^{-1}p(D,E),\beta^{-1}q(D,E)>^{-1}$

$\Rightarrow B\wedge C \simeq D\wedge E$

<u>LEMME 4.22</u> Dans $L_A(\phi)$, $N^a\wedge N^b \simeq N^{a+b}$, $\forall a\in N$, $\forall b\in N$.

<u>PREUVE</u> par induction sur la valeur de b.

a) Pour $b = 0$, $N^b = N^0 = T$, montrons que $N^a\wedge T \simeq N^a$

Soient $p(N^a,T) : N^a\wedge T \to N^a$ et $<I(N^a),O(N^a)> : N^a \to N^a\wedge T$

$$<I(N^a),O(N^a)>p(N^a,T) = <I(N^a)p(N^a,T),O(N^a)p(N^a,T)>$$
$$= <p(N^a,T),O(N^a\wedge T)>$$
$$= <p(N^a,T),q(N^a,T)>$$
$$= I(N^a\wedge T)$$

$$p(N^a,T)<I(N^a),O(N^a)> = I(N^a)$$
$$\Rightarrow <I(N^a),O(N^a)> = p(N^a,T)^{-1} \text{ et } N^a\wedge T \simeq N^a$$

b) Supposons le résultat vrai pour $b = n$, c'est-à-dire $N^a \wedge N^n \simeq N^{a+n}$.

Soit $\gamma(a,n)$, l'isomorphisme de $N^a \wedge N^n$ dans N^{a+n}.

Soient $<\gamma(a,n)<p(N^a,N^{n+1}),p(N^n,N)q(N^a,N^{n+1})>,q(N^n,N)q(N^a,N^{n+1})>$

$: N^a \wedge N^{n+1} = N^a \wedge (N^n \wedge N) \to N^{a+n} \wedge N = N^{(a+n)+1}$

et $<p(N^a,N^n)\gamma^{-1}(a,n)p(N^{a+n},N),<q(N^a,N^n)\gamma^{-1}(a,n)p(N^{a+n},N),q(N^{a+n},N)>>$

$: N^{(a+n)+1} = N^{a+n} \wedge N \to N^a \wedge (N^n \wedge N) = N^a \wedge N^{n+1}$

$$<p(N^a,N^n)\gamma^{-1}(a,n)p(N^{a+n},N),<q(N^a,N^n)\gamma^{-1}(a,n)p(N^{a+n},N),q(N^{a+n},N)>>$$
$$<\gamma(a,n)<p(N^a,N^{n+1}),p(N^n,N)q(N^a,N^{n+1})>,q(N^n,N)q(N^a,N^{n+1})>$$

$$= <p(N^a,N^n)\gamma^{-1}(a,n)p(N^{a+n},N)<\gamma(a,n)<p(N^a,N^{n+1}),p(N^n,N)q(N^a,N^{n+1})>,$$
$$q(N^n,N)q(N^a,N^{n+1})>,<q(N^a,N^n)\gamma^{-1}(a,n)p(N^{a+n},N),q(N^{a+n},N)>$$
$$<\gamma(a,n)<p(N^a,N^{n+1}),p(N^n,N)q(N^a,N^{n+1})>,q(N^n,N)q(N^a,N^{n+1})>>$$

$$= <p(N^a,N^n)\gamma^{-1}(a,n)\gamma(a,n)<p(N^a,N^{n+1}),p(N^n,N)q(N^a,N^{n+1})>,$$
$$<q(N^a,N^n)\gamma^{-1}(a,n)\gamma(a,n)<p(N^a,N^{n+1}),p(N^n,N)q(N^a,N^{n+1})>,q(N^n,N)q(N^a,N^{n+1})>>$$

$$= <p(N^a,N^{n+1}),<p(N^n,N)q(N^a,N^{n+1}),q(N^n,N)q(N^a,N^{n+1})>>$$

$$= <p(N^a,N^{n+1}),<p(N^n,N),q(N^n,N)>q(N^a,N^{n+1})>$$

$$= <p(N^a,N^{n+1}),I(N^n \wedge N)q(N^a,N^{n+1})>$$

$$= <p(N^a,N^{n+1}),q(N^a,N^{n+1})>$$

$$= I(N^a \wedge N^{n+1})$$

De même,

$$<\gamma(a,n)<p(N^a,N^{n+1}),p(N^n,N)q(N^a,N^{n+1})>,q(N^n,N)q(N^a,N^{n+1})>$$
$$<p(N^a,N^n)\gamma^{-1}(a,n)p(N^{a+n},N),<q(N^a,N^n)\gamma^{-1}(a,n)p(N^{a+n},N),q(N^{a+n},N)>>$$

$$= I(N^{(a+n)+1})$$

D'où $N^a \wedge N^{n+1} \simeq N^{(a+n)+1} = N^{a+(n+1)}$

Par conséquent, $N^a \wedge N^b \simeq N^{a+b}$, $\forall b \in \mathcal{N}$, $\forall a \in \mathcal{N}$

<u>THEOREME 4.23</u> Tout objet B de $L_A(\phi)$ est isomorphe à $N^{\Pi(B)}$.

<u>PREUVE</u> par induction sur la longueur de B.

a) Si $\rho(B) = 1$, $B = T$ ou N

pour $B = T$, $\Pi(T) = 0$ et $N^0 = T$ $\Rightarrow$ $T \simeq T = N^0 = N^{\Pi(T)}$

pour $B = N$, $\Pi(N) = 1$ et $N^1 = N$ $\Rightarrow$ $N \simeq N = N^1 = N^{\Pi(N)}$

b) Supposons le résultat vrai pour tout B de longueur inférieure ou égale à n.

Si $\rho(B) = n+1$, $B = A \wedge C$ et $\rho(B) = \rho(A) + \rho(C) = n+1$.

Comme la longueur d'un terme est toujours plus grande ou égale à 1,

$\rho(A) \leq n$ et $\rho(C) \leq n$ et par hypothèse

$$A \simeq N^{\Pi(A)} \quad , \quad C \simeq N^{\Pi(C)}$$

$$\Rightarrow A \wedge C \simeq N^{\Pi(A)} \wedge N^{\Pi(C)} \simeq N^{\Pi(A)+\Pi(C)} = N^{\Pi(A \wedge C)} = N^{\Pi(B)}$$

c'est-à-dire $B \simeq N^{\Pi(B)}$.

Donc $B \simeq N^{\Pi(B)}$ pour tout objet B de longueur n+1.

Ainsi, par induction, $B \simeq N^{\Pi(B)}$ pour tout objet B de $L_A(\phi)$.

<u>COROLLAIRE 4.24</u> La sous-catégorie pleine $S_A(\phi)$ de $L_A(\phi)$ dont les objets sont les puissances de N, est un squelette de $L_A(\phi)$.

4.6 PREUVES EN FORME NORMALE

Dans les deux sections suivantes, nous introduirons deux formes particulières de preuve et nous verrons que toute preuve de $\mathcal{D}_A(\phi)$ est équivalente par rapport à $\equiv_A$ à une preuve de chacune de ces formes.

DEFINITION 4.25 Les sous-termes d'un terme de $\mathcal{D}_A(\phi)$ sont définis de façon inductive.

1. Le seul sous-terme de T est T; le seul sous-terme de N est N.

2. Si A est un terme de la forme $(B)\wedge(C)$, alors le terme $(B)\wedge(C)$, les sous-termes de B et les sous-termes de C sont les sous-termes de A.

DEFINITION 4.26 A chaque preuve de $\mathcal{D}_A(\phi)$, associons une longueur de façon inductive.

1. Si f est un axiome, $\lambda(f) = 1$.

2. Si f est de la forme gh, $\lambda(f) = \lambda(g)+\lambda(h)$

3. Si f est de la forme $\langle g,h\rangle$, $\lambda(f) = \lambda(g)+\lambda(h)+1$

4. Si f est de la forme $r_A(g,h)$, $\lambda(f) = \lambda(g)+\lambda(h)+1$.

LEMME 4.27 L'ensemble des sous-termes de N^n, $n\in\mathcal{N}^+$, est $\{N^i \mid i\in[1,n]\}$.

PREUVE par induction sur la valeur de n.

a) Pour n=1, le seul sous-terme de N est N. Donc, l'ensemble des sous-termes de N est $\{N\} = \{N^1\} = \{N^i \mid i\in[1,1]\}$.

b) Supposons que l'ensemble des sous-termes de $N^m = \{N^i | i\epsilon[1,m]\}$;

l'ensemble des sous-termes de N^{m+1} ou $N^m \wedge N$

$= \{N^{m+1}\} \cup$ ensemble des sous-termes de N^m $\cup$ ensemble des sous-termes de N

$= \{N^{m+1}\} \cup \{N^i | i\epsilon[1,m]\} \cup \{N\} = \{N^i | i\epsilon[1,m+1]\}$

Donc, par induction, l'ensemble des sous-termes de N^n, $n\epsilon \mathcal{N}^+$, est $\{N^i | i\epsilon[1,n]\}$

<u>LEMME 4.28</u> Toute preuve f de $\mathcal{D}_A(\phi)$ a une des six formes suivantes: g, $<\ell,k>$, $r_A(\ell,k)$, gh, $<\ell,k>h$, $r_A(\ell,k)h$ où g est un axiome, ℓ,k et h sont des preuves.

<u>PREUVE</u> par induction sur la longueur d'une preuve.

a) Si $\lambda(f) = 1$, f est un axiome.

b) Supposons le résultat vrai pour toute preuve de longueur inférieure ou égale à m.

Soit f telle que $\lambda(f) = m+1$, f est alors de la forme $k\ell$, $<k,\ell>$ ou $r_A(k,\ell)$ où k et ℓ sont des preuves de longueur inférieure ou égale à m.

Si f est de la forme $<k,\ell>$ ou $r_A(k,\ell)$, nous avons le résultat désiré.

Si $f = k\ell$, $\lambda(k) \leq m$ car $m+1 = \lambda(f) = \lambda(k)+\lambda(\ell)$.

Donc, par hypothèse, k a une des formes g, $<h,j>$, $r_A(h,j)$, gh, $<h,j>p$ ou $r_A(h,j)p$ où g est un axiome et h,j,p sont des preuves.

Alors, f est de la forme $g\ell$, $<h,j>\ell$, $r_A(h,j)\ell$, $gh\ell$, $<h,j>p\ell$ ou $r_A(h,j)p\ell$, c'est-à-dire f est de la forme $g\ell$, $<h,j>\ell$, $r_A(h,j)\ell$, gt, $<h,j>t$ ou $r_A(h,j)t$ où g est un axiome, ℓ,h,j,t sont des preuves car la composée de deux preuves est une preuve.

D'où, si $\lambda(f) = m+1$, f a une des six formes désirées.

Alors, par induction, toute preuve a une des six formes désirées.

LEMME 4.29 Toute projection p ou q a pour codomaine un sous-terme du domaine et la longueur du domaine de la projection est plus grande que la longueur du codomaine de la projection.

PREUVE Si f est une projection, elle est de la forme

$$p(A,B) = (A)\wedge(B) \to A \quad \text{ou} \quad q(A,B) = A\wedge B \to B$$

domaine $(p(A,B)) = A\wedge B$, codomaine $(p(A,B)) = A$

domaine $(q(A,B)) = A\wedge B$, codomaine $(q(A,B)) = B$.

Par définition, A est un sous-terme de lui-même et tout sous-terme de A est un sous-terme de $A\wedge B$. D'où A est un sous-terme de $A\wedge B$ et codomaine $(p(A,B))$ est un sous-terme de domaine $(p(A,B))$. De même, codomaine $(q(A,B))$ est un sous-terme de domaine $(q(A,B))$.

Par définition, $\rho(A\wedge B) = \rho(A)+\rho(B)$ et $\rho(C) \geq 1$, pour tout terme de $\mathcal{D}_A(\phi)$ ou tout objet de $L_A(\phi)$. Alors, $\rho(A) < \rho(A\wedge B)$ et $\rho(B) < \rho(A\wedge B)$.

D'où $\rho(\text{codomaine } p(A,B)) < \rho(\text{domaine } p(A,B))$

$\rho(\text{codomaine } q(A,B)) < \rho(\text{domaine } q(A,B))$.

DEFINITION 4.30 Les sous-preuves d'une preuve $f : A \to B$ de $\mathcal{D}_A(\phi)$ sont toutes les sous-expressions de f qui sont des preuves.

DEFINITION 4.31 Une preuve de $\mathcal{D}_A(\phi)$ est dite en forme normale si elle n'admet pas de sous-preuve de la forme $p(A,B)\langle \ell,m\rangle$, $q(A,B)\langle \ell,m\rangle$, $I(B)\ell$, $\ell I(A)$.

REMARQUE Nous retrouvons cette idée de preuve normale dans les articles de Prawitz [22] et de Mann [18].

<u>LEMME 4.32</u> Toute sous-preuve d'une preuve en forme normale est en forme normale.

<u>PREUVE</u> Soit g, une sous-preuve d'une preuve f. Si g n'est pas en forme normale, elle admet une sous-preuve h qui est de l'une des formes proscrites. Mais h est une sous-expression de g qui est elle-même une sous-expression de f. D'où la preuve h est une sous-expression de f, donc est une sous-preuve de f. Comme h a une des formes proscrites, f n'est pas en forme normale.

<u>THEOREME 4.33</u> Toute preuve de $\mathcal{D}_A(\phi)$ est équivalente par rapport à $\equiv_A$ à une preuve en forme normale et la longueur de cette dernière est inférieure ou égale à la longueur de la preuve.

<u>PREUVE</u> par induction sur la longueur d'une preuve.

a) Soit f, une preuve de longueur 1. f est un axiome. f ne peut alors être la composition de deux preuves, donc ne peut admettre une sous-preuve de l'une des formes proscrites. Donc f est en forme normale.

b) Supposons le résultat vrai pour toute preuve de longueur inférieure ou égale à n et soit f, une preuve de longueur n+1.

f a une des six formes suivantes: g, $<\ell,k>$, $r_A(\ell,k)$, gh, $<\ell,k>h$ ou $r_A(\ell,k)h$ où g est un axiome et ℓ,k,h sont des preuves.

1. Si $f = g$, $\lambda(f) = 1$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

2. Si $f = gh$, alors $\lambda(f) = n+1$ et $\lambda(g) = 1$ entraînent que $\lambda(h) = n$. Par hypothèse, h est équivalente à une preuve h' qui est en forme normale et $\lambda(h) \geq \lambda(h')$. Alors, $g \equiv_A g$ et $h \equiv_A h'$ entraînent que

$f = gh \equiv_A gh'$ par la condition 5 de la relation $\equiv_A$. Mais gh' est-il en forme normale? Regardons g.

a) Si $g = I(A)$

$f = gh \equiv_A gh' = I(A)h' \equiv_A h' \Rightarrow f \equiv_A h'$ en forme normale et

$\lambda(f) > \lambda(h) \geq \lambda(h')$

b) Si $g = p(A,B)$ ou $q(A,B)$

Si h' n'est pas de la forme $<\ell,k>$ ou $<\ell,k>j$, alors gh' est en forme normale et $\lambda(f) = \lambda(g) + \lambda(h) \geq \lambda(g) + \lambda(h') = \lambda(gh')$

i) Si $h' = <\ell,k>$

$gh' = p(A,B) <\ell,k> \equiv_A \ell$ et ℓ est en forme normale car ℓ est une sous-preuve de h',

ou $gh' = q(A,B) <\ell,k> \equiv_A k$ et k est en forme normale car k est une sous-preuve de h'.

Donc, $f \equiv_A \ell$ ou $f \equiv_A k$, ℓ et k étant en forme normale et

$\lambda(f) > \lambda(h) \geq \lambda(h') > \lambda(\ell)$ ou $\lambda(f) > \lambda(h) \geq \lambda(h') > \lambda(k)$

ii) Si $h' = <\ell,k>j$

$gh' = p(A,B)<\ell,k>j \equiv_A \ell j$ et $\lambda(\ell j) = \lambda(\ell) + \lambda(j)$

ou $gh' = q(A,B)<\ell,k>j \equiv_A kj$ et $\lambda(kj) = \lambda(k) + \lambda(j)$

mais $\lambda(h') \leq \lambda(h) = n$ par hypothèse et

$\lambda(h') = 1 + \lambda(\ell) + \lambda(k) + \lambda(j)$. D'où $\lambda(\ell j) < n$ et $\lambda(kj) < n$ et par hypothèse, il existe des preuves ℓ' et k' en forme normale telles que $\ell j \equiv_A \ell'$, $kj \equiv_A k'$ et $\lambda(\ell j) \geq \lambda(\ell')$, $\lambda(kj) \geq \lambda(k')$. Alors, $gh' \equiv_A \ell j \equiv_A \ell'$ ou $gh' \equiv_A kj \equiv_A k'$.

Donc, $f = gh \equiv_A gh' \equiv_A \ell'$ ou $f = gh \equiv_A gh' \equiv_A k'$, ℓ' et k' étant en forme normale

et $\lambda(f) > \lambda(h) \geq \lambda(h') = 1 + \lambda(\ell) + \lambda(k) + \lambda(j) > \lambda(\ell j) \geq \lambda(\ell')$

ou $\lambda(f) > \lambda(h) \geq \lambda(h') = 1 + \lambda(\ell) + \lambda(k) + \lambda(j) > \lambda(kj) \geq \lambda(k')$

c) Si $g \neq I(A)$, $p(A,B)$ et $q(A,B)$, gh' ne contient pas de sous-preuve proscrite. Donc, gh' est en forme normale.

Nous avons donc démontré que pour toutes les possibilités de g, gh' est toujours équivalente par rapport à $\equiv_A$ à une preuve en forme normale. Par conséquent, $f = gh$ est toujours équivalente par rapport à $\equiv_A$ à une preuve en forme normale qui est de longueur inférieure ou égale à la longueur de f.

3. Si $f = \langle \ell,k \rangle$, $r_A(\ell,k)$, $\langle \ell,k \rangle h$ ou $r_A(\ell,k)h$, $\lambda(f) = 1 + \lambda(\ell) + \lambda(k)$ ou $1 + \lambda(\ell) + \lambda(k) + \lambda(h)$. Donc $\lambda(\ell) < n$, $\lambda(k) < n$, $\lambda(h) < n$ et par hypothèse, il existe des preuves ℓ', k' et h' en forme normale telles que $\ell \equiv_A \ell'$, $h \equiv_A h'$ et $k \equiv_A k'$ et $\lambda(\ell) \geq \lambda(\ell')$, $\lambda(h) \geq \lambda(h')$ et $\lambda(k) \geq \lambda(k')$. Alors f est équivalente par rapport à $\equiv_A$ à une des quatre preuves suivantes: $\langle \ell',k' \rangle$, $r_A(\ell',k')$, $\langle \ell',k' \rangle h'$ ou $r_A(\ell',k')h'$, toutes en forme normale et la longueur de f est plus grande que la longueur de chacune de ces preuves.

Donc, f est toujours équivalente par rapport à $\equiv_A$ à une preuve en forme normale qui est de longueur inférieure ou égale à la longueur de f.

<u>COROLLAIRE 4.34</u> (de la preuve du théorème précédent) Toute preuve f de $\mathcal{D}_A(\phi)$ est équivalente par rapport à $\equiv_A$ à une preuve f' en forme normale qui n'utilise que des termes et des axiomes de f et dont le nombre d'interventions de $\langle\ \rangle$ (respectivement de r_A) est inférieur ou égal à celui de f.

4.7 PREUVES EN FORME DESCRIPTIVE

DEFINITION 4.35 Une preuve de $\mathcal{D}_A(\phi)$ est dite en forme descriptive si elle est en forme normale et si n'interviennent dans sa construction que

a) des axiomes ayant pour domaine et codomaine des puissances de N, c'est-à-dire des termes de la forme $N^i, i\in\mathcal{N}$, donc les axiomes $I(N^n)$, $O(N^n)$, θ, σ, $p(N^n,N)$, $q(N^n,N)$, $\forall n\in\mathcal{N}$.

b) que le "produit par N", la récurrence et la composition.

THEOREME 4.36 Toute preuve en forme normale $f : N^n \to N$ de $\mathcal{D}_A(\phi)$ est équivalente par rapport à $\equiv_A$ à une preuve en forme descriptive.

PREUVE par induction sur le nombre m d'interventions de r_A dans la preuve.

I - Pour m=0

Preuve par induction sur la longueur de la preuve f.

a) Si $\lambda(f)=1$

f est un axiome et f est de la forme $N^n \to N$. Donc, f est un des axiomes suivants: $I(N) : N \to N$, $\theta : T \to N$, $\sigma : N \to N$, $q(N^n,N) : N^{n+1} \to N$, $p(N,N) = N^2 \to N$. Tous ces axiomes sont permis, d'où f est en forme descriptive et par conséquent, f est équivalent par rapport à $\equiv_A$ à une preuve en forme descriptive.

b) Supposons le résultat vrai pour toute preuve de N^n dans N, où m=0 et de longueur plus petite ou égale à k, $k\in\mathcal{N}^+$.

Soit f telle que $\lambda(f) = k+1$

f a une des six formes suivantes:

i) g où g est un axiome, ii) $<\ell,k>$, iii) $<\ell,k>h$, iv) $r_A(\ell,k)$, v) $r_A(\ell,k)h$, vi) gh où g est un axiome et h une preuve.

La première forme est impossible car $\lambda(g) = 1 \neq k + 1 = \lambda(f)$. Les formes ii) et iii) sont également impossibles car les codomaines de $<\ell,k>$ et de $<\ell,k>h$ sont des produits de termes et celui de f est N. Finalement, les formes iv) et v) sont à éliminer car il y aurait alors intervention de l'opérateur r_A. D'où $f = g_1h_1$ où $g_1 : A_1 \to N$ est un axiome et $h_1 : N^n \to A_1$ est une preuve.

g_1 peut être θ, $I(N)$, σ, $p(N,N)$ ou $q(N^s,N)$.

1. Si $g_1 = \theta : T \to N$

   $f = g_1h_1 = \theta h_1 \equiv_A \theta O(N^n)$ et $\theta O(N^n)$ est en forme descriptive. D'où f a alors la propriété désirée.

2. Si $g_1 = I(N)$

   $f = I(N)h_1$ et f n'est pas en forme normale, ce qui est impossible.

3. Si $g_1 = \sigma$

   $f = \sigma h_1$ et $\lambda(h_1) = k$ car $k+1 = \lambda(f) = \lambda(\sigma) + \lambda(h_1) = 1 + \lambda(h_1)$. Par hypothèse, il existe une preuve en forme descriptive $\bar{h}_1$ telle que $h_1 \equiv_A \bar{h}_1$. Alors $f \equiv_A \sigma\bar{h}_1$ et, comme l'axiome σ et la composition sont autorisés, $\sigma\bar{h}_1$ est en forme descriptive. D'où f a la propriété désirée.

4. Il nous reste le cas où g_1 est une projection que nous appellerons p_1, une projection étant un axiome de la forme $p(A,B)$ ou $q(A,B)$.

$f = p_1 h_1$, $h_1 : N^n \to A_1$, $p_1 : A_1 \to N$ et $\rho(A_1) > \rho(N) = 1$ et N est un sous-terme de A_1, par le lemme 4.29.

Considérons maintenant $h_1 : N^n \to A_1$

h_1 a l'une des six formes suivantes:

i) $\langle \ell, k \rangle$, ii) $\langle \ell, k \rangle h$, iii) $r_A(\ell, k)$, iv) $r_A(\ell, k)h$,
v) g où g est un axiome, vi) gh ou g est un axiome et h est une preuve.

Les formes i) et ii) ne peuvent se présenter car f aurait une sous-preuve $p_1 \langle \ell, k \rangle$, et ne serait donc pas en forme normale. Il faut également éliminer les formes iii) et iv) car f n'admet pas d'intervention de l'opérateur r_A. Il reste donc les cas v) et vi)

v) Si h_1 est un axiome, $h_1 : N^n \to A_1$ et $\rho(A_1) > 1$

h_1 ne peut être que $I(A_1)$ ou une projection car tous les autres axiomes ont un codomaine de longueur 1.

Si $h_1 = I(A_1) = I(N^n)$, $f = \rho_1 I(N^n)$ et f ne serait pas en forme normale. Donc, h_1 est une projection $p_2 : N^n \to A_1$, $\rho(N^n) > \rho(A_1)$ et A est un sous-terme de N^n. Par conséquent, A_1 est de la forme N^i et $\rho(N^i) = i$. Comme $\rho(A_1) > \rho(N) = 1$, $i > 1$ et ainsi $1 < i < n$. Les seules projections de domaine N^n sont $p(N^{n-1}, N) : N^n \to N^{n-1}$ et $q(N^{n-1}, N) : N^n \to N$. Or, $q(N^{n-1}, N)$ est impossible car A_1 ne peut être N. Donc $p_2 = p(N^{n-1}, N)$.

$f = p_1 p(N^{n-1}, N) \Rightarrow p_1 = p(N^{n-2}, N)$ ou $q(N^{n-2}, N)$ le cas $p(N^{n-2}, N)$ ne peut exister que si $n = 3$.

Si $n = 3$, $f = p(N,N)p(N^2,N)$ ou $q(N,N)p(N^2,N)$

Si $n > 3$, $f = q(N^{n-2},N)p(N^{n-1},N)$

D'où f est en forme descriptive et par conséquent, a la propriété désirée.

vi) Si $h_1 = g_2 h_2$ où g_2 est un axiome, g_2 ne peut être que $I(A_1)$ ou une projection car codomaine $(g_2) = A_1$ et $\rho(A_1) > 1$ et tous les autres axiomes ont un codomaine de longueur 1.

Si $g_2 = I(A_1) : A_1 \to A_1$, f a une sous-preuve de la forme $p_1 I(A_1)$, donc n'est pas en forme normale, ce qui est impossible. Donc, la seule possibilité pour g_2 est d'être une projection que nous noterons $p_2 : A_2 \to A_1$. Ainsi, $\rho(A_2) > \rho(A_1)$ et comme A_1 est alors un sous-terme de A_2, N et A_1 sont des sous-termes de A_2.

D'où $f = p_1 p_2 h_2$ où $p_1 : A_1 \to N$, $p_2 : A_2 \to A_1$, $h_2 : N^n \to A_2$, $\lambda(h_2) = k-1$, N et A_1 sont des sous-termes de A_2 et $\rho(A_2) > \rho(A_1) > \rho(N) = 1$.

Si nous répétons ce raisonnement au maximum (k-1) fois, nous obtenons:

$$\begin{aligned} f &: N^n \to N \\ &= p_1 p_2 \ldots p_s \quad \text{où} \quad \begin{array}{ll} p_i : \text{projection}, & \forall i \in [1,s]. \\ p_1 : A_1 \to N, & \\ p_i : A_i \to A_{i-1}, & \forall i \in [2,s-1]. \\ p_s : N^n \to A_{s-1} & \end{array} \end{aligned}$$

et $\rho(N^n) > \rho(A_{s-1}) > \rho(A_{s-2}) > \ldots > \rho(A_2) > \rho(A_1) > \rho(N) = 1$

et $N, A_1, \ldots, A_{s-1}$ sont des sous-termes de N^n.

Ainsi, chaque A_i est de la forme $N^{\alpha(i)}$ et $1 < \alpha(1) < \ldots < \alpha(s-1) < n$. Comme une projection de domaine $N^{\alpha(i)}$ a pour codomaine $N^{\alpha(i)-1}$ ou N,

$$f = p(N,N)p(N^2,N)\dots p(N^{n-2},N)p(N^{n-1},N) \quad \text{ou}$$

$$f = q(N^{n-t-1},N)p(N^{n-t},N)\dots p(N^{n-2},N)p(N^{n-1},N).$$

D'où f est en forme descriptive et a donc la propriété désirée.

Nous venons de démontrer que si $\lambda(f) = k+1$, f est équivalente par rapport à $\equiv_A$ à une preuve en forme descriptive.

Ainsi, par induction, toute preuve $N^n \to N$ en forme normale, n'ayant aucune intervention de r_A, est équivalente par rapport à $\equiv_A$ à une preuve en forme descriptive.

II - <u>$m = v+1$</u>

Supposons que toute preuve $N^n \to N$ en forme normale, ayant au plus v interventions de r_A possède la propriété désirée.

Soit $f : N^n \to N$, en forme normale, ayant v+1 interventions de r_A.

Preuve par induction sur la longueur de la preuve f.

a) <u>Si $\lambda(f) = 1$</u>

f est alors un axiome et n'a aucune intervention de r_A. D'où toute preuve appartenant à la classe des preuves $f : N^n \to N$ en forme normale de longueur 1 et ayant v+1 interventions de r_A possède la propriété désirée car cette classe est vide.

b) Supposons le résultat vrai pour toutes les preuves $N^n \to N$ en forme normale, ayant v+1 interventions de r_A et de longueur inférieure ou égale à k.

<u>Soit f telle que $\lambda(f) = k+1$</u> (f a v+1 interventions de r_A)

f a une des six formes suivantes:

i) g où g est un axiome, ii) $\langle \ell,k\rangle$, iii) $\langle \ell,k\rangle h$, iv) $r_A(\ell,k)$, v) $r_A(\ell,k)h$, vi) gh où g est un axiome et h est une preuve.

La première forme est impossible car $\lambda(g) = 1 \neq k + 1 = \lambda(f)$. Les deux formes suivantes ne peuvent se présenter car les codomaines de $\langle \ell,k\rangle$ et de $\langle \ell,k\rangle h$ sont des produits de termes alors que le codomaine de f est N.

iv) Si $f = r_A(\ell_1,k_1) : N^n \to N$, alors $\ell_1 : N^{n-1} \to N$ et $k_1 : N^{n+1} \to N$. Comme f est en forme normale, ℓ_1 et k_1 le sont aussi, étant des sous-preuves de f. Mais ℓ_1 et k_1 admettent respectivement au maximum v interventions de r_A, les deux ensemble en admettant v puisque $f = r_A(\ell_1,k_1)$ en admet $v+1$.

Par hypothèse, il existe des preuves $\bar{\ell}_1$ et $\bar{k}_1$ en forme descriptive telles que $\ell_1 \equiv_A \bar{\ell}$ et $k_1 \equiv_A \bar{k}_1$.
Alors $f_1 = r_A(\ell_1,k_1) \equiv_A r_A(\bar{\ell}_1,\bar{k}_1)$.
Comme la récurrence est permise dans la forme descriptive, $r_A(\bar{\ell}_1,\bar{k}_1)$ est en forme descriptive.

D'où f_1 a la propriété désirée.

v) Si $f = r_A(\ell_1,k_1)h_1 : N^n \to N$, alors $h_1 : N^n \to N^m$ et $\ell_1 : N^{m-1} \to N$, $k_1 : N^{m+1} \to N$, car une récurrence a toujours pour domaine une puissance de N, autre que T.
Considérons $h_1 : N^n \to N^m$. h_1 a au maximum v interventions de r_A.
Si $d_1 = q(N^{m-1},N)h_1 : N^m \to N$
$d_2 = q(N^{m-2},N)p(N^{m-1},N)h_1 : N^m \to N$
$d_3 = q(N^{m-3},N)p(N^{m-2},N)p(N^{m-1},N)h_1 : N^m \to N$
...

$$d_{m-1} = q(N,N)p(N^2,N)p(N^3,N) \ldots p(N^{m-2},N)p(N^{m-1},N)h_1 : N^m \to N$$

$$d_m = p(N,N)p(N^2,N)p(N^3,N) \ldots p(N^{m-2},N)p(N^{m-1},N)h_1 : N^m \to N$$

alors $h_1 \equiv_A \langle \ldots \langle\langle d_m, d_{m-1}\rangle, d_{m-2}\rangle \ldots\rangle, d_2\rangle, d_1\rangle$

Mais chaque d_i est équivalente à une preuve b_i en forme normale. Chaque d_i a au maximum v interventions de r_A et comme b_i a au plus autant d'interventions de r_A que d_i par le corollaire 4.34, b_i a au plus v interventions de r_A, est en forme normale et a pour domaine N^m et pour codomaine N, $\forall i \in [1,m]$. Par hypothèse, il existe une preuve en forme descriptive z_i telle que $b_i \equiv_A z_i$, $\forall i \in [1,m]$.

$d_i \equiv_A b_i$ en forme normale $\equiv_A z_i$ en forme descriptive, $\forall i \in [1,m]$.

Si $\bar{h}_1 = \langle \ldots \langle z_m, z_{m-1}\rangle, z_{m-2}\rangle, \ldots\rangle, z_2\rangle, z_1\rangle$, $\bar{h}_1$ est en forme descriptive car le "produit par N" est permis, codomaine $(z_i) = N$, $\forall i \in [1,m]$, et alors $h_1 \equiv_A \bar{h}_1$.

Considérons $r_A(\ell_1,k_1)$. Comme dans le cas iv), nous obtenons $\ell_1 \equiv_A \bar{\ell}_1$ et $k_1 \equiv_A \bar{k}_1$ où $\bar{\ell}_1$ et $\bar{k}_1$ sont en forme descriptive. $r_A(\ell_1,k_1) \equiv_A r_A(\bar{\ell}_1,\bar{k}_1)$ et $r_A(\bar{\ell}_1,\bar{k}_1)$ est en forme descriptive. Comme la composition est permise, $r_A(\bar{\ell}_1,\bar{k}_1)\bar{h}_1$ est en forme descriptive et $f = r_A(\ell_1,k_1)h_1 \equiv_A r_A(\bar{\ell}_1,\bar{k}_1)\bar{h}_1$.

D'où f est équivalente par rapport à $\equiv_A$ à une preuve en forme descriptive.

Il nous reste un dernier cas:

vi) $f = g_1 h_1$ où $g_1 : A_1 \to N$ est un axiome et $h_1 : N^n \to A_1$ est une preuve. g peut être θ, $I(N)$, σ, $p(N,N)$ ou $q(N^s,N)$

1. Si $g_1 = \theta$

$f = g_1 h_1 = \theta h_1 \equiv \theta O(N^n)$, d'où f a la propriété voulue.

2. Si $g_1 = I(N)$

   $f = g_1h_1 = I(N)h_1$, d'où f ne serait pas en forme normale, ce qui est impossible.

3. Si $g_1' = \sigma$

   $f = g_1h_1 = \sigma h_1 \Rightarrow h_1 : N^n \to N$ et $\lambda(h_1) = \lambda(f) - \lambda(\sigma) = k+1-1 = k$. Comme f a v+1 interventions de r_A et $f = \sigma h_1$, h_1 a v+1 interventions de r_A et $\lambda(h_1) = k$. Par hypothèse, il existe une preuve h_1 en forme descriptive telle que $h_1 \equiv \bar{h}_1$. Par conséquent, $f = \sigma h_1 \equiv_A \sigma\bar{h}_1$, et comme l'axiome σ et la composition sont autorisés, $\sigma\bar{h}_1$ est en forme descriptive et f a la propriété voulue.

4. Il nous reste le cas où g_1 est une projection p_1, $f = p_1h_1$ où $p_1 : A_1 \to N$ et $h_1 = N^n \to A_1$, $\rho(A_1)>\rho(N) = 1$ et N est un sous-terme de A_1.

   Regardons $h_1 : N^n \to A_1$.

   h_1 a une des six formes suivantes:

   a) $<\ell,k>$, b) $<\ell,k>h$, c) $r_A(\ell,k)$, d) $r_A(\ell,k)h$,

   e) g où g est un axiome, f) gh où g est un axiome et h, une preuve.

   Les cas a) et b) sont impossibles car f aurait alors une sous-preuve $p_1<\ell,k>$; elle ne serait donc pas en forme normale. On doit également éliminer les cas c) et d) car codomaine $r_A(\ell,k)$ = codomaine $r_A(\ell,k)h = N$ et $\rho(N) = 1$ alors que codomaine $(h_1) = A_1$ et $\rho(A_1) > 1$.

Cas e) et f) $h_1 = g_2$ ou g_2h_2 et $g_2 : A_2 \to A_1$ (dans le cas e, $A_2 = N^n$)

Comme $\rho(A_1) > 1$, g_2 ne peut être que $I(A_1)$ ou une projection car tous les autres axiomes ont un codomaine de longueur 1.

Si $g_2 = I(A_1) : A_1 \to A_1$, $f = p_1h_1 = p_1g_2$ ou $p_1g_2h_2 = p_1I(A_1)$ ou $p_1I(A_1)h_2$; alors f a une sous-preuve $p_1I(A_1)$, donc n'est pas en forme normale, ce qui est impossible.

D'où $g_2 \neq I(A_1)$ et alors g_2 est une projection $p_2 : A_2 \to A_1$, $\rho(A_2) > \rho(A_1)$, A_1 est sous-terme de A_2. Donc N et A_1 sont des sous-termes de A_2.

Donc, dans le cas e), $h_1 = g_2h_2 = p_2h_2$ implique que $f = p_1h_1 = p_1p_2$ et alors f n'a aucune intervention de r_A, ce qui est impossible. Dans le cas f), $h_1 = g_2h_2 = p_2h_2$ implique que $f = p_1p_2h_2$ où $p_1 : A_1 \to N$, $p_2 : A_2 \to A_1$, $h_2 : N^n \to A_2$, $\lambda(h_2) = k - 1$; N et A_1 sont des sous-termes de A_2 et $\rho(A_2) > \rho(A_1) > \rho(N)$.

En répétant ce raisonnement au maximum (k-1) fois, nous obtenons $f = p_1p_2 \cdots p_s$ où p_i est une projection, $\forall i \in [1,s]$. Donc, f n'admet aucune intervention de r_A, ce qui est impossible.

Ainsi si $f = g_1h_1$, f est équivalente par rapport à $=_A$ à une preuve en forme descriptive.

Nous venons de montrer que si $\lambda(f) = k+1$ et f a v+1 interventions de r_A, f étant en forme normale, f ne peut avoir la forme i) g = axiome, ii) $\langle \ell, k \rangle$, iii) $\langle \ell, k \rangle h$. Si f a la forme iv), v) ou vi), f a la propriété désirée. Par conséquent, toute preuve en forme normale de longueur k+1 et ayant v+1 interventions de r_A est équivalente à une preuve en forme descriptive.

Donc, par induction, toute preuve ayant v+1 interventions de r_A est équivalente à une preuve en forme descriptive.

I et II nous permettent de conclure par induction que toute preuve $N^n \to N$ en forme normale est équivalente à une preuve en forme descriptive.

COROLLAIRE 4.37 Toute preuve en forme normale $N^n \to N^m$, $m \in N^+$, de $\mathcal{D}_A(\phi)$ est équivalente par rapport à $\equiv_A$ à une preuve en forme descriptive.

PREUVE par induction sur m.

a) Si m = 1

Nous avons le résultat par le théorème précédent.

b) Si m = k+1

Supposons que toute preuve en forme normale $N^n \to N^i$ est équivalente à une preuve en forme descriptive, $\forall i \in [1,k]$.

Soit $f : N^n \to N^{k+1} = N^k \wedge N$, alors $f \equiv_A I(N^{k+1})\ f \equiv_A \langle p(N^k,N), q(N^k,N)\rangle f$

$$\equiv_A \langle p(N^k,N)f,\ q(N^k,N)f\rangle.$$

Par le théorème 4.33, il existe des preuves f_1 et f_2 en forme normale telles que $p(N^k,N)\ f \equiv_A f_1 : N^n \to N^k$ et $q(N^k,N)f \equiv_A f_2 : N^n \to N$.

Alors $f \equiv_A \langle p(N^k,N)f,\ q(N^k,N)f\rangle \equiv_A \langle f_1, f_2\rangle$.

Or, par hypothèse, il existe des preuves en forme descriptive g_1 et g_2 telles que $f_1 \equiv_A g_1$ et $f_2 \equiv_A g_2$. Comme le "produit par N" est permis dans la forme descriptive, $\langle g_1, g_2\rangle$ est en forme descriptive et

$f \equiv_A \langle f_1, f_2\rangle \equiv_A \langle g_1, g_2\rangle$

D'où f est équivalente à une preuve en forme descriptive.

Donc, par induction, toute preuve en forme normale $f : N^n \to N^m$, $m \in \mathcal{N}^+$, est équivalente à une preuve en forme descriptive.

<u>COROLLAIRE 4.38</u> Toute preuve $f : N^n \to N^m$, $m \in \mathcal{N}^+$, de $\mathcal{D}_A(\phi)$ est équivalente par rapport à $\equiv_A$ à une preuve en forme descriptive.

<u>PREUVE</u> Soit $f : N^n \to N^m$, $m \in \mathcal{N}^+$, une preuve de $\mathcal{D}_A(\phi)$. Par le théorème 4.33, il existe une preuve g en forme normale telle que $f \equiv_A g$ et par le corollaire précédent, il existe une preuve h en forme descriptive telle que $g \equiv_A h$. Comme $\equiv_A$ est transitive, $f \equiv_A h$.

4.8 *FONCTIONS REPRÉSENTÉES PAR LES MORPHISMES DE $S_A(\phi)$*

Nous voici en mesure de caractériser les morphismes du squelette $S_A(\phi)$.

<u>THEOREME 4.39</u> Toute preuve $f : N^n \to N^s$, $n \in \mathcal{N}^+$, $s \in \mathcal{N}^+$, en forme descriptive de $\mathcal{D}_A(\phi)$, est équivalente par rapport à $\equiv_A$ à une preuve descriptive.

<u>PREUVE</u> par induction sur la longueur de la preuve f.

a) <u>$\lambda(f) = 1$</u>

Soit $f : N^n \to N^s$, $n \in \mathcal{N}^+$, $s \in \mathcal{N}^+$, dont la longueur est 1; f est alors un des axiomes $I(N^n) : N^n \to N^n$, $\sigma : N \to N$, $p(N^n,N) : N^{n+1} \to N^n$ ou $q(N^n,N) : N^{n+1} \to N$

1. Les axiomes $\sigma = s_{\mathcal{D}_A(\phi)}$ et $q(N^n,N) = (\pi_{n+1,n+1})_{\mathcal{D}_A(\phi)}$ sont des preuves descriptives.

2. Montrons que les axiomes $p(N^n,N)$ sont des preuves descriptives, $\forall n \in \mathcal{N}^+$.

   Pour simplifier la notation, nous omettrons l'indice $\mathcal{D}_A(\phi)$ des preuves descriptives $(\pi_{m,i})_{\mathcal{D}_A(\phi)}$. Tout d'abord, vérifions l'égalité suivante:

$$<\ldots<<\pi_{m+1,1},\pi_{m+1,2}>,\pi_{m+1,3}>\ldots>,\pi_{m+1,m}> = p(N^m,N),\ \forall m \in \mathcal{N}^+$$

   Preuve par induction sur la valeur de m.

   a) <u>$m = 1$</u>

   $\pi_{2,1} = \pi_{1,1}\ p(N,N) = I(N)p(N,N) = p(N,N)$, par définition des $\pi_{m,i}$.

   b) <u>$m = k+1$</u>

   Supposons le résultat vrai pour $m \le k$. Etudions

   $<\ldots<<\pi_{k+2,1},\pi_{k+2,2}>,\pi_{k+2,3}>\ldots>,\pi_{k+2,k+1}$ car $(k+1)+1 = k+2$.

   Mais $<\pi_{k+2,1},\pi_{k+2,2}> = <\pi_{k+1,1}\ p(N^{k+1},N),\ \pi_{k+1,2}\ p(N^{k+1},N)>$

$$= <\pi_{k+1,1},\pi_{k+1,2}>\ p(N^{k+1},N)$$

$$<<\pi_{k+2,1},\pi_{k+2,2}>,\pi_{k+2,3}> = <<\pi_{k+1,1},\pi_{k+1,2}>p(N^{k+1},N),\pi_{k+1,3}p(N^{k+1},N)>$$

$$= <<\pi_{k+1,1},\pi_{k+1,2}>,\pi_{k+1,3}>p(N^{k+1},N)$$

$$<<\pi_{k+2,1},\pi_{k+2,2}>,\ldots>,\pi_{k+2,k}> = <<\pi_{k+1,1},\pi_{k+1,2}>,\ldots>,\pi_{k+1,k}>p(N^{k+1},N)$$

   Par hypothèse $<<\pi_{k+1,1}\pi_{k+1,2}>,\ldots>,\pi_{k+1,k}> = p(N^k,N)$

$$\Rightarrow <<\pi_{k+2,1},\pi_{k+2,2}>,\ldots>,\pi_{k+2,k}> = p(N^k,N)p(N^{k+1},N)$$

$\Rightarrow <\ldots<\pi_{k+2,1},\pi_{k+2,2}>,\ldots>,\pi_{k+2,k}>,\pi_{k+2,k+1}> =$

$<p(N^k,N)p(N^{k+1},N),\ \pi_{k+2,k+1}> = <p(N^k,N)p(N^{k+1},N),\pi_{k+1,k+1}p(N^{k+1},N)>$

$= <p(N^k,N)p(N^{k+1},N),q(N^k,N)p(N^{k+1},N)>$

$= <p(N^k,N),q(N^k,N)>p(N^{k+1},N) = I(N^{k+1})p(N^{k+1},N) = p(N^{k+1},N).$

D'où, par induction,

$<\ldots<<\pi_{m+1,1},\pi_{m+1,2}>,\pi_{m+1,3}>,\ldots>,\pi_{m+1,m}> = p(N^m,N),\ \forall m\in N^+$

Ainsi, $p(N^m,N)$, $\forall m\in N^+$, est une preuve descriptive car l'ensemble des preuves descriptives est fermée sous le "produit par N".

3. Montrons que les axiomes $I(N^n) : N^n \rightarrow N^n$ sont des preuves descriptives.

Pour $n = 1$, $\quad I(N) = \pi_{1,1}$,

Pour $n > 1$, $\quad I(N^n) = <p(N^{n-1},N),q(N^{n-1},N)>$

Donc, $I(N)$ est une preuve descriptive et $I(N^n)$, $n\in N^+$, est le "produit par N" de deux preuves descriptives.

D'où, $I(N^n)$ est une preuve descriptive, $\forall n\in N$.

Donc, si $\lambda(f) = 1$, f est une preuve descriptive et, par conséquent, est équivalente à une preuve descriptive.

b) $\underline{\lambda(f) = m+1}$

Supposons que toute preuve $f : N^n \rightarrow N^s$, $n\in N^+$, $s\in N^+$, en forme descriptive de longueur inférieure ou égale à m est équivalente à une preuve descriptive.

Soit $f : N^n \rightarrow N^s$ dont la longueur est m+1, $m\in N^+$, $n\in N^+$, $s\in N^+$. f a une des six formes suivantes:

i) g où g est un axiome, ii) $<\ell,k>$, iii) $<\ell,k>h$, iv) gh où g est un axiome, h est une preuve, v) $r_A(\ell,k)$, vi) $r_A(\ell,k)h$.

Cas v) et vi) $f = r_A(\ell,k)$ où $r_A(\ell,k)h$ où $\ell : N^t \to N$, $k : N^{t+2} \to N$,

$h = N^n \to N^{t+1}$, $t \in \mathcal{N}^+$.

$\lambda(f) = \lambda(\ell) + \lambda(k) + 1$ ou $\lambda(\ell) + \lambda(k) + 1 + \lambda(h)$

$\Rightarrow$ $\lambda(\ell) \leq m$, $\lambda(k) \leq m$, $\lambda(h) \leq m$ car $\lambda(f) = m+1$.

Par hypothèse, il existe des preuves descriptives ℓ', k' et h' telles $\ell \equiv_A \ell'$, $k \equiv_A k'$ et $h \equiv_A h'$ et alors $f \equiv_A r_A(\ell',k')$ ou $r_A(\ell',k')h'$ qui sont des preuves descriptives car l'ensemble des preuves descriptives est fermée sous la récurrence et la composition.

Cas i) Si f = g, un axiome, $m+1 = \lambda(f) = \lambda(g) = 1$, ce qui est impossible car m est plus grand que zéro.

Cas ii) $f = <\ell,k>$ où $\ell : N^n \to N^t$, $k : N^n \to N$, $t \in \mathcal{N}^+$ et $f : N^n \to N^{t+1}$

$m+1 = \lambda(f) = 1 + \lambda(\ell) + \lambda(k) \Rightarrow \lambda(\ell) \leq m$ et $\lambda(k) \leq m$.

Par hypothèse, il existe des preuves descriptives ℓ' et k' telles que $\ell \equiv_A \ell'$ et $k \equiv_A k'$.

Alors $f \equiv_A <\ell',k'>$ où $\ell' : N^n \to N^t$, $k' : N^n \to N$ et $<\ell',k'>$ est une preuve descriptive car l'ensemble des preuves descriptives est fermée sous le "produit par N".

Cas iii) $f = <\ell,k>h$, où $h : N^n \to N^t$, $\ell : N^t \to N^w$, $k : N^t \to N$, $w \in \mathcal{N}^+$.

$f \equiv_A <\ell h,kh>$ et $\ell h : N^n \to N^t \to N^w$ où $w \in \mathcal{N}^+$,

$kh : N^n \to N^t \to N$. L'équation $m+1 = \lambda(f) = 1 + \lambda(\ell) + \lambda(k) + \lambda(h)$ implique que $\lambda(\ell h) = \lambda(\ell) + \lambda(h) \leq m$ et $\lambda(kh) = \lambda(k) + \lambda(h) \leq m$.

Comme $w \in N^+$, il existe par hypothèse, des preuves descriptives ℓ' et k' telles que $\ell h \equiv_A \ell'$ et $kh \equiv k'$. Alors, $f \equiv_A \langle \ell h, kh \rangle \equiv_A \langle \ell', k' \rangle$, ce qui est une preuve descriptive.

Cas iv) $f = gh$ où g est un axiome, $h : N^n \to N^t$ et $g : N^t \to N^s$.

1) Si $t=0$, $h : N^n \to T$ et $g : T \to N$. Alors $g = \theta : T \to N$ et $f \tilde{=} gh : N^n \to T \to N$.

Si $n=1$, $f : N \to T \to N = \theta 0(N) = \kappa$, ce qui est une preuve descriptive. Si $n \neq 1$, $f : N^n \to T \to N = \theta 0(N) q(N^{n-1}, N) = \kappa q(N^{n-1}, N)$, ce qui est une preuve descriptive, étant la composée de deux preuves descriptives.

2) Si $t \neq 0$, l'équation $m+1 = \lambda(f) = \lambda(g) + \lambda(h)$ implique que $\lambda(h) = m$ car $\lambda(g) = 1$. Par hypothèse, il existe des preuves descriptives g' et h' telles que $g \equiv_A g'$ et $h \equiv_A h'$. Alors, $f \equiv_A g'h'$; $g'h'$ étant une preuve descriptive car l'ensemble des preuves descriptives est fermée sous la composition.

Par conséquent, toute preuve $f : N^n \to N^s$, $n \in N^+$, $s \in N^+$, en forme descriptive de longueur $m+1$ est équivalente à une preuve descriptive.

Alors, par induction, toute preuve $f : N^n \to N^s$, $n \in N^+$, $s \in N^+$, en forme descriptive est équivalente par rapport à $\equiv_A$ à une preuve descriptive.

<u>COROLLAIRE 4.40</u> Toute preuve $f : N^n \to N^s$, $n \in N^+$, $s \in N^+$, de $\mathcal{D}_A(\phi)$ est équivalente à une preuve descriptive.

<u>COROLLAIRE 4.41</u> Tout morphisme $f : N^n \to N^s$, $n \in N^+$, $s \in N^+$, de $\mathcal{L}_A(\phi)$ est descriptif.

<u>COROLLAIRE 4.42</u> Tout morphisme $f : N^n \rightarrow N^s$, $n \epsilon N^+$, $s \epsilon N^+$, de $L_A(\phi)$ représente une fonction primitive récursive.

Pour compléter cette section, il nous reste à caractériser les morphismes $f : T \rightarrow N^n$, $n \epsilon N^+$, de $L_A(\phi)$.

<u>DEFINITION 4.43</u> Une preuve $f : T \rightarrow N^n$, $n \epsilon N^+$, de $\mathcal{D}_A(\phi)$ est dite preuve-produit de nombres naturels si elle est de la forme $<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>$ où $(a_1,\ldots,a_n)\epsilon N^n$. Un morphisme $f : T \rightarrow N^n$, $n \epsilon N^+$, de $L_A(\phi)$ représente un produit de nombres naturels s'il est la classe équivalence d'une preuve-produit de nombres naturels.

<u>THEOREME 4.44</u> Toute preuve en forme descriptive $f : T \rightarrow N^n$, $n \epsilon N^+$, de $\mathcal{D}_A(\phi)$ est équivalente à une preuve-produit de nombres naturels.

<u>PREUVE</u> par induction sur la longueur de la preuve $f : T \rightarrow N^n$, $n \epsilon N^+$.

a) Si $\lambda(f) = 1$, f est un axiome. La seule possibilité est $\theta : T \rightarrow N$. f est alors une preuve-produit de nombres naturels.

b) Supposons le résultat vrai pour toutes les preuves en forme descriptive de longueur inférieure ou égale à m.
Soit $f : T \rightarrow N^n$, une preuve en forme descriptive dont la longueur est m+1, f a l'une des six formes suivantes:

i) g où g est un axiome, ii) $<\ell,k>$, iii) $<\ell,k>h$, iv) $r_A(\ell,k)$,
v) $r_A(\ell,k)h$, vi) gh où g est un axiome, h est une preuve.

Eliminons le cas i) car $\lambda(f) = m+1$ et $\lambda(g) = 1$.

ii) Si $n=1$, codomaine de $f = N$ et f ne peut alors être le produit de deux preuves. Si $n>1$ et $f = \langle \ell,k\rangle$, $\ell : T \to N^{n-1}$ et $k : T \to N$ ont des longueurs égales ou inférieures à m car $m+1 = \lambda(f) = \lambda(\ell) + \lambda(k) + 1$. Alors, par hypothèse, il existe $(a_1,\ldots,a_{n-1}) \in \mathcal{N}^{n-1}$ et $a_n \in \mathcal{N}$ tels que $\ell \equiv_A \langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle\ldots\rangle,\sigma^{a_{n-1}}\theta\rangle$ et $k \equiv_A \sigma^{a_n}\theta$.

Donc, $f = \langle \ell,k\rangle \equiv_A \langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots\rangle,\sigma^{a_n}\theta\rangle$.

iii) Tout comme dans le cas ii), si $n=1$, f ne peut être de la forme $\langle \ell,k\rangle h$. Si $n>1$, $f = \langle \ell,k\rangle h \equiv_A \langle \ell h,kh\rangle$. Comme $m+1 = \lambda(f) = 1 + \lambda(\ell) + \lambda(k) + \lambda(h)$, la longueur des preuves $\ell h : T \to N^{n-1}$ et $kh : T \to N$ est inférieure ou égale à m. Par hypothèse, il existe $(a_1,\ldots,a_{n-1}) \in \mathcal{N}^{n-1}$ et $a_n \in \mathcal{N}$ tels que $\ell h \equiv_A \langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots\rangle,\sigma^{a_{n-1}}\theta\rangle$ et $kh \equiv_A \sigma^{a_n}\theta$. Alors $f \equiv_A \langle \ell h,kh\rangle \equiv_A \langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots\rangle,\sigma^{a_{n-1}}\theta\rangle,\sigma^{a_n}\theta\rangle$.

iv) f ne peut être de la forme $r_A(\ell,k)$ car domaine de $r_A(\ell,k) = N^{n+1}$ et domaine de $f = T = N^0$.

v) Si $f = r_A(\ell,k)h$ où $h : T \to N^{n+1}$, $\ell : N^n \to N$, $k : N^{n+2} \to N$. Comme $m+1 = \lambda(f) = 1 + \lambda(\ell) + \lambda(k) + \lambda(h)$, la longueur de h est inférieure à m et, par hypothèse, il existe $(a_1,\ldots,a_{n+1}) \in \mathcal{N}^{n+1}$ tel que

$h \equiv_A \langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots\rangle,\sigma^{a_n}\theta\rangle,\sigma^{a_{n+1}}\theta\rangle$. Alors,

$f \equiv_A r_A(\ell,k)\ \langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots\rangle,\sigma^{a_n}\theta\rangle,\sigma^{a_{n+1}}\theta\rangle$. Mais par le corollaire 4.42, le morphisme $[r_A(\ell,k)]_A$ représente une fonction primitive récursive. Il existe donc un élément a de $\mathcal{N}$ tel que

$$[r_A(\ell,k)]_A\ [<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots,\sigma^{a_{n+1}}\theta>]_A = [\sigma^a\theta]_A$$

D'où $f \equiv_A \sigma^a\theta$.

vi) Si $f = gh$ où g est un axiome, les seules possibilités pour g sont $p(N^t,N)$, $q(N^t,N)$, $I(N^t)$, θ et σ car f est en forme descriptive. g ne peut être $I(N^t)$ car alors f serait $I(N^t)h$, ce qui contredirait la forme normale de f. Si $g = \theta$, $f = gh = \theta h \equiv_A \theta$ car domaine de $f = T$. Il nous reste trois cas: $p(N^t,N)$ et alors codomaine de $h = N^{t+1}$, $q(N^t,N)$ et codomaine de $h = N^{t+1}$, σ et codomaine de $h = N$. Comme $m+1 = \lambda(f) = \lambda(g) + \lambda(h) = 1 + \lambda(h)$, h satisfait l'hypothèse et il existe $(a_1,\ldots,a_{t+1}) \in \mathcal{N}^{t+1}$, t étant 0 dans le dernier cas, tel que

$h \equiv_A <\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots,\sigma^{a_{t+1}}\theta>$. Alors

$f = p(N^t,N)h \equiv_A <\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots,\sigma^{a_t}\theta>$ ou $f = q(N^t,N)h \equiv_A \sigma^{a_{t+1}}\theta$ ou

$f = \sigma h \equiv_A \sigma^{a_1+1}\theta$.

Nous avons ainsi démontré que si $\lambda(f) = m+1$, alors f est équivalente à une preuve-produit de nombres naturels et par induction, nous pouvons conclure que cette propriété est vérifiée pour toutes les preuves $f : T \to N^n$, $n\in\mathcal{N}^+$, en forme descriptive de $\mathcal{D}_A(\phi)$.

<u>COROLLAIRE 4.45</u> Toute preuve $f : T \to N^n$, $n\in\mathcal{N}^+$ de $\mathcal{D}_A(\phi)$ est équivalente à une preuve-produit de nombres naturels.

<u>COROLLAIRE 4.46</u> Tout morphisme $f : T \to N^n$, $n\in\mathcal{N}^+$ de $\mathcal{L}_A(\phi)$ représente un produit de nombres naturels.

COROLLAIRE 4.47 Les morphismes du squelette $S_A(\phi)$ représentent des fonctions primitives récursives, des produits de nombres naturels ou sont de la forme $O(N^n) : N^n \to T$.

Donc $S_A(\phi)$ possède les deux propriétés désirées: Toute fonction primitive récursive et tout produit de nombres naturels sont représentables dans $S_A(\phi)$. Tout morphisme de $S_A(\phi)$ représente une fonction primitive récursive ou un produit de nombres naturels ou son codomaine est l'objet terminal de $S_A(\phi)$.

II - D'AUTRES STRUCTURES DE CATÉGORIES PRIMITIVES RÉCURSIVES

Dans cette seconde partie, nous étudierons d'autres structures qui génèrent, tout comme la structure de catégorie primitive récursive (A), une catégorie-squelette possédant les deux propriétés suivantes:

a) Toute fonction primitive récursive et tout produit de nombres naturels sont représentables dans cette catégorie-squelette.

b) Tout morphisme de cette catégorie-squelette représente une fonction primitive récursive, un produit de nombres naturels ou est un morphisme ayant pour codomaine l'objet terminal de la catégorie.

Ces structures sont, soit des cas particuliers de structures déjà existantes où l'on demande une certaine forme d'unicité de l'opérateur r ou l'égalité entre certains morphismes, soit des généralisations ou des simplifications de l'opérateur r.

Pour chaque nouvelle structure, nous devrons réintroduire les notions de foncteur primitif récursif et de fonction représentable. Afin d'éviter une répétition de ces définitions, nous les donnons maintenant:

Un foncteur $f : A \to B$, entre deux catégories primitives récursives (X), est récursif (X) s'il préserve strictement la structure de catégorie primitive récursive (X), $X \in \{A,B,\ldots,H,K,L,E+u,\ldots,M+u\}$. Pour ce qui est de la définition de fonction représentable dans une catégorie primitive récursive (X), nous reprenons la définition 4.3 où nous remplaçons A par X, $X \in \{B,C,\ldots,H,K,L,E+u,\ldots,M+u\}$.

4.9 *CATÉGORIES PRIMITIVES RÉCURSIVES* (A+u)

Premièrement, nous allons ajouter l'unicité à la structure de catégorie primitive récursive (A) de la façon suivante.

<u>DEFINITION 4.48</u> Une catégorie A est dite primitive récursive (A+u) si

a) elle est primitive récursive (A).

b) Pour tout morphisme $h : N_A^{n+2} \to N_A$ et tout morphisme $f : N_A^{n+1} \to N_A$ de A, si $f\langle p(N_A^n,N_A),\sigma q(N_A^n,N_A)\rangle = h\langle I(N_A^{n+1}),f\rangle$, alors $f = r_A(f\langle I(N_A^n),\theta 0(N_A^n)\rangle,h)$.

<u>EXEMPLE</u> Comme Ens satisfait la condition d'unicité, Ens est une catégorie primitive récursive (A+u).

PROPRIETES des catégories primitives récursives (A+u).

1. Si A est une catégorie primitive récursive (A+u), toute fonction primitive récursive est représentable dans A, car A est primitive récursive (A). (Corollaire 4.10)

2. Si nous reprenons la preuve du théorème 4.11 où nous remplaçons l'indice A par A+u et où nous ajoutons une seizième condition à la définition de la relation d'équivalence $\equiv_{A+u}$, soit

   16. Pour toute preuve $f : N^{n+1} \to N$ et toute preuve $h : N^{n+2} \to N$, si
   $f\langle p(N^n,N), \sigma q(N^n,N)\rangle \equiv_{A+u} h\langle I(N^{n+1}),f\rangle$, alors
   $r_{A+u}(f\langle I(N^n), \theta 0(N^n)\rangle,h) \equiv_{A+u} f$

   nous constatons que pour toute petite catégorie A, il existe une catégorie primitive récursive (A+u) libre engendrée par A, notée $L_{A+u}(A)$.

THEOREME 4.49 Tout morphisme $f : N^n \to N^t$, $t\in N^+$, de $L_{A+u}(\phi)$, représente une fonction primitive récursive ou un produit de nombres naturels.

PREUVE Soit un morphisme $f : N^n \to N^t$, $t\in N^+$, de $L_{A+u}(\phi)$ et soit $\alpha : N^n \to N^t$, une preuve de $\mathcal{D}_{A+u}(\phi)$ dont la classe d'équivalence par rapport à $\equiv_{A+u}$ est f. Comme $\mathcal{D}_{A+u}(\phi) = \mathcal{D}_A(\phi)$, le morphisme $[\alpha]_A : N^n \to N^t$ de $L_A(\phi)$ représente un produit de nombres naturels si n=0, d'après le corollaire 4.46 ou une fonction primitive récursive g si n≠0, d'après le corollaire 4.42.

a) Si n=0, $\exists(a_1,\ldots,a_t) \in N^t$ tel que $[\alpha]_A = [\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots\rangle,\sigma^{a_t}\theta\rangle]_A$

   c'est-à-dire $\alpha \equiv_A \langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots\rangle,\sigma^{a_t}\theta\rangle$

Comme $\equiv_{A+u}$ satisfait toutes les conditions de $\equiv_A$,

$\alpha \equiv_{A+u} <\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_t}\theta>$.

Alors, si n=0, $f = [\alpha]_{A+u}$ représente un produit de nombres naturels.

b) Si $n\neq 0$, $\alpha<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta> \equiv_A$

$$<\ldots<\sigma^{\pi_{t,1}g(a_1,\ldots,a_n)}\theta,\sigma^{\pi_{t,2}g(a_1,\ldots,a_n)}\theta>,\ldots>,\sigma^{\pi_{t,t}g(a_1,\ldots,a_n)}\theta>,$$

$\forall (a_1,\ldots,a_n) \in N^n$.

Comme $\equiv_{A+u}$ satisfait toutes les conditions de $\equiv_A$

$\alpha<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>\ldots>,\sigma^{a_n}\theta> \equiv_{A+u}$

$$<\ldots<\sigma^{\pi_{t,1}g(a_1,\ldots,a_n)}\theta,\sigma^{\pi_{t,2}g(a_1,\ldots,a_n)}\theta>,\ldots>,\sigma^{\pi_{t,t}g(a_1,\ldots,a_n)}\theta>,$$

$\forall (a_1,\ldots,a_n) \in N^n$.

Donc, $f = [\alpha]_{A+u}$ représente la fonction primitive récursive g.

<u>THEORÈME 4.50</u> La sous-catégorie pleine $S_{A+u}(\phi)$ de $L_{A+u}(\phi)$, où $|S_{A+u}(\phi)| = \{N^i | i\in N\}$, est un squelette de $L_{A+u}(\phi)$.

<u>PREUVE</u> Tout objet E de $L_{A+u}(\phi)$ est isomorphe à $N^{\Pi(E)}$ où $\Pi(E)$ est la puissance de E telle que définie dans 4.18. En effet, comme $|L_{A+u}(\phi)| = |L_A(\phi)|$, le théorème 4.23 nous assure l'existence d'un isomorphisme $\rho(E) : E \to N^{\Pi(E)}$ dans $L_A(\phi)$. Soient $\varepsilon : E \to N^{\Pi(E)}$ et $\delta : N^{\Pi(E)} \to E$ deux preuves de $\mathcal{D}_A(\phi)$ telles que $\rho(E) = [\varepsilon]_A$ et $\rho(E)^{-1} = [\delta]_A$ et $\delta\varepsilon \equiv_A I(E)$, $\varepsilon\delta \equiv_A I(N^{\Pi(E)})$. Comme $\mathcal{D}_A(\phi) = \mathcal{D}_{A+u}(\phi)$ et comme $\equiv_{A+u}$ satisfait les conditions de $\equiv_A$, alors $\delta\varepsilon \equiv_{A+u} I(E)$ et $\varepsilon\delta \equiv_{A+u} I(N^{\Pi(E)})$. D'où $[\delta]_{A+u} : E \to N^{\Pi(E)}$ est un isomorphisme

de $L_{A+u}(\phi)$. Donc, la sous-catégorie pleine $S_{A+u}(\phi)$ où $|S_{A+u}(\phi)| = \{N^i | i \in N\}$ est un squelette de $L_{A+u}(\phi)$.

<u>COROLLAIRE 4.51</u> Toute fonction primitive récursive est représentable dans $S_{A+u}(\phi)$.

<u>PREUVE</u> Toute fonction primitive récursive est représentable dans $L_{A+u}(\phi)$ d'après la propriété 1. Comme tout morphisme de $L_{A+u}(\phi)$ dont le domaine et le codomaine est une puissance de N appartient à $S_{A+u}(\phi)$, toute fonction primitive récursive est représentable dans $S_{A+u}(\phi)$.

Comme le morphisme $\sigma : N \to N$ appartient à $S_{A+u}(\phi)$, tout produit de nombres naturels est représentable dans $S_{A+u}(\phi)$. Ainsi, tout élément de $N^i, i \in N$, ou tout produit de nombres naturels et toute fonction primitive récursive sont représentables dans $S_{A+u}(\phi)$; tout morphisme de $S_{A+u}(\phi)$ représente, soit une fonction primitive récursive, soit un produit de nombres naturels ou est de la forme $O(N^n)$, $n \in N$.

4.10 <u>CATÉGORIES PRIMITIVES RÉCURSIVES (B)</u>

Avant de généraliser l'opérateur r_A des catégories primitives récursives (A), nous allons étudier un autre cas particulier des catégories primitives récursives (A), étude qui nous permettra par la suite de prouver l'équivalence entre certaines catégories.

Dans toute catégorie primitive récursive (A) A, nous pouvons définir l'opérateur suivant $\nabla_A : A(N^2,N) \to A(N^2,N)$

$$h \mapsto r_A(I(N),h<q(N,N)p(N^2,N),q(N^2,N)>)$$

Soient $+$, A, $\dot{-}$, $(\ )^2$, $\surd$, les morphismes suivants:

$$+ = \nabla_A(\sigma q(N,N)), \quad A = \nabla_A(p(N,N))<\theta 0(N),I(N)>, \quad \dot{-} = \nabla_A(Aq(N,N)),$$

$$(\ )^2 = \nabla_A(\sigma+<+<q(N,N),p(N,N)>,p(N,N)>)<\theta 0(N),I(N)>,$$

$$\surd = \nabla_A(+<q(N,N),\dot{-}<\sigma\theta 0(N),+<\dot{-}<\sigma p(N,N),(\ )^2\sigma q(N,N)>,$$
$$\dot{-}<(\ )^2\sigma q(N,N),\sigma p(N,N)>>>>)<\theta 0(N),I(N)>$$

Définissons $\alpha_A = +<(\ )^2+<(\ )^2+,q(N,N)>,p(N,N)> : N^2 \to N$

$$\beta_A = <\dot{-}<I(N),(\ )^2\surd>,\dot{-}<\surd,(\ )^2\surd\surd>> : N \to N^2$$

morphismes que nous retrouvons dans la prochaine définition. Notons que nous avons omis l'indice A de l'objet N afin de faciliter la compréhension des formules.

<u>DEFINITION 4.52</u> Une catégorie A est dite primitive récursive (B) si

a) elle est primitive récursive (A+u),

b) $\beta_A\alpha_A = I(N_a \wedge N_a)$.

<u>REMARQUE</u> Les morphismes $+$, A, $\dot{-}$, $(\ )^2$, $\surd$, α_A et β_A représentent les fonctions addition, antécédent, soustraction non-négative, carré, racine carrée, la fonction $\alpha : N^2 \to N$ définie par $\alpha(a,b) = ((a+b)^2+b)^2+a$, $\forall a \in N$, $\forall b \in N$ et la fonction $\beta : N \to N^2$ définie par $\beta(a) = (a\dot{-}(\surd a)^2, \surd a\dot{-}(\surd(\surd a))^2)$, $\forall a \in N$.

<u>EXEMPLE</u> Comme $\beta\alpha = I(N^2)$, Ens est une catégorie primitive récursive (B).

<u>REMARQUE</u> Lorsqu'il n'y a aucun danger de confusion, nous omettons l'indice

des morphismes α_A et β_A.

PROPRIETES des catégories primitives récursives (B).

1. Tout comme pour les catégories primitives récursives (A+u), toute fonction primitive récursive est représentable dans chaque catégorie primitive récursive (B).

2. Dans la vérification de la propriété 2 des catégories primitives récursives (A+u), si nous remplaçons l'indice A+u par B et ajoutons une autre condition à la définition de la relation d'équivalence $\equiv_B$, soit

   17. $\beta\alpha \equiv_B I(N \wedge N)$

   alors, pour toute petite catégorie A, il existe une catégorie primitive récursive (B) libre engendrée par A, notée $L_B(A)$. (L'expression $\beta\alpha$ que nous retrouvons à gauche de l'équation 17 n'est pas dans le langage formel de $\mathcal{D}_B(A)$. Elle n'est utilisée ici que pour faciliter la compréhension et représente la définition formelle de $\beta\alpha$ où nous ne retrouvons ni +, ni A, $\dot{-}$, $(\ )^2$, $\surd$, ni ∇_A.)

3. En remplaçant dans la preuve du théorème 4.49, l'indice (A+u) par (B), nous constatons que tout morphisme $f : N^n \to N^t$, $t \in N^+$, de $L_B(\phi)$ représente une fonction primitive récursive ou un produit de nombres naturels.

4. Par une preuve analogue à celle du théorème 4.50, la sous-catégorie pleine $S_B(\phi)$ de $L_B(\phi)$, où $|S_B(\phi)| = \{N^i | i \in N\}$, est un squelette de $L_B(\phi)$.

5. Comme dans la section précédente, nous pouvons conclure que "Tout élément de N^i, $i \in N$, ou tout produit de nombres naturels et toute fonction primitive récursive sont représentables dans $S_B(\phi)$; tout morphisme de $S_B(\phi)$ est de

la forme $O(N^n)$, $n \in N$, ou représente une fonction primitive récursive ou un produit de nombres naturels." $S_B(\phi)$ possède donc la propriété désirée.

Avant de terminer cette section, vérifions une autre propriété que possède $L_B(\phi)$, propriété qui se révélera très utile dans la preuve de certains isomorphismes de catégories.

THEOREME 4.53 Pour tout $n \in N$, il existe un morphisme $\alpha_n : N \to N$ dans $L_B(\phi)$ qui admet un inverse à droite.

PREUVE

a) Définissons par induction $\alpha_n : N^n \to N$ et $\beta_n : N \to N^n$ pour $n \geq 1$.

$$\alpha_1 = I(N) \quad , \quad \beta_1 = I(N)$$
$$\alpha_{n+1} = \alpha\langle\alpha_n p(N^n,N), q(N^n,N)\rangle$$
$$\beta_{n+1} = \langle\beta_n p(N,N), q(N,N)\rangle\beta$$

et pour $n = 0$, $\alpha_0 = \theta$, $\beta_0 = O(N)$

b) Montrons par induction que $\beta_n\alpha_n = I(N^n)$ pour $n \geq 1$.

i) Pour $n = 1$ $\quad \beta_1\alpha_1 = I(N)I(N) = I(N)$.

ii) Supposons que $\beta_m\alpha_m = I(N^m)$, montrons que $\beta_{m+1}\alpha_{m+1} = I(N^{m+1})$

$$\beta_{m+1}\alpha_{m+1} = \langle\beta_m p(N,N), q(N,N)\rangle\beta\alpha\langle\alpha_m p(N^m,N), q(N^m,N)\rangle$$

$$= \langle\beta_m p(N,N), q(N,N)\rangle I(N \wedge N)\langle\alpha_m p(N^m,N), q(N^m,N)\rangle$$

par définition d'une catégorie primitive récursive (B)

$$= <\beta_m p(N,N),q(N,N)><\alpha_m p(N^m,N),q(N^m,N)>$$

$$= <\beta_m \alpha_m p(N^m,N),q(N^m,N)>$$

$$= <I(N^m)p(N^m,N),q(N^m,N)> \text{ par hypothèse}$$

$$= <p(N^m,N),q(N^m,N)>$$

$$= I(N^m \wedge N) = I(N^{m+1})$$

Donc, $\beta_n \alpha_n = I(N^n)$, $\forall n \in \mathcal{N}^+$.

c) Pour n = 0, $\beta_0 \alpha_0 = O(N)\theta = O(T) = I(T) = I(N^0)$.

D'où $\beta_n \alpha_n = I(N^n)$, $\forall n \in \mathcal{N}$.

4.11 <u>CATÉGORIES PRIMITIVES RÉCURSIVES (C)</u>

Ici, nous reprenons l'idée de catégorie primitive récursive (A) mais en généralisant l'opérateur r_A.

<u>DEFINITION 4.54</u> Une catégorie $\mathcal{A}$ est primitive récursive (C) si

a) elle est cartésienne

b) elle possède un objet $N_{\mathcal{A}}$, muni d'un morphisme $\sigma_{\mathcal{A}} : N_{\mathcal{A}} \to N_{\mathcal{A}}$ et d'un morphisme $\theta_{\mathcal{A}} : T \to N_{\mathcal{A}}$, où T est l'objet terminal de $\mathcal{A}$.

c) fermée sous un opérateur $(r_C)_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}(A,B) \times \mathcal{A}((A \wedge N_{\mathcal{A}}) \wedge B,B) \to \mathcal{A}(A \wedge N_{\mathcal{A}},B)$, $\forall A,B \in |\mathcal{A}|$ où $\mathcal{A}(A,B)$ représente l'ensemble des morphismes de $\mathcal{A}$ ayant A pour domaine et B pour codomaine, l'opérateur possédant les propriétés suivantes:

Pour tout morphisme $g : A \to B$ et tout morphisme $h : (A\wedge N_A)\wedge B \to B$ de $\mathcal{A}$,

$(r_C)_A(g,h)\langle I(A),\theta_A 0(A)\rangle = g : A \to B$

$(r_C)_A(g,h)\langle p(A,N_A),\sigma q(A,N_A)\rangle = h\langle I(A\wedge N_A),(r_C)_A(g,h)\rangle = A\wedge N_A \to B$

REMARQUE

a) Lorsqu'il n'y a aucun danger de confusion, nous omettrons les indices $\mathcal{A}$ des termes et des morphismes de $\mathcal{A}$.

b) L'opérateur r_C défini ci-dessus représente un opérateur récurrence défini comme suit:

pour $g : A \to B$ et $h : A\times N\times B \to B$, si $f = \text{récurrence}_C^{\circ}(g,h) : A\times N \to B$

$f(a,0) = g(a)$

$f(a,\sigma n) = h(a,n,f(a,n))$, $\forall a\in A$, $\forall n\in N$.

Nous retrouvons ici le schéma de récurrence utilisé par Freyd [5].

EXEMPLE La catégorie des ensembles est une catégorie primitive récursive (C).

THEOREME 4.55 Toute catégorie primitive récursive (C) est primitive récursive (A).

PREUVE Soit $\mathcal{A}$, une catégorie primitive récursive (C). Pour $A = N^n$ et $B = N$, l'opérateur $r_C : \mathcal{A}(N^n,N) \times \mathcal{A}((N^n\wedge N)\wedge N,N) \to \mathcal{A}(N^n\wedge N,N)$, c'est-à-dire $r_C : \mathcal{A}(N^n,N) \times \mathcal{A}(N^{n+2},N) \to \mathcal{A}(N^{n+1},N)$ possède les propriétés suivantes: pour des morphismes $g : N^n \to N$ et $h : N^{n+2} \to N$ de $\mathcal{A}$,

$r_C(g,h)\langle I(N^n),\theta 0(N)\rangle = g$

$$r_C(g,h)\langle p(N^n,N),\sigma q(N^n,N)\rangle = h\langle I(N^n\wedge N),r_C(g,h)\rangle$$
$$= h\langle I(N^{n+1}),r_C(g,h)\rangle$$

Donc, pour $A = N^n$ et $B = N$, l'opérateur $r_C : \mathcal{A}(N^n,N) \times \mathcal{A}(N^{n+2},N) \to \mathcal{A}(N^{n+1},N)$ munit $\mathcal{A}$ d'une structure de catégorie primitive récursive (A).

COROLLAIRE 4.56 Toute fonction primitive récursive est représentable dans chaque catégorie primitive récursive (C).

THEOREME 4.57 Soit $\mathcal{A}$, une catégorie. Il existe une catégorie primitive récursive (C) libre engendrée par $\mathcal{A}$, notée $\mathcal{L}_C(\mathcal{A})$.

PREUVE Nous reprenons encore une fois la preuve du théorème 4.11 où nous remplaçons tous les indices A par C et où nous remplaçons dans I d) la condition 5 par

5. Si $g : A \to B$ et $h : (A\wedge N)\wedge B \to B$ sont des preuves, $r_C(g,h) : A\wedge N \to B$ est aussi une preuve.

et dans II c) les conditions 6, 14 et 15 par

6. Si $f \equiv_C g$ et $h \equiv_C j$ pour $f : A \to B$ et $h : (A\wedge N)\wedge B \to B$, alors $r_C(f,h) \equiv_C r_C(g,j)$

14. $r_C(g,h)\langle I(A),\theta 0(N)\rangle \equiv_C g$ pour $g : A \to B$ et $h : (A\wedge N)\wedge B \to B \in \mathcal{D}_C(\mathcal{A})$.

15. $h\langle I(A\wedge N), r_C(g,h)\rangle \equiv_C r_C(g,h)\langle p(A,N),\sigma q(A,N)\rangle$ pour $g : A \to N$, $h : (A\wedge N)\wedge B \to B \in \mathcal{D}_C(\mathcal{A})$.

Considérons $L_C(\phi)$, la catégorie primitive récursive (C) libre engendrée par ϕ. Toute fonction primitive récursive est représentable dans $L_C(\phi)$. Mais que pouvons-nous dire des fonctions représentées par les morphismes $f : N^n \to N^t$, $n \in N^+$, $t \in N^+$, de $L_C(\phi)$? Premièrement, tous les morphismes $f : N^n \to N^t$, $n \in N^+$, $t \in N^+$, représentent-ils des fonctions?

Nous allons démontrer que tous les morphismes $f : T \to N$ de $L_C(\phi)$ admettent la forme $\sigma^n\theta$, $n \in N$. De là, nous pourrons déduire que tout morphisme morphisme $f : N^n \to N^t$, $n \in N^+$, $t \in N^+$, de $L_C(\phi)$ représente une fonction.

<u>DEFINITION 4.58</u> Définissons la notion de morphisme calculable $f : A \to B$ dans $L_C(\phi)$ de façon inductive:

i) Si $A = T$, $B = T$, $f : T \to T$ est calculable.

ii) Si $A = T$, $B = N$, $f : T \to N$ est calculable s'il existe un $n \in N$ tel que $f = \sigma^n\theta$.

iii) Si $A = T$, $B = C \wedge D$, $f : T \to C \wedge D$ est calculable si $p(C,D)f : T \to C$ et $q(C,D)f : T \to D$ sont calculables.

iv) Si $A \neq T$, $f : A \to B$ est calculable si pour tout morphisme calculable $a : T \to A$, $fa : T \to B$ est calculable.

<u>LEMME 4.59</u> Un morphisme $a : T \to N^n$, $n \in N^+$ est calculable si et seulement s'il existe un élément $(a_1,\ldots,a_n) \in N^n$ tel que $a = \langle \ldots \langle \sigma^{a_1}\theta, \sigma^{a_2}\theta \rangle, \ldots \rangle, \sigma^{a_n}\theta \rangle$.

<u>PREUVE</u> par induction sur n. Pour $n = 1$, le résultat est vérifié par la définition de morphisme calculable.

Supposons l'énoncé vrai pour $n \leq p$. Soit $a : T \to N^{p+1}$. Alors a est calculable

$\Leftrightarrow$ $p(N^p,N)a$ et $q(N^p,N)a$ sont calculables.

$\Leftrightarrow$ $\exists(a_1,\ldots,a_p)\in N^p$ et $a_{p+1}\in N$ tels que $p(N^p,N)a = <\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\ldots>,\sigma^{a_p}\theta>$ et

$q(N^p,N)a = \sigma^{a_{p+1}}\theta$

$\Leftrightarrow$ $a = <p(N^p,N)a,q(N^p,N)a> = <\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_p}\theta>,\sigma^{a_{p+1}}\theta>$

Donc, l'énoncé est vérifié pour $n = p+1$. Par induction, l'énoncé est vrai, $\forall n\in N$, c'est-à-dire un morphisme $a : T \to N^n$, $n\in N$, est calculable si et seulement s'il représente un produit de nombres naturels.

<u>THEOREME 4.60</u> Les morphismes $I(A),O(A),\theta,\sigma,p(A,B),q(A,B)$ de $L_C(\phi)$ sont calculables.

<u>PREUVE</u> La preuve est identique à celle du théorème 2.13 pour les morphismes concernés.

<u>THEOREME 4.61</u> Tout morphisme de $L_C(\phi)$ est calculable.

<u>PREUVE</u> par induction sur la longueur des preuves appartenant à un morphisme. Nous pouvons associer une longueur à chaque preuve de $\mathcal{D}_C(\phi)$ en reprenant la définition 4.26 où nous remplaçons l'indice A par C.

I - Le théorème précédent nous démontre que tout morphisme contenant une preuve de longueur 1 est calculable.

II - Supposons que tous les morphismes contenant une preuve de longueur inférieure ou égale à m sont calculables.

Soit $f : A \to B$, un morphisme contenant une preuve $\tilde{f} : A \to B$ de longueur $m+1$. La preuve $\tilde{f} : A \to B$ est de l'une des formes suivantes:

i) $\tilde{h}\tilde{g}$ où $\tilde{g} : A \to E$ et $\tilde{h} : E \to B$ sont des preuves de $\mathcal{D}_C(\phi)$,

ii) $<\tilde{g},\tilde{h}>$ où $B = E \wedge D$, $\tilde{g} : A \to E$ et $\tilde{h} : A \to D$ sont des preuves de $\mathcal{D}_C(\phi)$,

iii) $r_C(\tilde{g},\tilde{h})$ où $A = E \wedge N$, $\tilde{g} : E \to B$ et $\tilde{h} : (E \wedge N) \wedge B \to B$ sont des preuves de $\mathcal{D}_C(\phi)$.

Pour les cas i) et ii), voir les sections appropriées des preuves des théorèmes 2.16 et 2.14.

Pour le cas iii) où $\tilde{f} = r_C(\tilde{g},\tilde{h})$, $m+1 = \lambda(\tilde{f}) = \lambda(\tilde{g}) + \lambda(\tilde{h}) + 1$. Donc, $\lambda(\tilde{g}) \leq m$ et $\lambda(\tilde{h}) \leq m$ car la longueur de toute preuve est plus grande ou égale à 1. Par hypothèse, les morphismes $g = [\tilde{g}]_C : E \to B$ et $h = [\tilde{h}]_C : (E \wedge N) \wedge B \to B$ sont calculables. Montrons qu'alors $f = [\tilde{f}]_C = [r_C(\tilde{g},\tilde{h})]_C : E \wedge N \to B$ est calculable, c'est-à-dire montrons que $fa : T \to B$ est calculable pour tout morphisme calculable $a : T \to E \wedge N$.

Un morphisme $a : T \to E \wedge N$ est calculable si et seulement si $p(E,N)a : T \to E$ et $q(E,N)a : T \to N$ sont calculables. Et $q(E,N)a : T \to N$ est calculable si et seulement s'il est de la forme $\sigma^n\theta$.

Prouvons par induction sur n que pour tout morphisme calculable $e : T \to E$ et pour tout $n \in N$, $f<e,\sigma^n\theta>$ est calculable.

a) Pour $n = 0$, $f<e,\sigma^0\theta> = f<e,\theta> = r_C(g,h)<e,\theta> = r_C(g,h)<I(E),\theta O(N)>e$ $= ge$ et ge est calculable car g et e sont calculables par hypothèse. Donc, $f<e,\sigma^0\theta>$ est calculable.

b) Supposons que pour $n \leq j$, $f<e,\sigma^n\theta>$ est calculable.

$f\langle e,\sigma^{j+1}\theta\rangle = r_C(g,h)\ \langle e,\sigma\sigma^{j}\theta\rangle = r_C(g,h)\ \langle p(E,N),\sigma q(E,N)\rangle\langle e,\sigma^{j}\theta\rangle$

$= h\langle I(E\wedge N),\ r_C(g,h)\rangle\langle e,\sigma^{j}\theta\rangle = h\langle I(E\wedge N),f\rangle\langle e,\sigma^{j}\theta\rangle = h\langle\langle e,\sigma^{j}\theta\rangle,f\langle e,\sigma^{j}\theta\rangle\rangle$

Par hypothèse, $f\langle e,\sigma^{j}\theta\rangle$ est calculable; ainsi $\langle\langle e,\sigma^{j}\theta\rangle,f\langle e,\sigma^{j}\theta\rangle\rangle$ est calculable. Et comme h est calculable, $h\langle\langle e,\sigma^{j}\theta\rangle,f\langle e,\sigma^{j}\theta\rangle\rangle$ l'est aussi. Par conséquent, $f\langle e,\sigma^{j+1}\theta\rangle$ est calculable.

Par induction, $f\langle e,\sigma^{n}\theta\rangle$ est calculable, $\forall n\in\mathcal{N}$ et ceci pour tout morphisme calculable $e : T \to E$. Donc $f = r_c(g,h)$ est calculable.

Ainsi, si $f : A \to B$ est un morphisme de $L_C(\phi)$ contenant une preuve de longueur $m + 1$, f est calculable.

//

Et nous pouvons conclure par induction que tout morphisme de $L_C(\phi)$ est calculable.

<u>COROLLAIRE 4.62</u> Tout morphisme $f : N^n \to N^t$, $t\in\mathcal{N}^+$, de $L_C(\phi)$ représente une fonction ou un produit de nombres naturels.

<u>PREUVE</u> Si $n = 0$, tout morphisme $f : T \to N^t$, $t\in\mathcal{N}^+$, étant calculable, représente un produit de nombres naturels par le lemme 4.59.

Si $n \neq 0$, pour tout $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathcal{N}^n$, $f\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta\rangle,\ldots\rangle,\sigma^{a_n}\theta\rangle$ est calculable car f et $\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\ldots\rangle,\sigma^{a_n}\theta\rangle$ sont calculables. Donc il existe un élément $(b_1,\ldots,b_t)\in\mathcal{N}^t$ tel que $f\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\ldots\rangle,\sigma^{a_n}\theta\rangle = \langle\ldots\langle\sigma^{b_1}\theta,\sigma^{b_2}\theta\rangle,\ldots\rangle,\sigma^{b_t}\theta\rangle$.

Si je définis $g : \mathcal{N}^n \to \mathcal{N}^t$ par $g(a_1,\ldots,a_n) = (b_1,\ldots,b_t)$, j'obtiens

$f\langle\ldots\langle\sigma^{a_1}\theta,\ldots\rangle,\sigma^{a_n}\theta\rangle = \langle\ldots\langle\sigma^{\pi_{t,1}g(b_1,\ldots,b_t)}\theta,\ldots\rangle,\sigma^{\pi_{t,t}g(b_1,\ldots,b_t)}\theta\rangle$

Donc, f représente la fonction g.

||

Que pouvons-nous dire des fonctions représentées par les morphismes de $L_C(\phi)$? Sont-elles primitives récursives, récursives, ...? Avant de répondre à cette question, nous allons jeter un coup d'oeil à la structure suivante.

4.12 *CATÉGORIES PRIMITIVES RÉCURSIVES (D)*

La structure de catégorie primitive récursive (D) est à la structure de catégorie primitive récursive (C) ce qu'est la structure de catégorie primitive récursive (B) à la structure de catégorie primitive récursive (A). Remarquons que les morphismes $\alpha : N^2 \to N$ et $\beta : N \to N^2$, introduits en 4.52, sont définissables dans toute catégorie primitive récursive (C).

<u>DEFINITION 4.63</u> Une catégorie A est dite primitive récursive (D) si

a) elle est primitive récursive (C),

b) pour tout morphisme $h : (A \wedge N_A) \wedge B \to B$ et tout morphisme $f : A \wedge N_A \to B$ de A, si $f\langle p(A,N_A), \sigma q(A,N_A)\rangle = h\langle I(A \wedge N_A), f\rangle$, alors $f = r_C(f\langle I(A), \theta O(A)\rangle, h)$

c) $\beta\alpha = I(N_A \wedge N_A)$ où β et α sont les morphismes introduits pour la définition 4.52.

<u>EXEMPLE</u> Ens est une catégorie primitive récursive (D).

<u>PROPRIETES</u> des catégories primitives récursives (D).

1. Toute catégorie primitive récursive (D) est primitive récursive (B), la

condition d'unicité dans (B) étant un cas particulier de la condition d'unicité dans (D).

2. Toute fonction primitive récursive est représentable dans chaque catégorie primitive récursive (D).

3. Si nous reprenons la preuve du théorème 4.57 où nous changeons l'indice C par D et où nous ajoutons à la définition de la relation d'équivalence $\equiv_D$ les conditions

   16. Pour toute preuve $f : A \wedge N \to B$ et toute preuve $h : (A \wedge N) \wedge B \to B$, si $f\langle p(A,N), \sigma q(A,N)\rangle \equiv_D h\langle I(A \wedge N), f\rangle$, alors $r_D(f\langle I(A), \theta 0(A)\rangle, h) \equiv_D f$.

   17. $\beta\alpha \equiv_D I(N \wedge N)$

   alors pour toute petite catégorie A, il existe une catégorie primitive récursive (D) libre engendrée par A, notée $L_D(A)$.

4. En se rappelant le corollaire 4.62 et en reprenant la preuve du théorème 4.49 où nous oublions le qualificatif "primitive récursive" des fonctions, nous obtenons que tout morphisme $f : N^n \to N^t$, $t \in N^+$, de $L_D(\phi)$ représente une fonction ou un produit de nombres naturels.

<u>THEOREME 4.64</u> La sous-catégorie pleine $S_C(\phi)$ de $L_C(\phi)$, où $|S_C(\phi)| = \{N^i | i \in N\}$ est un squelette de $L_C(\phi)$. De même, la sous-catégorie pleine $S_D(\phi)$ de $L_D(\phi)$, où $|S_D(\phi)| = \{N^i | i \in N\}$ est un squelette de $L_D(\phi)$.

<u>PREUVE</u> Pour $S_C(\phi)$, nous reprenons la preuve du théorème 4.50 où nous remplaçons l'indice A+u par C, l'égalité $\mathcal{D}_A(\phi) = \mathcal{D}_{A+u}(\phi)$ par $\mathcal{D}_A(\phi) \subset \mathcal{D}_C(\phi)$.

Pour $S_D(\phi)$, nous reprenons le raisonnement ci-dessus en remplaçant l'indice C par D.

<u>THEOREME 4.65</u> $L_B(\phi)$ est une catégorie primitive récursive (D).

<u>PREUVE</u> Nous devons montrer que pour tout morphisme $g : E \to F$ et tout morphisme $h : (E \wedge N) \wedge F \to F$ de $L_B(\phi)$, il existe un morphisme $f : E \wedge N \to F$ tel que

$$f\langle I(E), \theta O(E)\rangle = g$$

$$f\langle p(E,N), \sigma q(E,N)\rangle = h\langle I(E \wedge N), f\rangle$$

Notons $\gamma(E) : E \to N^{\Pi(E)}$ l'isomorphisme de $L_B(\phi)$ dont l'existence est assurée par la propriété 4 des catégories primitives récursives (B) et ce pour chaque objet E de $L_B(\phi)$, et rappelons l'existence des morphismes $\alpha_n : N^n \to N$ de $L_B(\phi)$ qui admettent comme inverse à droite les morphismes $\beta_n : N \to N^n$ (théorème 4.53).

Considérons $\tilde{g} = \alpha_{\Pi(F)} \gamma(F) g \gamma(E)^{-1} : N^{\Pi(E)} \to N$ et

$$\tilde{h} = \alpha_{\Pi(F)}\gamma(F)h\langle\langle\gamma(E)^{-1}p(N^{\Pi(E)},N), q(N^{\Pi(E)},N)\rangle p(N^{\sigma\Pi(E)},N),$$
$$\gamma(F)^{-1}\beta_{\Pi(F)}q(N^{\sigma\Pi(E)},N)\rangle : N^{\sigma\Pi(E)} \wedge N \to N.$$

Alors $r_A(\tilde{g},\tilde{h}) : N^{\sigma\Pi(E)} \to N$ de $L_B(\phi)$ nous donne un morphisme

$$f = \gamma(F)^{-1}\beta_{\Pi(F)}\, r_A(\tilde{g},\tilde{h})\langle\gamma(E)p(E,N), q(E,N)\rangle : E \wedge N \to F.$$

Montrons que f possède les deux propriétés désirées.

$f\langle I(E), \theta O(E)\rangle$

$$= \gamma(F)^{-1}\beta_{\Pi(F)} r_A(\tilde{g},\tilde{h})\langle\gamma(E)p(E,N), q(E,N)\rangle\langle I(E), \theta O(E)\rangle$$

$= \gamma(F)^{-1}\beta_{\Pi(F)}r_A(\tilde{g},\tilde{h})<\gamma(E),\theta 0(E)>$

$= \gamma(F)^{-1}\beta_{\Pi(F)}r_A(\tilde{g},\tilde{h})<I(N^{\Pi(E)}),\theta 0(N^{\Pi(E)})>\gamma(E)$

$= \gamma(F)^{-1}\beta_{\Pi(F)}\tilde{g}\gamma(E)$ par définition de catégorie primitive récursive (B)

$= \gamma(F)^{-1}\beta_{\Pi(F)}\alpha_{\Pi(F)}\gamma(F)g\gamma(E)^{-1}\gamma(E)$

$= \gamma(F)^{-1}\gamma(F)g$

$= g$

$f<p(E,N),\sigma q(E,N)>$

$= \gamma(F)^{-1}\beta_{\Pi(F)}r_A(\tilde{g},\tilde{h})<\gamma(E)p(E,N),q(E,N)><p(E,N),\sigma q(E,N)>$

$= \gamma(F)^{-1}\beta_{\Pi(F)}r_A(\tilde{g},\tilde{h})<\gamma(E)p(E,N),\sigma q(E,N)>$

$= \gamma(F)^{-1}\beta_{\Pi(F)}r_A(\tilde{g},\tilde{h})<p(N^{\Pi(E)},N),\sigma q(N^{\Pi(E)},N)><\gamma(E)p(E,N),q(E,N)>$

$= \gamma(F)^{-1}\beta_{\Pi(F)}h<I(N^{\Pi(E)}),r_A(\tilde{g},\tilde{h})><\gamma(E)p(E,N),q(E,N)>$ par définition de catégorie primitive récursive (B)

$= \gamma(F)^{-1}\beta_{\Pi(F)}\alpha_{\Pi(F)}\gamma(F)h<<\gamma(E)^{-1}p(N^{\Pi(E)},N),q(N^{\Pi(E)},N)>p(N^{\sigma\Pi(E)},N),$

$\gamma(F)^{-1}\beta_{\Pi(F)}q(N^{\sigma\Pi(E)},N)><I(N^{\sigma\Pi(E)}),r_A(\tilde{g},\tilde{h})><\gamma(E)p(E,N),q(E,N)>$

$= h<<\gamma(E)^{-1}p(N^{\Pi(E)},N),q(N^{\Pi(E)},N)>,\gamma(F)^{-1}\beta_{\Pi(F)}r_A(\tilde{g},\tilde{h})><\gamma(E)p(E,N),q(E,N)>$

$= h<<\gamma(E)^{-1}\gamma(E)p(E,N),q(E,N)>,\gamma(F)^{-1}\beta_{\Pi(F)}r_A(\tilde{g},\tilde{h})<\gamma(E)p(E,N),q(E,N)>>$

$= h<I(E\wedge N),f>$

Nous avons ainsi démontré que l'opérateur

$$\Phi : A(E,F) \times A((E\wedge N)\wedge F,F) \to A(E\wedge N,F)$$

$$(\ g\ ,\ h\ ) \to \gamma(F)^{-1}\beta_{\Pi(F)}r_A(\tilde{g},\tilde{h})<\gamma(E)p(E,N),q(E,N)>$$

où $\tilde{g} = \alpha_{\Pi(F)}\gamma(F)g\gamma(E)^{-1}$ et $\tilde{h} = \alpha_{\Pi(F)}\gamma(F)h<<\gamma(E)^{-1}p(N^{\Pi(E)},N),q(N^{\Pi(E)},N>$

$p(N^{\sigma\Pi(E)},N),\gamma(F)^{-1}\beta_{\Pi(F)}q(N^{\sigma\Pi(E)},N)>$ munit $L_B(\phi)$ d'une structure de catégorie primitive récursive (C). En particulier si $E = N^n$ et $F = N$, $\alpha_{\Pi(F)} = \beta_{\Pi(F)} = \gamma(F) = \gamma(F)^{-1} = I(N)$ et $\tilde{g} = g$, $\tilde{h} = h$,

$$\Phi(g,h) = r_B(g,h)<p(N^n,N),q(N^n,N)> = r_B(g,h)$$

Alors $\nabla_D^- : A(N^2,N) \to A(N^2,N)$, défini à l'aide de Φ, égale ∇_A, défini à l'aide de r_A et par conséquent, les morphismes α_D et β_D, définis par la structure de catégorie primitive récursive (D) sont égaux à α_A et β_A de la structure de catégorie primitive récursive (B). Donc $\beta_D\alpha_D = \beta_A\alpha_A = I(N\wedge N)$.

Il nous reste à vérifier que $L_B(\phi)$ satisfait la condition d'unicité d'une catégorie primitive récursive (D).

Soient $j : E\wedge N \to F$ et $h : (E\wedge N)\wedge F \to F$ de $L_B(\phi)$ telles que $j<p(E,N),\sigma q(E,N)> = h<I(E\wedge N),j>$. Nous devons vérifier qu'alors

$$j = \Phi(j<I(E),\theta O(E)>,h)$$

$$= \gamma(F)^{-1}\beta_{\Pi(F)}r_B(\widetilde{j<I(E),\theta O(E)>},\tilde{h})<\gamma(E)p(E,N),q(E,N)>$$

où $\widetilde{j<I(E),\theta O(E)>} = \alpha_{\Pi(F)}\gamma(F)j<I(E),\theta O(E)>\gamma(E)^{-1}$ et

$\tilde{h} = \alpha_{\Pi(F)}\gamma(F)h<<\gamma(E)^{-1}p(N^{\Pi(E)},N),q(N^{\Pi(E)},N)>p(N^{\sigma\Pi(E)},N),\gamma(F)^{-1}\beta_{\Pi(F)}q(N^{\sigma\Pi(E)},N)>$

Mais $j<\gamma(E)^{-1}p(N^{\Pi(E)},N),q(N^{\Pi(E)},N)><p(N^{\Pi(E)},N),\sigma q(N^{\Pi(E)},N)>$

$$= j<\gamma(E)^{-1}p(N^{\Pi(E)},N),\sigma q(N^{\Pi(E)},N)>$$

$$= j<p(E,N),\sigma q(E,N)><\gamma(E)^{-1}p(N^{\Pi(E)},N),q(N^{\Pi(E)},N)>$$

$$= h<I(E\wedge N),j><\gamma(E)^{-1}p(N^{\Pi(E)},N),q(N^{\Pi(E)},N)>$$

$$= h<<\gamma(E)^{-1}p(N^{\Pi(E)},N),q(N^{\Pi(E)},N)>,j<\gamma(E)^{-1}p(N^{\Pi(E)},N),q(N^{\Pi(E)},N)>>$$

$$= h<<\gamma(E)^{-1}p(N^{\Pi(E)},N),q(N^{\Pi(E)},N)>,\gamma(F)^{-1}\beta_{\Pi(F)}\alpha_{\Pi(F)}\gamma(F)j<\gamma(E)^{-1}p(N^{\Pi(E)},N),$$
$$q(N^{\Pi(E)},N)>>$$

$$= h<<\gamma(E)^{-1}p(N^{\Pi(E)},N),q(N^{\Pi(E)},N)>p(N^{\sigma\Pi(E)},N),\gamma(F)^{-1}\beta_{\Pi(F)}q(N^{\sigma\Pi(E)},N)>$$
$$<I(N^{\sigma\Pi(E)}),\alpha_{\Pi(F)}\gamma(F)j<\gamma(E)^{-1}p(N^{\Pi(E)},N),q(N^{\Pi(E)},N)>>$$

$$= \gamma(F)^{-1}\beta_{\Pi(F)}\tilde{h}<I(N^{\sigma\Pi(E)}),\alpha_{\Pi(F)}\gamma(F)j<\gamma(E)^{-1}p(N^{\Pi(E)},N),q(N^{\Pi(E)},N)>>$$

Donc, $\alpha_{\Pi(F)}\gamma(F)j<\gamma(E)^{-1}p(N^{\Pi(E)},N),q(N^{\Pi(E)},N)><p(N^{\Pi(E)},N),\sigma q(N^{\Pi(E)},N)>$

$$= \tilde{h}<I(N^{\sigma\Pi(E)}),\sigma_{\Pi(F)}\gamma(F)j<\gamma(E)^{-1}p(N^{\Pi(E)},N),q(N^{\Pi(E)},N)>>$$

Alors, par la propriété d'unicité d'une catégorie primitive récursive (B)

$$r_A(\alpha_{\Pi(F)}\gamma(F)j<\gamma(E)^{-1}p(N^{\Pi(E)},N),q(N^{\Pi(E)},N)><I(N^{\Pi(E)}),\theta O(N^{\Pi(E)})>,\tilde{h})$$

$$= \alpha_{\Pi(F)}\gamma(F)j<\gamma(E)^{-1}p(N^{\Pi(E)},N),q(N^{\Pi(E)},N)>$$

Et $\alpha_{\Pi(F)}\gamma(F)j<\gamma(E)^{-1}p(N^{\Pi(E)},N),q(N^{\Pi(E)},N)><I(N^{\Pi(E)}),\theta O(N^{\Pi(E)})>$

$$= \alpha_{\Pi(F)}\gamma(F)j<\gamma(E)^{-1},\theta O(N^{\Pi(E)})>$$

$$= \alpha_{\Pi(F)}\gamma(F)j<I(E),\theta O(E)>\gamma(E)^{-1}$$

$$= \widetilde{j<I(E),\theta O(E)}>.$$

D'où $r_A(\widehat{j\langle I(E),\theta O(E)\rangle,\tilde{h}}\rangle = \alpha_{\Pi(F)}\gamma(F)j\langle\gamma(E)^{-1}p(N^{\Pi(E)},N),q(N^{\Pi(E)},N)\rangle$

Et $\gamma(F)^{-1}\beta_{\Pi(F)}r_A(\widehat{j\langle I(E),\theta O(E)\rangle,\tilde{h}})\langle\gamma(E)p(E,N),q(E,N)\rangle = j$

car $\langle\gamma(E)^{-1}p(N^{\Pi(E)},N),q(N^{\Pi(E)},N)\rangle\langle\gamma(E)p(E,N),q(E,N)\rangle = I(E\wedge N)$

Nous avons ainsi démontré l'unicité sur $L_B(\phi)$. Par conséquent, $L_B(\phi)$ est une catégorie primitive récursive (D).

COROLLAIRE 4.66 $L_B(\phi)$ est isomorphe à $L_D(\phi)$.

PREUVE Comme $L_B(\phi)$ est la catégorie primitive récursive (B) libre engendrée par la catégorie vide ϕ et comme $L_D(\phi)$ est primitive récursive (B), il existe un unique foncteur primitif récursif (B) $\Xi_{B,D} : L_B(\phi) \to L_D(\phi)$. De même, comme $L_B(\phi)$ est primitive récursive (D), il existe un unique foncteur primitif récursif (D) $\Xi_{D,B} : L_D(\phi) \to L_B(\phi)$.

Considérons $\Xi_{D,B}\,\Xi_{B,D} : L_B(\phi) \to L_B(\phi)$ et $\Xi_{B,D}\,\Xi_{D,B} : L_D(\phi) \to L_D(\phi)$. Comme tout foncteur primitif récursif (D) est primitif récursif (B), $\Xi_{D,B}$ est primitif récursif (B) et $\Xi_{D,B}\,\Xi_{B,D}$ est l'unique foncteur primitif récursif (B) dont le domaine et le codomaine est $L_B(\phi)$, cet unique foncteur étant en l'occurence $I(L_B(\phi))$.

Donc, $\Xi_{D,B}\,\Xi_{B,D} = I(L_B(\phi))$. Qu'en est-il de $\Xi_{B,D}\,\Xi_{D,B}$? $\Xi_{B,D}$ est un foncteur primitif récursif (B). Serait-il primitif récursif (D)? Il s'agit de vérifier si $\Xi_{B,D}(\Phi(g,h)) = r_D(\Xi_{B,D}(g),\Xi_{B,D}(h))$ pour tous les morphismes $g : E \to F$ et $h : (E\wedge N)\wedge F \to F$ de $L_B(\phi)$.

Comme $f = \Phi(g,h)$, nous avons vu que $\Phi(g,h)\langle I(E),\theta O(E)\rangle = g$ et

$\Phi(g,h)\langle p(E,N),\sigma q(E,N)\rangle = h\langle I(E\wedge N),\Phi(g,h)\rangle$.

Donc $\Xi_{B,D}(\Phi(g,h))<p(E,N),\sigma q(E,N)> = \Xi_{B,D}(h)<I(E,N),\Xi_{B,D}(\Phi(g,h))>$.

Par l'unicité dans $L_D(\phi)$, $\Xi_{B,D}(\Phi(g,h)) = r_D(\Xi_{B,D}(\Phi(g,h))<I(E),\theta O(E)>,\Xi_{B,D}(h))$.

Mais $\Xi_{B,D}(\Phi(g,h))<I(E),\theta O(E)> = \Xi_{B,D}(g)$

Donc $\Xi_{B,D}(\Phi(g,h)) = r_D(\Xi_{B,D}(g),\Xi_{B,D}(h))$ et $\Xi_{B,D}$ est primitif récursif (D).

D'où $\Xi_{B,D}\Xi_{D,B}$ est primitif récursif (D) et est par conséquent égal à $I(L_D(\phi))$.

Donc $\Xi_{D,B}\Xi_{B,D} = I(L_B(\phi)),\Xi_{B,D}\Xi_{D,B} = I(L_D(\phi))$ et alors $L_B(\phi) \simeq L_D(\phi)$
($\simeq$ indique un isomorphisme de catégories).

<u>REMARQUE</u> Dans la preuve précédente, nous notons certains morphismes tels $p(E,N),\gamma(E),\ldots$, de la même façon qu'ils soient éléments de $L_B(\phi)$ ou de $L_D(\phi)$, et nous utilisons les propriétés du foncteur $\Xi_{B,D}$ sans toujours les expliciter.

<u>COROLLAIRE 4.67</u> Tout morphisme $f : N^n \to N^t$, $t \in N^+$, de $L_D(\phi)$ représente une fonction primitive récursive ou un produit de nombres naturels.

<u>PREUVE</u> Soit $f : N^n \to N^t$, $t\in N^+$, de $L_D(\phi)$. $\Xi_{D,B}(f) : N^n \to N^t$ de $L_B(\phi)$ représente une fonction primitive récursive $g : N^n \to N^t$. Alors

$$f<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>$$

$$= \Xi_{B,D}((\Xi_{D,B}f)<\ldots<\sigma^{a_1}\theta,\sigma^{a_2}\theta>,\ldots>,\sigma^{a_n}\theta>) \text{ car } \Xi_{D,B}\sigma = \sigma$$

$$= \Xi_{B,D}(<\ldots<\sigma^{\pi_{t,1}g(a_1,\ldots,a_n)}\theta,\sigma^{\pi_{t,2}g(a_1,\ldots,a_n)}\theta>,\ldots>,\sigma^{\pi_{t,t}g(a_1,\ldots,a_n)}\theta>$$

$$= <\ldots<\sigma^{\pi_{t,1}g(a_1,\ldots,a_n)}\theta,\sigma^{\pi_{t,2}g(a_1,\ldots,a_n)}\theta>,\ldots>,\sigma^{\pi_{t,t}g(a_1,\ldots,a_n)}\theta>$$

Donc, f représente g, une fonction primitive récursive.

<u>COROLLAIRE 4.68</u> Toute fonction primitive récursive et tout élément de $N^i, i \in N$, sont représentables dans $S_D(\phi)$; tout morphisme de $S_D(\phi)$ est de la forme $0(N^i)$, $i \in N$, ou représente une fonction primitive récursive ou un produit de nombres naturels.

Nous voici en mesure de répondre à la question laissée en suspens à la fin de la section précédente.

<u>THEOREME 4.69</u> Tout morphisme $f : N^n \to N^t$, $n \in N^+$, $t \in N^+$, de $L_C(\phi)$ représente une fonction primitive récursive.

<u>PREUVE</u> Soit $f : N^n \to N^t$, $n \in N^+, t \in N^+$, un morphisme de $L_C(\phi)$, soit $\alpha : N^n \to N^t$, une preuve de $\mathcal{D}_C(\phi)$ telle que $[\alpha]_C = f$ et soit g, la fonction représentée par f (corollaire 4.61). Considérons $[\alpha]_D$. Nous avons vu dans la preuve du théorème 4.49 que, si la relation d'équivalence $\equiv_D$ satisfait les conditions de $\equiv_C$, alors $[\alpha]_D$ représente la même fonction que $[\alpha]_C$, donc la fonction g. Or, le corollaire 4.67 nous dit que g est primitive récursive. Par conséquent, f représente une fonction primitive récursive.

<u>COROLLAIRE 4.70</u> Toute fonction primitive récursive et tout élément de $N^i, i \in N$, sont représentables dans $S_C(\phi)$; tout morphisme de $S_C(\phi)$ est de la forme $0(N^i)$, $i \in N$, ou représente une fonction primitive récursive ou un produit de nombres naturels.

<u>COROLLAIRE 4.71</u> Si $g : N^n \to N^t$ et $h : N^{n+1+t} \to N^t$ sont deux fonctions primitives récursives, alors la fonction $f : N^{n+1} \to N^t$ définie par

$f(a_1,\ldots,{}_n,0) = g(a_1,\ldots,a_n)$ et

$f(a_1,\ldots,a_n,m+1) = h(a_1,\ldots,a_n,m,f(a_1,\ldots,a_n,m))$, $\forall\ (a_1,\ldots,a_n,m) \in \mathcal{N}^{n+1}$, est primitive récursive.

En résumé, les foncteurs suivants existent:

$$L_A(\phi) \to L_{A+u}(\phi) \to L_B(\phi) \simeq L_D(\phi)$$

$$L_A(\phi) \to L_C(\phi) \to L_D(\phi)$$

Comme tous ces foncteurs envoient l'objet naturel N et l'objet terminal T du domaine sur l'objet naturel N et l'objet terminal T du codomaine, nous obtenons les foncteurs suivants:

$$\begin{tikzcd} S_A(\phi) \arrow[r] \arrow[d] & S_{A+u}(\phi) \arrow[r] & S_B(\phi) \arrow[d] \\ S_C(\phi) \arrow[rr] & & S_D(\phi) \end{tikzcd}$$

et toutes ces catégories possèdent les propriétés suivantes: "Tous les éléments de $N^i, i \in \mathcal{N}$, et toutes les fonctions primitives récursives y sont représentables. Tous les morphismes de ces catégories sont de la forme $0(N^i), i \in \mathcal{N}$, ou y représentent des éléments de $N^i, i \in \mathcal{N}$, ou des fonctions primitives récursives."

4.13 CATÉGORIES PRIMITIVES RÉCURSIVES (E, F ou G)

Jusqu'ici, nous avons gardé le schéma de récurrence classique ou nous l'avons généralisé. Est-il possible de le simplifier?

Rózsa Péter [21] démontre que l'on peut remplacer le schéma de récurrence dans la définition de la classe des fonctions primitives récursives par un des schémas suivants:

E) $\dfrac{N \xrightarrow{\alpha} N \qquad N^3 \xrightarrow{\beta} N}{N^2 \xrightarrow{\gamma} N}$ tel que $\gamma(a,0) = \alpha(a)$

$\gamma(a,n+1) = \beta(a,n,\gamma(a,n))$

F) $\dfrac{N \xrightarrow{\alpha} N \qquad N^2 \xrightarrow{\beta} N}{N^2 \xrightarrow{\gamma} N}$ tel que $\gamma(a,0) = \alpha(a)$

$\gamma(a,n+1) = \beta(n,\gamma(a,n))$

G) $\dfrac{N^2 \xrightarrow{\beta} N}{N^2 \xrightarrow{\gamma} N}$ tel que $\gamma(a,0) = a$

$\gamma(a,n+1) = \beta(n,\gamma(a,n))$

Nous allons utiliser ces schémas pour construire de nouvelles structures qui, elles aussi, possèderont les deux propriétés qui nous intéressent. Les techniques de Péter ont inspiré quelques-unes des idées utilisées dans les résultats qui suivent.

<u>DEFINITION 4.72</u> Une catégorie A est dite primitive récursive (E, F ou G) si

1. elle est cartésienne,

2. elle possède un objet N_A, muni d'un morphisme $\sigma_A : N_A \to N_A$ et d'un morphisme $\theta_A : T \to N_A$ où T est l'objet terminal de A,

3E. elle est fermée sous un opérateur $(r_E)_A : A(N,N) \times A(N^3,N) \to A(N^2,N)$ possédant les propriétés suivantes:

Pour tout morphisme $g : N \to N$ et tout morphisme $h : N^3 \to N$ de A,

$(r_E)_A(g,h) \quad \langle I(N),\theta O(N)\rangle = g$ et

$(r_E)_A(g,h) \quad \langle p(N,N),\sigma q(N,N)\rangle = h\langle I(N^2),(r_E)_A(g,h)\rangle$

3F. elle est fermée sous un opérateur $(r_F)_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}(N,N) \times \mathcal{A}(N^2,N) \to \mathcal{A}(N^2,N)$ possédant les propriétés suivantes:

Pour tout morphisme $g : N \to N$ et tout morphisme $h : N^2 \to N$ de $\mathcal{A}$,

$(r_F)_{\mathcal{A}}(g,h) \quad \langle I(N),\theta O(N)\rangle = g$ et

$(r_F)_{\mathcal{A}}(g,h) \quad \langle p(N,N),\sigma q(N,N)\rangle = h\langle q(N,N),(r_F)_{\mathcal{A}}(g,h)\rangle$

3G. elle est fermée sous un opérateur $(r_G)_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}(N^2,N) \to \mathcal{A}(N^2,N)$ possédant les propriétés suivantes:

Pour tout morphisme $h : N^2 \to N$,

$(r_G)_{\mathcal{A}}(h) \quad \langle I(N),\theta O(N)\rangle = I(N)$ et

$(r_G)_{\mathcal{A}}(h) \quad \langle p(N,N),\sigma q(N,N)\rangle = h\langle q(N,N),(r_G)_{\mathcal{A}}(h)\rangle$

<u>EXEMPLE</u> Ens est une catégorie primitive récursive (X) où $X \in \{E,F,G\}$.

<u>THEOREME 4.73</u> Toute catégorie primitive récursive (A, E ou F) est une catégorie primitive récursive (E, F ou G).

<u>PREUVE</u> A ⇒ E) Soit $\mathcal{A}$, une catégorie primitive récursive (A). L'opérateur $(r_A)_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}(N,N) \times \mathcal{A}(N^3,N) \to \mathcal{A}(N^2,N)$ possède les propriétés requises par la condition 3E. de la définition 4.72. Donc $\mathcal{A}$ est primitive récursive (E).

E ⇒ F) Soit $\mathcal{A}$, une catégorie primitive récursive (E). L'opérateur

$(r_E)_{\mathcal{A}}(\,-\,,\,-\,\langle q(N,N)p(N^2,N),q(N^2,N)\rangle)$:

$$\mathcal{A}(N,N) \times \mathcal{A}(N^2,N) \to \mathcal{A}(N^2,N)$$

$$(\;g\;,\;h\;) \;\to r_E(g,h\langle q(N,N)p(N^2,N),q(N^2,N)\rangle)$$

possède les propriétés de la condition 3F.

En effet,

i) $r_E(g,h\langle q(N,N)p(N^2,N),q(N^2,N)\rangle)\langle I(N),\theta 0(N)\rangle = g$

ii) $r_E(g,h\langle q(N,N)p(N^2,N),q(N^2,N)\rangle)\langle p(N,N),\sigma q(N,N)\rangle$

$= h\langle q(N,N)p(N^2,N),q(N^2,N)\rangle\langle I(N^2),\ r_E(g,h\langle q(N,N)p(N^2,N),q(N^2,N)\rangle)\rangle$

$= h\langle q(N,N),\ r_E(g,h\langle q(N,N)p(N^2,N),q(N^2,N)\rangle)\rangle$

Donc A est une catégorie primitive récursive (F).

F ⇒ G) Soit A, une catégorie primitive récursive (F). L'opérateur

$$(r_F)_A(I(N),\_) : A(N^2,N) \to A(N^2,N)$$
$$h \mapsto (r_F)_A(I(N),h)$$

possède les deux propriétés de la condition 3G.

$(r_F)_A(I(N),h)\langle I(N),\theta 0(N)\rangle = I(N)$

$(r_F)_A(I(N),h)\langle p(N,N),\sigma q(N,N)\rangle = h\langle q(N,N),(r_F)_A(I(N),h)\rangle$

Donc A est une catégorie primitive récursive (G).

Si nous nous souvenons de la définition des morphismes α_A et β_A dans une catégorie primitive récursive (A) A, nous constatons que chaque opérateur ayant pour domaine et codomaine $A(N^2,N)$ peut engendrer des morphismes α et β.

<u>DEFINITION 4.74</u> Une catégorie A est dite primitive récursive (E+u, F+u ou G+u) si

1. elle est primitive récursive (E, F ou G),

2E. $\beta_E\alpha_E = I(N\wedge N)$ où $\alpha_E : N^2 \to N$ et $\beta_E : N \to N^2$ sont engendrés par

$\nabla_E : A(N^2,N) \to A(N^2,N)$

$h \to r_E(I(N),h<q(N,N)p(N^2,N),q(N^2,N)>)$

2F. $\beta_F\alpha_F = I(N\wedge N)$ où $\alpha_F : N^2 \to N$ et $\beta_F : N \to N^2$ sont engendrés par

$\nabla_F : A(N^2,N) \to A(N^2,N)$

$h \to r_F(I(N),h)$.

2G. $\beta_G\alpha_G = I(N\wedge N)$ où $\alpha_G : N^2 \to N$ et $\beta_G : N \to N^2$ sont engendrés par

$\nabla_G : A(N^2,N) \to A(N^2,N)$

$h \to r_G(h)$

3E. Pour tout morphisme $h : N^3 \to N$ et tout morphisme $f : N^2 \to N$ de A, si $f<p(N,N),\sigma q(N,N)> = h<I(N^2),f>$, alors $f = (r_E)_A(f<I(N),\theta O(N)>,h)$.

3F. Pour tout morphisme $h : N^2 \to N$ et tout morphisme $f : N^2 \to N$ de A, si $f<p(N,N),\sigma q(N,N)> = h<q(N,N),f>$, alors $f = (r_F)_A(f<I(N),\theta O(N)>,h)$.

3G. Pour tout morphisme $h : N^2 \to N$ et tout morphisme $f : N^2 \to N$ de A, si $f<p(N,N),\sigma q(N,N)> = h<q(N,N),f>$ et $f<I(N),\theta O(N)> = I(N)$, alors $f = (r_G)_A(h)$.

<u>REMARQUE</u> Dans chacun des cas E, F et G, les morphismes α et β représentent les mêmes fonctions que les morphismes α_A et β_A. Donc Ens est une catégorie primitive récursive (X) où $X \in \{E+u,F+u,G+u\}$.

<u>THEOREME 4.75</u> Toute catégorie primitive récursive (B, E+u ou F+u) est primitive récursive (E+u, F+u ou G+u).

<u>PREUVE</u> $B \Rightarrow E+u$) Soit A, une catégorie primitive récursive (B).

a) Par le théorème 4.73, A est une catégorie primitive récursive (E)

b) Dans ce cas, $\nabla_E(h) = r_E(I(N), h\langle q(N,N)p(N^2,N), q(N^2,N)\rangle)$

$$= r_A(I(N), h\langle q(N,N)p(N^2,N), q(N^2,N)\rangle)$$

$$= \nabla_A(h), \ \forall h : N^2 \to N \in A.$$

Donc $\alpha_E = \alpha_A$, $\beta_E = \beta_A$ et $\beta_E\alpha_E = I(N \wedge N)$

c) La condition d'unicité 3E. de la définition 4.74 est un cas particulier de la condition d'unicité définissant une catégorie primitive récursive (B). Donc A est une catégorie primitive récursive (E+u).

$E+u \Rightarrow F+u$) Soit A, une catégorie primitive récursive (E+u).

a) Par 4.73, A est primitive récursive (F).

b) $\nabla_F(h) = r_F(I(N),h) = r_E(I(N), h\langle q(N,N)p(N^2,N), q(N^2,N)\rangle)$
$= \nabla_E(h), \ \forall h : N^2 \to N \in A.$

Donc, $\alpha_F = \alpha_E$, $\beta_F = \beta_E$ et $\beta_F\alpha_F = I(N \wedge N)$

c) Il nous reste à vérifier la condition 3F. de la définition 4.74. Soient $f : N^2 \to N$ et $h : N^2 \to N$, deux morphismes de A tels que $f\langle p(N,N), \sigma q(N,N)\rangle = h\langle q(N,N), f\rangle$. Est-ce-que $f = r_E(f\langle I(N), \theta 0(N)\rangle, h\langle q(N,N)p(N^2,N), q(N^2,N)\rangle)$? Cette dernière équation est vérifiée par 3E. si $f\langle p(N,N), \sigma q(N,N)\rangle = h\langle q(N,N)p(N^2,N), q(N^2,N)\rangle\langle I(N^2), f\rangle$. Mais ceci est vrai car $h\langle q(N,N)p(N^2,N), q(N^2,N)\rangle\langle I(N^2), f\rangle = h\langle q(N,N), f\rangle$.

Donc, A est primitive récursive (F+u).

F+u ⇒ G+u) Soit A, une catégorie primitive récursive (F+u).

a) Par 4.73, A est primitive récursive (G).

b) $\nabla_G(h) = r_G(h) = r_F(I(N),h) = \nabla_F(h)$, $\forall\ h : N^2 \to N \in A$.

Donc, $\alpha_G = \alpha_F$, $\beta_G = \beta_F$ et $\beta_G\alpha_G = I(N \wedge N)$

c) Soient $h : N^2 \to N$ et $f : N^2 \to N$ tels que $f\langle p(N,N), \sigma q(N,N)\rangle = h\langle q(N,N), f\rangle$ et $f\langle I(N), \theta 0(N)\rangle = I(N)$. Alors, par 3F., $f = r_F(f\langle I(N),\theta 0(N)\rangle, h)$. Comme $f\langle I(N),\theta 0(N)\rangle = I(N)$, $f = r_F(I(N),h) = r_G(h)$. La condition 3G. est ainsi satisfaite.

Donc, A est primitive récursive (G+u).

En reprenant la technique utilisée dans la section 4.2 du présent chapitre, pour démontrer que "toute fonction primitive récursive est représentable dans chaque catégorie primitive récursive (A)" et en choisissant le schéma de récurrence approprié dans la définition de l'ensemble des fonctions primitives récursives, nous obtenons:

<u>THEOREME 4.76</u> Soit A, une catégorie primitive récursive (E, F, G ou H). Toute fonction primitive récursive est représentable dans A.

<u>COROLLAIRE 4.77</u> Soit A, une catégorie primitive récursive (E+u, F+u, G+u ou H+u). Toute fonction primitive récursive est représentable dans A.

En modifiant de façon appropriée la définition de la relation d'équivalence ≡ qui permet de définir $L(A)$ dans la preuve du théorème 4.11, technique que nous avons illustrée dans les sections 4.9, 4.10, 4.11 et 4.12, nous retrouvons les structures libres.

THEOREME 4.78 Soit A, une petite catégorie. Il existe une catégorie primitive récursive (X) libre engendrée par A, notée $L_X(A)$ pour $X \in \{E,F,G,H,E+u,F+u,G+u,H+u\}$.

COROLLAIRE 4.79 Les foncteurs suivants existent:

$$\begin{array}{ccccccc} L_G(\phi) & \to & L_F(\phi) & \to & L_E(\phi) & \to & L_A(\phi) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L_{G+u}(\phi) & \to & L_{F+u}(\phi) & \to & L_{E+u}(\phi) & \to & L_B(\phi) \end{array}$$

Comme nous l'avons démontré dans le cas de $L_A(\phi)$ (référence, section 4.5), nous avons:

LEMME 4.80 La sous-catégorie pleine $S_X(\phi)$ de $L_X(\phi)$ dont les objets sont les puissances de N est un squelette de $L_X(\phi)$, $X \in \{E,F,G,H,E+u,F+u,G+u,H+u\}$.

COROLLAIRE 4.81 Les foncteurs suivants existent:

$$\begin{array}{ccccccc} S_G(\phi) & \to & S_F(\phi) & \to & S_E(\phi) & \to & S_A(\phi) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S_{G+u}(\phi) & \to & S_{F+u}(\phi) & \to & S_{E+u}(\phi) & \to & S_B(\phi) \end{array}$$

Tout comme pour $L_B(\phi)$, l'existence de l'égalité $\beta\alpha = I(N \wedge N)$ entraîne que

LEMME 4.82 Pour tout $n \in N$, il existe un morphisme $(\alpha_X)_n : N^n \to N$ dans $L_X(\phi)$ qui admet un inverse à droite $(\beta_X)_n : N \to N^n$, $X \in \{E+u,F+u,G+u\}$.

Nous allons maintenant démontrer que $L_{E+u}(\phi) \simeq L_B(\phi)$ et $L_{F+u}(\phi) \simeq L_{E+u}(\phi)$.

THEOREME 4.83 $L_{E+u}(\phi)$ est primitive récursive (B).

PREUVE Dans cette preuve, les morphismes α et β sont α_E et β_E.

I - Montrons que $L_{E+u}(\phi)$ est primitive récursive (A).

Soient $g : N^n \to N$ et $h : N^{n+2} \to N$ de $L_E(\phi)$. Montrons que si

$k = h\langle\langle\beta_n p(N,N)p(N^2,N), q(N,N)p(N^2,N)\rangle, q(N^2,N)\rangle : N^3 \to N$ et

$f = r_E(g\beta_n, k)\langle\alpha_n p(N^n,N), q(N^n,N)\rangle : N^{n+1} \to N$

f satisfait les deux équations suivantes:

$$f\langle I(N^n), \theta O(N^n)\rangle = g$$

$$f\langle p(N^n,N), \sigma q(N^n,N)\rangle = h\langle I(N^{n+1}), f\rangle$$

a) $$f\langle I(N^n), \theta O(N^n)\rangle = r_E(g\beta_n,k)\langle\alpha_n p(N^n,N), q(N^n,N)\rangle\langle I(N^n), \theta O(N^n)\rangle$$

$$= r_E(g\beta_n,k)\langle\alpha_n, \theta O(N^n)\rangle$$

$$= r_E(g\beta_n,k)\langle I(N), \theta O(N)\rangle\alpha_n$$

$$= g\beta_n\alpha_n$$

$$= g$$

b) $$f\langle p(N^n,N), \sigma q(N^n,N)\rangle = r_E(g\beta_n,k)\langle\alpha_n p(N^n,N), q(N^n,N)\rangle\langle p(N^n,N), \sigma q(N^n,N)\rangle$$

$$= r_E(g\beta_n,k)\langle\alpha_n p(N^n,N), \sigma q(N^n,N)\rangle$$

$$= r_E(g\beta_n,k)\langle p(N,N), \sigma q(N,N)\rangle\langle\alpha_n p(N^n,N), q(N^n,N)\rangle$$

$$= k\langle I(N^2), r_E(g\beta_n,k)\rangle\langle\alpha_n p(N^n,N), q(N^n,N)\rangle$$

$$= k\langle\langle\alpha_n p(N^n,N), q(N^n,N)\rangle, f\rangle$$

$$= h\langle\langle \beta_n p(N,N)p(N^2,N), q(N,N)p(N^2,N)\rangle, q(N^2,N)\rangle$$
$$\langle\langle \alpha_n p(N^n,N), q(N^n,N)\rangle, f\rangle$$

$$= h\langle\langle \beta_n \alpha_n p(N^n,N), q(N^n,N)\rangle, f\rangle$$

$$= h\langle\langle p(N^n,N), q(N^n,N)\rangle, f\rangle$$

$$= h\langle I(N^{n+1}), f\rangle$$

Ainsi, l'opérateur Ψ qui associe aux morphismes $g : N^n \to N$ et $h : N^{n+2} \to N$, le morphisme $f : N^{n+1} \to N$ tel que défini plus haut possède les deux propriétés requises pour que $L_E(\phi)$ soit primitive récursive (A).

II - Montrons que $L_{E+u}(\phi)$ est primitive récursive (A+u)

Soient $h : N^{n+2} \to N$ et $j : N^{n+1} \to N$, deux morphismes de $L_{E+u}(\phi)$ tels que $j\langle p(N^n,N), \sigma q(N^n,N)\rangle = h\langle I(N^{n+1}), j\rangle$. Montrons qu'alors

$$j = \Psi(j\langle I(N^n), \theta O(N^n)\rangle, h)$$
$$= r_E(j\langle I(N^n), \theta O(N^n)\rangle\beta_n, h\langle\langle \beta_n p(N,N)p(N^2,N), q(N,N)p(N^2,N)\rangle, q(N^2,N)\rangle)$$
$$\langle \alpha_n p(N^n,N), q(N^n,N)\rangle.$$

Comme $j\langle I(N), \theta O(N)\rangle\beta_n = j\langle \beta_n p(N,N), q(N,N)\rangle\langle I(N), \theta O(N)\rangle$,

$\langle \beta_n p(N,N), q(N,N)\rangle\langle \alpha_n p(N^n,N), q(N^n,N)\rangle = I(N^{n+1})$ et

$\langle \alpha_n p(N^n,N), q(N^n,N)\rangle\langle \beta_n p(N,N), q(N,N)\rangle = I(N^2)$, il suffit de prouver que

$$j\langle \beta_n p(N,N), q(N,N)\rangle = r_E(j\langle \beta_n p(N,N), q(N,N)\rangle\langle I(N), \theta O(N)\rangle,$$
$$h\langle\langle \beta_n p(N,N)p(N^2,N), q(N,N)p(N^2,N)\rangle, q(N^2,N)\rangle.$$

Mais à cause de l'unicité sur $L_{E+u}(\phi)$, ceci revient à vérifier que

$$j\langle \beta_n p(N,N), q(N,N)\rangle\langle p(N,N), \sigma q(N,N)\rangle =$$
$$h\langle\langle \beta_n p(N,N)p(N^2,N), q(N,N)p(N^2,N)\rangle, q(N^2,N)\rangle\langle I(N^2), j\langle \beta_n p(N,N), q(N,N)\rangle\rangle.$$

Alors, $j\langle\beta_n p(N,N),q(N,N)\rangle\langle p(N,N),\sigma q(N,N)\rangle$

$= j\langle p(N^n,N),\sigma q(N^n,N)\rangle\langle\beta_n p(N,N),q(N,N)\rangle$

$= h\langle I(N^{n+1}),j\rangle\langle\beta_n p(N,N)q(N,N)\rangle$ par hypothèse

$= h\langle\langle\beta_n p(N,N),q(N,N)\rangle,j\langle\beta_n p(N,N),q(N,N)\rangle\rangle$

$= h\langle\langle\beta_n p(N,N)p(N^2,N),q(N,N)p(N^2,N)\rangle,q(N^2,N)\rangle\langle I(N^2),j\langle\beta_n p(N,N),q(N,N)\rangle\rangle.$

Donc, $L_{E+u}(\phi)$ est primitive récursive (A+u).

III - Considérons $\Psi : L_{E+u}(\phi)\ (N,N) \times L_{E+u}(\phi)\ (N^3,N) \to L_{E+u}(\phi)\ (N^2,N)$. Dans ce cas, $n = 1$, $\alpha_n = \alpha_1 = I(N)$ et $\beta_n = \beta_1 = I(N)$.

Alors $\Psi(g,h) = r_E(g,h\langle\langle p(N,N)p(N^2,N),q(N,N)p(N^2,N)\rangle,q(N^2,N)\rangle)$
$\langle p(N,N),q(N,N)\rangle$

$= r_E(g,h\langle p(N^2,N),q(N^2,N)\rangle)$

$= r_E(g,h),\quad \forall g : N \to N,\quad \forall h : N^3 \to N \in L_{E+u}(\phi).$

Considérons $\nabla_A : L_{E+u}(\phi)\ (N^2,N) \to L_{E+u}(\phi)\ (N^2,N)$ induit par la structure de catégorie primitive récursive (A).

$\nabla_A(h) = \Psi(I(N),h\langle q(N,N)p(N^2,N),q(N^2,N)\rangle)$

$= r_E(I(N),h\langle q(N,N)p(N^2,N),q(N^2,N)\rangle)$

$= \nabla_E(h)\ ,\ \forall h : N^2 \to N \in L_{E+u}(\phi).$

Donc, $\alpha_A = \alpha_E$, $\beta_A = \beta_E$ et $\beta_A\alpha_A = I(N\wedge N)$

Alors, $L_{E+u}(\phi)$ est primitive récursive (B).

<u>COROLLAIRE 4.84</u> L'unique foncteur récursif (E+u) $\Xi_{E+u,B} : L_{E+u}(\phi) \to L_B(\phi)$ est primitif récursif (B).

<u>PREUVE</u> Il faut démontrer que pour tout morphisme $g : N^n \to N$ et tout morphisme $h : N^{n+2} \to N$ de $L_{E+u}(\phi)$, $\Xi_{E+u,B}(\Psi(g,h)) = r_B(\Xi_{E+u,B}(g)\ ,\ \Xi_{E+u,B}(h))$.

Nous avons vu que $\Psi(g,h)<p(N^n,N),\sigma q(N^n,N)> = h<I(N^{n+1}),\Psi(g,h)>$

Alors $\Xi_{E+u,B}(\Psi(g,h))<p(N^n,N),\sigma q(N^n,N)> = \Xi_{E+u,B}(h)<I(N^{n+1}),\ \Xi_{E+u,B}(\Psi(g,h))>$

Par l'unicité sur $L_B(\phi)$,

$\Xi_{E+u,B}(\Psi(g,h)) = r_B(\Xi_{E+u,B}(\Psi(g,h))<I(N^n),\theta 0(N^n)>,\Xi_{E+u,B}(h))$.

Comme $\Psi(g,h)<I(N^n),\theta 0(N^n)> = g$, alors $\Xi_{E+u,B}(\Psi(g,h))<I(N^n),\theta 0(N^n)> = \Xi_{E+u,B}(g)$ et $\Xi_{E+u,B}(\Psi(g,h)) = r_B(\Xi_{E+u,B}(g),\Xi_{E+u,B}(h))$.

<u>COROLLAIRE 4.85</u> $L_{E+u}(\phi)$ est isomorphe à $L_B(\phi)$ et $S_{E+u}(\phi)$ est isomorphe à $S_B(\phi)$.

<u>THEOREME 4.86</u> $L_{F+u}(\phi)$ est primitive récursive (E+u).

<u>PREUVE</u>

I - Montrons que $L_{F+u}(\phi)$ est une catégorie primitive récursive (E). Soient $g : N \to N$ et $h : N^3 \to N$, deux morphismes de $L_{F+u}(\phi)$ et considérons $\tilde{h} = \alpha_F<p(N,N)\beta_F q(N,N),h<<p(N,N)\beta_F q(N,N),p(N,N)>,q(N,N)\beta_F q(N,N)>> : N^2 \to N$ et $\tilde{g} = \alpha_F<I(N),g> : N \to N$.

a) Examinons le morphisme $p(N,N)\beta_F r_F(\tilde{g},\tilde{h}) : N^2 \to N$

$p(N,N)\beta_F r_F(\tilde{g},\tilde{h})<p(N,N),\sigma q(N,N)>$

$= p(N,N)\beta_F\tilde{h}<q(N,N),r_F(\tilde{g},\tilde{h})>$

$= p(N,N)\beta_F\alpha_F\langle p(N,N)\beta_F q(N,N),\ h\langle\langle p(N,N)\beta_F q(N,N),p(N,N)\rangle,$
$q(N,N)\beta_F q(N,N)\rangle\rangle\langle q(N,N),r_F(\tilde{g},\tilde{h})\rangle$

$= p(N,N)\beta_F q(N,N)\langle q(N,N),r_F(\tilde{g},\tilde{h})\rangle$

$= p(N,N)\beta_F r_F(\tilde{g},\tilde{h})$

$= q(N,N)\langle q(N,N),p(N,N)\beta_F r_F(\tilde{g},\tilde{h})\rangle$

et $p(N,N)\beta_F r_F(\tilde{g},\tilde{h})\langle I(N),\theta O(N)\rangle$

$= p(N,N)\beta_F\tilde{g}$

$= p(N,N)\beta_F\alpha_F\langle I(N),g\rangle$

$= I(N)$

Donc, par l'unicité sur $L_{F+u}(\phi)$,
$p(N,N)\beta_F r_F(\tilde{g},\tilde{h}) = r_F(I(N),q(N,N))$

Mais le morphisme $p(N,N)$ satisfait les équations
$p(N,N)\langle p(N,N),\sigma q(N,N)\rangle = p(N,N) \stackrel{\varrho}{=} q(N,N)\langle q(N,N),p(N,N)\rangle$
$p(N,N)\langle I(N),\theta O(N)\rangle = I(N)$.

D'où $p(N,N) = r_F(I(N),q(N,N)) = p(N,N)\beta_F r_F(\tilde{g},\tilde{h})$

b) Examinons le morphisme $q(N,N)\beta_F r_F(\tilde{g},\tilde{h}) : N^2 \to N$.

$q(N,N)\beta_F r_F(\tilde{g},\tilde{h})\langle p(N,N),\sigma q(N,N)\rangle$

$= q(N,N)\beta_F\tilde{h}\langle q(N,N),r_F(\tilde{g},\tilde{h})\rangle$

$= q(N,N)\beta_F\alpha_F\langle p(N,N)\beta_F q(N,N),h\langle\langle p(N,N)\beta_F q(N,N),p(N,N)\rangle,q(N,N)\beta_F q(N,N)\rangle)$
$\langle q(N,N),r_F(\tilde{g},\tilde{h})\rangle$

$= h<<p(N,N)\beta_F q(N,N),p(N,N)>,q(N,N)\beta_F q(N,N)>><q(N,N),r_F(\tilde{g},\tilde{h})>$

$= h<<p(N,N)\beta_F r_F(\tilde{g},\tilde{h}),q(N,N)>,q(N,N)\beta_F r_F(\tilde{g},\tilde{h})>$

$= h<<p(N,N),q(N,N)>,q(N,N)\beta_F r_F(\tilde{g},\tilde{h})>$ car $p(N,N)\beta_F r_F(\tilde{g},\tilde{h}) = p(N,N)$

$= h<I(N^2),q(N,N)\beta_F r_F(\tilde{g},\tilde{h})>$

et $q(N,N)\beta_F r_F(\tilde{g},\tilde{h})<I(N),\theta O(N)>$

$= q(N,N)\beta_F \tilde{g} = q(N,N)\beta_F\alpha_F<I(N),g> = q(N,N)<I(N),g> = g.$

Donc, l'opérateur $\Sigma : L_{F+u}(\phi)\ (N,N) \times L_{F+u}(\phi)\ (N^3,N) \to L_{F+u}(\phi)\ (N^2,N)$

$(\quad g \quad , \quad h \quad) \quad \to q(N,N)\beta_F r_F(\tilde{g},\tilde{h})$

où $\tilde{h} = \alpha_F<p(N,N)\beta_F q(N,N),h<<p(N,N)\beta_F q(N,N),p(N,N)>,q(N,N)\beta q(N,N)>>$ et $\tilde{g} = \alpha_F<I(N),g>$ munit $L_{F+u}(\phi)$ d'une structure de catégorie primitive récursive (E).

II - Montrons que $L_{F+u}(\phi)$ satisfait la condition d'unicité d'une catégorie primitive récursive (E+u).

Soient $f : N^2 \to N$ et $h : N^3 \to N$, des morphismes de $L_F(\phi)$ tels que $f<p(N,N),\sigma q(N,N)> = h<I(N^2),f>$, montrons qu'alors $f = \Sigma(f<I(N),\theta O(N)>,h)$

Comme $\widetilde{f<I(N),\theta O(N)>} = \alpha_F<I(N),f<I(N),\theta O(N)>>$

$= \alpha_F<p(N,N),f><I(N),\theta O(N)>$

montrons que $f = q(N,N)\beta_F r_F(\alpha_F<p(N,N),f><I(N),\theta O(N)>,\tilde{h})$

Or, $\alpha_F<p(N,N),f><p(N,N),\sigma q(N,N)>$

$= \alpha_F<p(N,N),f<p(N,N),\sigma q(N,N)>>$

$= \alpha_F<p(N,N),h<I(N^2),f>>$

$= \alpha_F\langle p(N,N),h\langle\langle p(N,N),q(N,N)\rangle,f\rangle\rangle$

$= \alpha_F\langle p(N,N)\beta_F\alpha_F\langle p(N,N),f\rangle,h\langle\langle p(N,N)\beta_F\alpha_F\langle p(N,N),f\rangle,q(N,N)\rangle,$
$q(N,N)\beta_F\alpha_F\langle p(N,N),f\rangle\rangle$

$= \alpha_F\langle p(N,N)\beta_F q(N,N),h\langle\langle p(N,N)\beta_F q(N,N),p(N,N)\rangle,q(N,N)\beta_F q(N,N)\rangle\rangle$
$\langle q(N,N),\alpha_F\langle p(N,N),f\rangle\rangle$

$= \tilde{h}\langle q(N,N),\alpha_F\langle p(N,N),f\rangle\rangle$

Donc, par l'unicité dans $L_{F+u}(\phi)$,

$\alpha_F\langle p(N,N),f\rangle = r_F(\alpha_F\langle p(N,N),f\rangle\langle I(N),\theta O(N)\rangle,\tilde{h})\rangle$

$\langle p(N,N),f\rangle = \beta_F r_F(\alpha_F\langle p(N,N),f\rangle\langle I(N),\theta O(N)\rangle,\tilde{h})$

$f = q(N,N)\beta_F r_F(\alpha_F\langle p(N,N),f\rangle\langle I(N),\theta O(N)\rangle,\tilde{h})$

III - Considérons $\nabla_E : L_{F+u}(\phi)\ (N^2,N) \to L_{F+u}(\phi)\ (N^2,N)$ induit par la structure de catégorie primitive récursive (E) et démontrons que $\nabla_E = \nabla_F$.

$\nabla_E(h)$ satisfait les deux équations suivantes:

$\nabla_E(h)\langle p(N,N),\sigma q(N,N)\rangle = h\langle q(N,N),\nabla_E(h)\rangle$

$\nabla_E(h)\langle I(N),\theta O(N)\rangle = I(N).$

a) $\nabla_E(h)\langle p(N,N),\sigma q(N,N)\rangle$

$= \Sigma(I(N),h\langle q(N,N)p(N^2,N),q(N^2,N)\rangle)\langle p(N,N),\sigma q(N,N)\rangle$

$= h\langle q(N,N)p(N^2,N),q(N^2,N)\rangle\langle I(N^2),\Sigma(I(N),h\langle q(N,N)p(N^2,N),q(N^2,N)\rangle)$

$= h\langle q(N,N)p(N^2,N),q(N^2,N)\rangle\langle I(N^2),\nabla_E(h)\rangle$

$= h\langle q(N,N), \nabla_E(h)\rangle$

b) $\nabla_E(h)\langle I(N),\theta O(N)\rangle$

$= \Sigma(I(N),h\langle q(N,N)p(N^2,N),q(N^2,N)\rangle)\langle I(N),\theta O(N)\rangle$

$= I(N)$

Par unicité sur $L_{F+u}(\phi)$, $\nabla_E(h) = r_F(\nabla_E(h)\langle I(N),\theta O(N)\rangle,h\rangle$

$= r_F(I(N),h)$

$= \nabla_F(h)$, $\forall h : N^2 \to N \in L_{F+u}(\phi)$.

Donc, $\alpha_E = \alpha_F$, $\beta_E = \beta_F$ et $\beta_E\alpha_E = I(N\wedge N)$

Nous avons ainsi montré que $L_{F+u}(\phi)$ est primitive récursive (E+u).

<u>COROLLAIRE 4.87</u> L'unique foncteur primitif récursif (F+u)
$\Xi_{F+u,E+u} : L_{F+u}(\phi) \to L_{E+u}(\phi)$ est primitif récursif (E+u).

<u>PREUVE</u> Il faut démontrer que pour tout morphisme $g : N \to N$ et
$h : N^3 \to N$ de $L_{F+u}(\phi)$, $\Xi_{F+u,E+u}(\Sigma(g,h)) = r_{E+u}(\Xi_{F+u,E+u}(g),\Xi_{F+u,E+u}(h))$.

Nous avons vu que $\Sigma(g,h)\langle p(N,N),\sigma q(N,N)\rangle = h\langle I(N^2),\Sigma(g,h)\rangle$

Alors $\Xi_{F+u,E+u}(\Sigma(g,h))\langle p(N,N),\sigma q(N,N)\rangle = \Xi_{F+u,E+u}(h)\langle I(N^2),\Xi_{F+u,E+u}(\Sigma(g,h))\rangle$

Par l'unicité sur $L_{E+u}(\phi)$,

$\Xi_{F+u,E+u}(\Sigma(g,h)) = r_{E+u}(\Xi_{F+u,E+u}(\Sigma(g,h))\langle I(N^n),\theta O(N^n)\rangle,\Xi_{F+u,E+u}(h))$.

Comme $\Sigma(g,h)\langle I(N^n),\theta O(N^n)\rangle = g$, alors $\Xi_{F+u,E+u}(\Sigma(g,h))\langle I(N^n),\theta O(N^n)\rangle =$
$\Xi_{F+u,E+u}(g)$ et $\Xi_{F+u,E+u}(\Sigma(g,h)) = r_{E+u}(\Xi_{F+u,E+u}(g),\Xi_{F+u,E+u}(h))$.

<u>COROLLAIRE 4.88</u> $L_{F+u}(\phi) \simeq L_{E+u}(\phi)$, $S_{F+u}(\phi) \simeq S_{E+u}(\phi)$.

Comme $S_B(\phi) \simeq S_{E+u}(\phi) \simeq S_{F+u}(\phi)$, nous pouvons conclure à l'aide d'un raisonnement analogue à celui du corollaire 4.67, que tout morphisme $f : N^n \to N^t$, $t \in N^+$, de $S_{E+u}(\phi)$ ou de $S_{F+u}(\phi)$ représente une fonction primitive récursive ou un produit de nombres naturels. Nous obtiendrons la même propriété pour les morphismes de S_{G+u} en démontrant que tout morphisme de S_G, et par conséquent de S_{G+u}, est calculable à l'aide des idées des item 4.58 à 4.61 et en montrant que tout morphisme $f : N^n \to N^t$, $t \in N^+$, $n \in N^+$, de $S_{G+u}(\phi)$ représente la même fonction que le morphisme $\Xi_{G+u,F+u}(f)$ de $S_{F+u}(\phi)$. Pour ce qui est des morphismes de $S_E(\phi)$, $S_F(\phi)$ et $S_G(\phi)$, une adaptation de la preuve du théorème 4.69 nous permet de tirer la même conclusion.

4.14 *CATÉGORIES PRIMITIVES RÉCURSIVES* (H, K, L ou M)

Dans cette dernière section, nous verrons encore trois schémas engendrant des catégories dont tous les morphismes $f : N^n \to N^t$, $t \in N^+$, représentent des fonctions primitives récursives ou des produits de nombres naturels. Mais pour que toute fonction primitive récursive y soit représentée, nous devrons y ajouter un certain nombre de morphismes initiaux. Nous constaterons aussi comment le concept de catégorie pré-récursive découle naturellement des concepts étudiés ici et nous verrons que le théorème 2.4 pourrait s'inscrire comme corollaire des résultats de ce chapitre.

Péter [21] a démontré que la classe des fonctions primitives récursives peut se définir comme étant la plus petite classe de fonctions contenant les fonctions "successeur, constante zéro, projections, addition, antécédent, soustraction non-négative, carré et racine carrée", fermée sous le "produit par N", la composition et l'itération, c'est-à-dire, pour toute fonction $f : N \to N$ de cet ensemble, la fonction $g : N \to N$ définie par $g(0) = 0$ et $g(n+1) = f(g(n))$, $n \in N^+$, appartient aussi à cet ensemble.

DEFINITION 4.89 Une catégorie A est dite primitive récursive (H, K ou L) si

1. elle est cartésienne,

2. elle possède un objet N_A, muni d'un morphisme $\sigma_A : N_A \to N_A$ et d'un morphisme $\theta_A : T \to N_A$ où T est l'objet terminal de A,

3. elle possède cinq morphismes ayant les propriétés suivantes:

$+ : N_A{}^2 \to N_A$ tel que $+\langle I(N_A), \theta O(N_A)\rangle = I(N_A)$, $+\langle p(N_A,N_A), \sigma q(N_A,N_A)\rangle = \sigma +$

$A : N_A \to N_A$ tel que $A\theta = \theta$, $A\sigma = I(N_A)$

$\dot{-} : N_A{}^2 \to N_A$ tel que $\dot{-}\langle I(N_A), \theta O(N_A)\rangle = I(N_A)$, $\dot{-}\langle p(N_A,N_A), \sigma q(N_A,N_A)\rangle = A\dot{-}$

$(\ )^2 : N_A \to N_A$ tel que $(\ )^2\theta = \theta$, $(\ )^2\sigma = \sigma+\langle +\langle(\ )^2, I(N_A)\rangle, I(N_A)\rangle$

$\surd : N_A \to N_A$ tel que $\surd\theta = \theta$, $\surd\sigma = +\langle\surd, \dot{-}\langle\sigma\theta O(N), +\langle\dot{-}\langle\sigma, (\ )^2\sigma\surd\rangle, \dot{-}\langle(\ )^2\sigma\surd, \sigma\rangle\rangle\rangle\rangle$

4H. elle est fermée sous un opérateur $(r_H)_A : A(T,N_A) \times A(N_A,N_A) \to A(N_A,N_A)$ possédant les propriétés suivantes:
Pour tout morphisme $b : T \to N_A$ et tout morphisme $f : N_A \to N_A$ de A,
$(r_H)_A(b,f)\theta = b$ et $(r_H)_A(b,f)\sigma = f((r_H)_A(b,f))$

4K. elle est fermée sous un opérateur $(r_K)_A : A(N_A,N_A) \to A(N_A,N_A)$ possédant les propriétés suivantes:

- Pour tout morphisme $f : N_{\mathcal{A}} \to N_{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$,

  $(r_K)_{\mathcal{A}}(f)\theta = \theta$ et $(r_K)_{\mathcal{A}}(f)\sigma = f((r_K)_{\mathcal{A}}(f))$

4L. elle est fermée sous un opérateur $(r_L)_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}(T,A) \times \mathcal{A}(A,A) \to \mathcal{A}(N_{\mathcal{A}},A)$, $\forall A \in |\mathcal{A}|$, possédant les propriétés suivantes:

Pour tout morphisme $b : T \to A$ et tout morphisme $f : A \to A$ de $\mathcal{A}$,

$(r_L)_{\mathcal{A}}(b,f)\theta = b$ et $(r_L)_{\mathcal{A}}(b,f)\sigma = f((r_L)_{\mathcal{A}}(b,f))$

<u>THEOREME 4.90</u> Toute catégorie primitive récursive (G, H, L ou C) est primitive récursive (H, K, H ou L).

<u>PREUVE</u> G ⇒ H) Soit $\mathcal{A}$, une catégorie primitive récursive (G).

a) Les morphismes suivants possèdent les propriétés requises par la condition 3 de la définition de catégorie primitive récursive (H)

$+ = r_G(\sigma q(N,N))$, $A = r_G(p(N,N))\langle\theta 0(N),I(N)\rangle$, $\dot{-} = r_G(Aq(N,N))$,

$(\ )^2 = r_G(\sigma{+}\langle{+}\langle q(N,N),p(N,N)\rangle,p(N,N)\rangle)\langle\theta 0(N),I(N)\rangle$,

$\surd = r_G(+\langle q(N,N),\dot{-}\langle\sigma\theta 0(N),+\langle\dot{-}\langle\sigma,(\ )^2\sigma q(N,N)\rangle,\dot{-}\langle(\ )^2\sigma q(N,N),\sigma\rangle\rangle\rangle\rangle$

+) $r_G(\sigma q(N,N))\langle I(N),\theta 0(N)\rangle = I(N)$

$r_G(\sigma q(N,N))\langle p(N,N),\sigma q(N,N)\rangle = \sigma q(N,N)\langle q(N,N),r_G(\sigma q(N,N))\rangle = \sigma r_G(\sigma q(N,N))$.

A) $r_G(p(N,N))\langle\theta 0(N),I(N)\rangle\theta = r_G(p(N,N))\langle I(N),\theta 0(N)\rangle\theta = I(N)\theta = \theta$

$r_G(p(N,N))\langle\theta 0(N),I(N)\rangle\sigma = r_G(p(N,N))\langle p(N,N),\sigma q(N,N)\rangle\langle\theta 0(N),I(N)\rangle$

$= p(N,N)\langle q(N,N),r_G(p(N,N))\rangle\langle\theta 0(N),I(N)\rangle$

$= q(N,N)\langle\theta 0(N),I(N)\rangle = I(N)$

$\dot{-})$ $r_G(Aq(N,N))<I(N),\theta O(N)> = I(N)$

$r_G(Aq(N,N))<p(N,N),\sigma q(N,N)> = Aq(N,N)<q(N,N),r_G(Aq(N,N))>$

$= Ar_G(Aq(N,N))$

$(\ )^2)$ Si $f = \sigma+<+<q(N,N),p(N,N)>,p(N,N)>$

$r_G(f)<\theta O(N),I(N)>\theta = r_G(f)<I(N),\theta O(N)>\theta = I(N)\theta = \theta$

$r_G(f)<\theta O(N),I(N)>\sigma = r_G(f)<p(N,N),\sigma q(N,N)><\theta O(N),I(N)>$

$= f<q(N,N),r_G(f)><\theta O(N),I(N)>$

$= f<I(N),r_G(f)<\theta O(N),I(N)>>$

$= \sigma+<+<q(N,N),p(N,N)>,p(N,N)><I(N),r_G(f)$
$<\theta O(N),I(N)>>$

$= \sigma+<+<r_G(f)<\theta O(N),I(N)>,I(N)>,I(N)>$

$\sqrt{)}$ Si $g = +<q(N,N),\dot{-}<\sigma\theta O(N),+<\dot{-}<\sigma,(\ )^2\sigma q(N,N)>,\dot{-}<(\ )^2\sigma q(N,N),\sigma>>>>$

$r_G(g)<\theta O(N),I(N)>\theta = r_G(g)<I(N),\theta O(N)>\theta = I(N)\theta = \theta$

$r_G(g)<\theta O(N),I(N)>\sigma = r_G(g)<p(N,N),\sigma q(N,N)><\theta O(N),I(N)>$

$= g<q(N,N),r_G(g)><\theta O(N),I(N)>$

$= g<I(N),r_G(g)<\theta O(N),I(N)>>$

$= +<q(N,N),\dot{-}<\sigma\theta O(N),+<\dot{-}<\sigma,(\ )^2\sigma q(N,N)>,$
$\dot{-}<(\ )^2\sigma q(N,N),\sigma>>>><I(N),r_G(g)<\theta O(N),I(N)>>$

$= +<r_G(g)<\theta O(N),I(N)>,\dot{-}<\sigma\theta O(N),+<\dot{-}<\sigma,(\ )^2\sigma r_G(g)$
$<\theta O(N),I(N)>>,\dot{-}<(\ )^2\sigma r_G(g)<\theta O(N),I(N)>,\sigma>>>>$

b) Vérifions maintenant que l'opérateur.

$\Delta : A(T,N) \times A(N,N) \to A(N,N)$

$(\ b\ ,\ f\ ) \to r_G(fq(N,N))<bO(N),I(N)>$

possède les propriétés de la condition 4H. de la définition 4.89

$$r_G(fq(N,N))<b0(N),I(N)>\theta = r_G(fq(N,N))<I(N),\theta 0(N)>b$$
$$= I(N)b = b$$

$$r_G(fq(N,N))<b0(N),I(N)>\sigma = r_G(fq(N,N))<p(N,N),\sigma q(N,N)><b0(N),I(N)>$$
$$= fq(N,N)<q(N,N),r_G(fq(N,N)><b0(N),I(N)>$$
$$= fr_G(fq(N,N))<b0(N),I(N)>$$

Donc, A est primitive récursive (H).

$H \Rightarrow K$ et $L \Rightarrow H$) Comme l'opérateur $r_H(\theta,\_\_)$ d'une catégorie primitive récursive (H) possède les propriétés d'un opérateur r_K, toute catégorie primitive récursive (H) est primitive récursive (K). De même, l'opérateur r_L d'une catégorie primitive récursive (L), appliqué au cas $A = T$, munit cette catégorie d'une structure de catégorie primitive récursive (H) car cet opérateur possède les propriétés d'un opérateur r_H.

$C \Rightarrow L$) Soit A, une catégorie primitive récursive (C). En remplaçant dans la preuve de $G \Rightarrow H$, $r_G(h)$ par $r_C(I(N),h<q(N,N)p(N^2,N),q(N^2,N)>)$, pour les morphismes $h : N^2 \to N$ utilisés, nous retrouvons cinq morphismes qui possèdent les propriétés de la condition 3 d'une catégorie primitive récursive (L) et l'opérateur $\chi : A(T,A) \times A(A,A) \to A(N,A)$

$$(\ b\ ,\ f\ ) \to r_C(b,fq(T\wedge N,A))<0(N),I(N)>$$

vérifie les deux équations suivantes:

$$\chi(b,f)\theta = b \quad \text{et} \quad \chi(b,f)\sigma = f\chi(b,f),\ \forall b : T \to A,\ f : A \to A \in A$$

$$\chi(b,f)\theta = r_C(b,fq(T\wedge N,A))<0(N),I(N)>\theta = r_C(b,fq(T\wedge N,A))<I(T),\theta 0(T)> = b$$

$$\chi(b,f)\sigma = r_C(b,fq(T\wedge N,A))<0(N),I(N)>\sigma$$
$$= r_C(b,fq(T\wedge N,A))<p(T,N),\sigma q(T,N)><0(N),I(N)>$$
$$= fq(T\wedge N,A)<I(T\wedge N),r_C(b,fq(T\wedge N,A))><0(N),I(N)>$$

$$= fr_C(b,fq(T\wedge N,A))\langle O(N),I(N)\rangle$$

$$= f\chi(b,f)$$

Donc A est une catégorie primitive récursive (L).

<u>DEFINITION 4.91</u> Une catégorie A est dite primitive récursive (H+u, K+u ou L+u) si

1. elle est primitive récursive (H, K ou L),

2. si $\alpha = +\langle(\ )^2+\langle(\ )^2+,q(N,N)\rangle,p(N,N)\rangle$

   $\beta = \langle\dot{-}\langle I(N),(\ )^2\surd\rangle,\dot{-}\langle\surd,(\ )^2\surd\surd\rangle\rangle$

   alors $\beta\alpha = I(N\wedge N)$,

3H. Pour tout morphisme $f : N \to N$ et tout morphisme $g : N \to N$ de A, si $g\sigma = fg$, alors $g = (r_H)_A(g\theta,f)$

3K. Pour tout morphisme $f : N \to N$ et tout morphisme $g : N \to N$ de A, si $g\theta = \theta$ et $g\sigma = fg$, alors $g = (r_K)_A(f)$

3L. Pour tout morphisme $f : A \to A$ et tout morphisme $g : N \to A$ de A, si $g\sigma = fg$, alors $g = (r_L)_A(g\theta,f)$

<u>THEOREME 4.92</u> Toute catégorie primitive récursive (G+u, H+u, L+u ou D) est primitive récursive (H+u, K+u, H+u ou L+u).

<u>PREUVE</u> Etant donné le théorème 4.90 et le fait que la condition d'unicité 3K. est un cas particulier de la condition 3H., qui est elle-même un cas particulier de 3L., nous avons les trois premiers résultats, c'est-à-dire $G+u \Rightarrow H+u$, $H+u \Rightarrow K+u$, $L+u \Rightarrow H+u$.

Pour compléter D $\Rightarrow$ L+u, il nous reste à vérifier que toute catégorie primitive récursive (D) $\mathcal{A}$ satisfait la condition d'unicité 3L. Soient des morphismes $f : A \to A$ et $g : N \to A$ de $\mathcal{A}$ tels que $g\sigma = fg$, montrons qu'alors $g = \chi(g\theta, f)$ où χ est l'opérateur munissant $\mathcal{A}$ d'une structure de catégorie primitive récursive (L), défini dans la preuve du théorème 4.90.

Si $g\sigma = fg$, alors $gq(T,N)\langle p(T,N),\sigma q(T,N)\rangle = g\sigma q(T,N) = fgq(T,N)$

$= fq(T{\wedge}N,A)\langle I(T{\wedge}N),gq(T,N)\rangle$.

Par l'unicité de r_D, $gq(T,N) = r_D(gq(T,N)\langle I(T),\theta O(T)\rangle, fq(T{\wedge}N,A)\rangle$

$= r_D(g\theta, fq(T{\wedge}N,A))$

et $g = gq(T,N)\langle O(N),I(N)\rangle = r_D(g\theta, fq(T{\wedge}N,A))\langle O(N),I(N)\rangle$

$= \chi(g\theta, f)$

Dans les résultats suivants, nous n'expliciterons pas les preuves, celles-ci faisant appel aux techniques maintes fois utilisées pour des résultats analogues dans d'autres catégories.

Le théorème suivant découle de la caractérisation de la classe des fonctions primitives récursives donnée au début de cette section.

<u>THEOREME 4.93</u> Soit $\mathcal{A}$, une catégorie primitive récursive (H,K,L,H+u,K+u ou L+u). Toute fonction primitive récursive est représentable dans $\mathcal{A}$.

<u>THEOREME 4.94</u> Soit $\mathcal{A}$ une petite catégorie. Il existe une catégorie primitive récursive (X) libre engendrée par $\mathcal{A}$, notée $\mathcal{L}_X(\mathcal{A})$ pour $X \in \{H,K,L,H+u,K+u,L+u\}$.

<u>REMARQUE</u> Pour ce théorème, en plus d'adapter la définition de relation d'équivalence au schéma de récurrence concerné, nous devons ajouter cinq axiomes au système déductif $\mathcal{D}(A)$ soit: $+ : N \wedge N \to N$, $A : N \to N$, $\dot{-} : N \wedge N \to N$, $(\ )^2 : N \to N$ et $\surd : N \to N$, et nous devons ajouter comme conditions à la relation d'équivalence les dix équations (condition 3, définition 4.89) caractérisant les propriétés des cinq nouveaux axiomes.

<u>COROLLAIRE 4.95</u> Les foncteurs suivants existent.

$$\begin{array}{ccccc} L_K(\phi) & \to & L_H(\phi) & \to & L_G(\phi) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L_{K+u}(\phi) & \to & L_{H+u}(\phi) & \to & L_{G+u}(\phi) \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} L_H(\phi) & \to & L_L(\phi) & \to & L_C(\phi) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L_{H+u}(\phi) & \to & L_{L+u}(\phi) & \to & L_D(\phi) \end{array}$$

<u>LEMME 4.96</u> La sous-catégorie pleine $S_X(\phi)$ de $L_X(\phi)$ dont les objets sont les puissances de N est un squelette de $L_X(\phi)$, $X \in \{H,K,L,H+u,K+u \text{ ou } L+u\}$.

<u>THEOREME 4.97</u> Tout morphisme de $L_X(\phi)$ est calculable, $X \in \{H,K,L,H+u,K+u \text{ ou } L+u\}$.

<u>THEOREME 4.98</u> Tout morphisme $f : N^n \to N^t$, $t \in N^+$, de $L_X(\phi)$ représente une fonction primitive-récursive ou un produit de nombres naturels, $X \in \{H,K,L,H+u,K+u \text{ ou } L+u\}$.

Démontrons maintenant que $L_{H+u}(\phi) \simeq L_{L+u}(\phi)$.

<u>LEMME 4.99</u> Pour tout $n \in N$, il existe un morphisme $\alpha_n : N^n \to N$ dans $L_X(\phi)$ qui admet un inverse à droite $\beta_n : N \to N^n$, $X \in \{H+u,K+u,L+u\}$.

THEOREME 4.100 $L_{H+u}(\phi)$ est primitive récursive (L+u).

PREUVE Soient les morphismes $b : T \to A$ et $f : A \to A$ de $L_{H+u}(\phi)$. Notons $\gamma(E) : E \to N^{\Pi(E)}$, l'isomorphisme découlant du théorème 4.96, $E \in |L_{H+u}(\phi)|$. Considérons $\alpha_{\Pi(A)}\gamma(A)b : T \to N$ et $\alpha_{\Pi(A)}\gamma(A)f\gamma(A)^{-1}\beta_{\Pi(A)} : N \to N$. Si nous notons g le morphisme $r_{H+u}(\alpha_{\pi(A)}\gamma(A)b, \alpha_{\pi(A)}\gamma(A)f\gamma(A)^{-1}\beta_{\pi(A)})$, g vérifie les équations suivantes:

$$g\theta = \alpha_{\pi(A)}\gamma(A)b \quad \text{et} \quad g\sigma = \alpha_{\pi(A)}\gamma(A)f\gamma(A)^{-1}\beta_{\pi(A)}g.$$

Soit h, le morphisme $\gamma(A)^{-1}\beta_{\pi(A)}g : N \to A$.

$$h\theta = \gamma(A)^{-1}\beta_{\pi(A)}g\theta = \gamma(A)^{-1}\beta_{\pi(A)}\alpha_{\pi(A)}\gamma(A)b = b$$

$$h\sigma = \gamma(A)^{-1}\beta_{\pi(A)}g\sigma = \gamma(A)^{-1}\beta_{\pi(A)}\alpha_{\pi(A)}\gamma(A)f\gamma(A)^{-1}\beta_{\pi(A)}g$$

$$= f\gamma(A)^{-1}\beta_{\pi(A)}g = fh$$

Donc, l'opérateur $\Omega : L_{H+u}(\phi)(T,A) \times L_{H+u}(\phi)(A,A) \to L_{H+u}(\phi)(N,A)$ défini par

$\Omega(b,f) = \gamma(A)^{-1}\beta_{\pi(A)}r_{H+u}(\alpha_{\pi(A)}\gamma(A)b, \alpha_{\pi(A)}\gamma(A)f\gamma(A)^{-1}\beta_{\pi(A)})$ munit $L_{H+u}(\phi)$ d'une structure de catégorie primitive récursive (L).

Il nous reste à vérifier la condition d'unicité 3L.: Soient $k : N \to A$ et $f : A \to A$, deux morphismes de $L_{H+u}(\phi)$ tels que $k\sigma = fk$. Alors, $\alpha_{\pi(A)}\gamma(A)k\sigma = \alpha_{\pi(A)}\gamma(A)f\gamma(A)^{-1}\beta_{\pi(A)}\alpha_{\pi(A)}\gamma(A)k$. Et par unicité de r_{H+u},

$$\alpha_{\pi(A)}\gamma(A)k = r_{H+u}(\alpha_{\pi(A)}\gamma(A)k\theta,\ \alpha_{\pi(A)}\gamma(A)f\gamma(A)^{-1}\beta_{\pi(A)})$$

$$\Rightarrow k = \gamma(A)^{-1}\beta_{\pi(A)}r_{H+u}(\alpha_{\pi(A)}\gamma(A)k\theta, \alpha_{\pi(A)}\gamma(A)f\gamma(A)^{-1}\beta_{\pi(A)})$$

$$= \Omega(k\theta,f)$$

//

Donc, $L_{H+u}(\phi)$ est primitive récursive (L+u).

<u>COROLLAIRE 4.101</u> L'unique foncteur primitif récursif (H+u) $\Xi_{H+u,L+u} : L_{H+u}(\phi) \to L_{L+u}(\phi)$ est primitif récursif (L+u).

<u>PREUVE</u> Il faut démontrer que pour tout morphisme $b : T \to A$ et tout morphisme $f : A \to A$ de $L_{H+u}(\phi)$,

$$\Xi_{H+u,L+u}(\Omega(b,f)) = r_{L+u}(\Xi_{H+u,L+u}(b),\Xi_{H+u,L+u}(f))$$

Nous avons vu que $\Omega(b,f)\sigma = f\Omega(b,f)$. Alors

$$\Xi_{H+u,L+u}(\Omega(b,f))\sigma = \Xi_{H+u,L+u}(f)\Xi_{H+u,L+u}(\Omega(b,f)).$$

Et par conséquent, par l'unicité de r_{L+u}

$$\begin{aligned}\Xi_{H+u,L+u}(\Omega(b,f)) &= r_{L+u}(\Xi_{H+u,L+u}(\Omega(b,f))\theta,\Xi_{H+u,L+u}(f))\\ &= r_{L+u}(\Xi_{H+u,L+u}(\Omega(b,f)\theta),\Xi_{H+u,L+u}(f))\\ &= r_{L+u}(\Xi_{H+u,L+u}(b),\Xi_{H+u,L+u}(f))\end{aligned}$$

<u>COROLLAIRE 4.102</u> $L_{H+u}(\phi) \simeq L_{L+u}(\phi)$ et $S_{H+u}(\phi) \simeq S_{L+u}(\phi)$.

<u>REMARQUE</u> Dans cette seconde partie du chapitre, nous avons introduit la condition $\beta\alpha = I(N\wedge N)$ dans plusieurs structures afin de générer des catégories isomorphes. Nous pourrions modifier cette condition de la façon suivante tout en conservant les relations déjà établies entre les catégories: remplacer le couple de morphismes $\alpha : N\wedge N \to N$ et $\beta : N \to N\wedge N$ par tout couple de morphismes $\alpha' : N\wedge N \to N$ et $\beta' : N \to N\wedge N$ choisis de façon à ce que les différents foncteurs Ξ introduits dans ce chapitre les préservent, c'est-à-dire

$\Xi(\alpha') = \alpha'$ et $\Xi(\beta') = \beta'$, et tels que les fonctions $\tilde{\alpha} : \mathcal{N}^2 \to \mathcal{N}$ et $\tilde{\beta} : \mathcal{N} \to \mathcal{N}^2$ représentées par les morphismes α' et β' vérifient l'équation $\widetilde{\beta\alpha} = I(\mathcal{N}^2)$. Il est à noter que nous ne pourrions pas nécessairement relier les catégories où $\beta\alpha = I(N \wedge N)$ aux catégories où $\beta'\alpha' = I(N \wedge N)$.

Etudions une dernière structure de catégorie primitive récursive qui nous permettra de relier naturellement les notions de catégorie primitive récursive et de catégorie pré-récursive. Si nous examinons la définition d'une catégorie primitive récursive (H, K ou L), nous constatons que les cinq morphismes $+$, A, $\dot{-}$, $(\ )^2$ et $\surd$ sont là afin d'assurer la présence de morphismes représentant les fonctions addition, antécédent, soustraction non-négative, carré et racine carrée. Or, dans une catégorie primitive récursive (L), d'autres morphismes induits par l'opérateur r_L représentent les fonctions carré et racine carrée. Ainsi, les morphismes

$$(\ )^2_L = q(N,N)r_L(<\theta,\theta>,<\sigma p(N,N),\sigma+<+<q(N,N),p(N,N)>,p(N,N)>>) \text{ et}$$

$$\surd_L = q(N,N)r_L(<\theta,\theta>,<\sigma p(N,N),+<q(N,N),\dot{-}<\sigma\theta 0(N)p(N,N),+<\dot{-}<\sigma p(N,N),(\ )^2\sigma q(N,N)>,$$
$$\dot{-}<(\ )^2_L\sigma q(N,N),\sigma p(N,N)>>>>>)$$

représentent respectivement les fonctions carré et racine carrée. Reprenons la définition de catégorie primitive récursive (L), supprimons les références à $(\ )^2$ et $\surd$ et appelons cette nouvelle structure "catégorie primitive récursive (M)". Pour ce qui est d'une "catégorie primitive récursive (M+u)", nous demandons l'unicité de r_L et la condition $\beta_M\alpha_M = I(N \wedge N)$ où β_M et α_M sont les morphismes introduits dans la définition 4.91 où nous remplaçons $(\ )^2$ et $\surd$ par $(\ )^2_L$ et $\surd_L$. Comme pour les autres structures, nous retrouvons des catégories $\mathcal{L}_M(\phi)$ et $\mathcal{L}_{M+u}(\phi)$, munies des deux propriétés qui nous intéressent. En comparant les structures de catégories primitives récursives (L, M, L+u et M+u), nous obtenons les foncteurs suivants:

$$L_M(\phi) \to L_L(\phi), \quad L_L(\phi) \to L_M(\phi), \quad L_{L+u}(\phi) \to L_{M+u}(\phi), \quad L_{M+u}(\phi) \to L_{L+u}(\phi).$$

Malgré l'existence des deux premiers foncteurs, $L_M(\phi)$ et $L_L(\phi)$ ne sont pas isomorphes. Par contre, dans $L_{L+u}(\phi)$, l'unicité de l'opérateur r_L permet d'identifier les morphismes $(\ )^2$ et $\surd$ aux morphismes $(\ )^2_L$ et $\surd_L$. Par conséquent, $L_{L+u}(\phi)$ et $L_{M+u}(\phi)$ sont isomorphes.

Nous pourrions aussi éliminer le morphisme A dans la définition d'une catégorie récursive (M) car le morphisme $A_L = q(N,N)r_L(<\theta,\theta>,<\sigma p(N,N),p(N,N)>)$ représente la fonction antécédent. Nous obtiendrions ainsi deux nouvelles définitions, celle de catégorie primitive récursive (N) et celle de catégorie primitive récursive (N+u). Mais une catégorie primitive récursive (M) n'est pas primitive récursive (N) et inversement. Par contre, $L_{M+u}(\phi)$ est isomorphe à $L_{N+u}(\phi)$.

Il nous reste ainsi deux morphismes initiaux autres que θ et σ, soient $+$ et $\dot{-}$. Si nous travaillions avec une catégorie fermée, nous pourrions éliminer ces deux morphismes. En effet, toute catégorie cartésienne fermée, munie d'un objet N, de morphismes θ et σ et fermée sous un opérateur r_L est primitive récursive (M), car les morphismes A_L,

$$+_L = e(N,N)<q(N,N).r_L([q(T,N)]^*,[[\sigma e(N,N)<q(N\supset N,N),p(N\supset N,N)>]^* q(T,N\supset N)]^*)p(N,N)> \quad \text{et}$$

$$\dot{-}_L = e(N,N)<q(N,N),r_L([q(T,N)]^*,[[A_L e(N,N)<q(N\supset N,N),p(N\supset N,\check{N})>]^* q(T,N\supset N)]^*)p(N,N)>$$

possèdent les propriétés de A, + et $\dot{-}$. Ainsi, toute catégorie pré-récursive A est primitive récursive (M), l'opérateur $\psi : A(T,A) \times A(A,A) \to A(\check{N},A)$, défini par $\psi(b,f) = e(A,A)<bO(N),e(A\supset A,A\supset A)<[fq(N,A)]^*,K(A)>>$ pour tout morphisme $b : T \to A$ et tout morphisme $f : A \to A$ de A, possédant les propriétés d'un opérateur r_L. Par conséquent, toute fonction primitive récursive est représentable dans chaque catégorie pré-récursive et le théorème 2.4 peut s'inscrire comme corollaire du résultat précédent.

Si nous ajoutons à la structure de catégorie pré-récursive avec unicité, structure introduite dans la conclusion du chapitre 2, la condition $\beta_M\alpha_M = \Gamma(N \wedge N)$ où β_M et α_M sont les morphismes définis par la structure de catégorie primitive récursive (M) et si nous notons $\overline{\phi}_u^{\,+}$, la catégorie libre possédant cette structure, engendrée par la catégorie vide ϕ, $\overline{\phi}_u^{\,+}$ est primitive récursive (M+u). Les foncteurs suivants existent:

$$L_{M+u}(\phi) \to \overline{\phi}_u^{\,+}, \qquad S_{M+u}(\phi) \to S(\overline{\phi}_u^{\,+})$$

où $S(\overline{\phi}_u^{\,+})$ est la sous-catégorie pleine de $\overline{\phi}_u^{\,+}$ telle que $|S(\overline{\phi}_u^{\,+})| = \{N^i | i \in N\}$. Toutefois, il ne saurait être question d'un isomorphisme entre $S_{M+u}(\phi)$ et $S(\overline{\phi}_u^{\,+})$ car il existe un morphisme de $S(\overline{\phi}_u^{\,+})$ représentant une fonction récursive mais non primitive récursive et aucun morphisme de $S_{M+u}(\phi)$ ne possède cette propriété.

Nous venons de voir que la notion de catégorie pré-récursive peut découler naturellement de l'étude des catégories primitives récursives. Par contre, cette nouvelle structure est trop riche pour engendrer une solution au problème soulevé dans ce chapitre. Jusqu'ici, nous avions modifié peu à peu notre structure de départ, celle de catégorie primitive récursive (A) tout en conservant toujours la même classe de fonctions représentées par les morphismes, soit celle des fonctions primitives récursives. Mais remplacer la condition d'existence de deux morphismes + et $\dot{-}$ par la fermeture de la catégorie nous conduit hors de la classe des fonctions primitives récursives.

Nous pouvons établir une autre relation entre les catégories primitives récursives et les catégories pré-récursives : $\overline{\phi}_u{}^+$ est primitive récursive (D). En effet, si nous reprenons l'idée de la section B.iii) de la preuve du théorème 2.4 où nous remplaçons le morphisme $g : N^n \to N$ par un morphisme $\tilde{g} : A \to B$ et le morphisme $h : N^{n+2} \to N$ par un morphisme $\tilde{h} : (A \wedge N) \wedge B \to B$, nous obtenons un morphisme $\tilde{\nu} : A \wedge N \to N$ et un morphisme $\tilde{\tau} : A \wedge N \to B$ possédant les propriétés suivantes:

$$\tilde{\nu}\langle I(A), \theta O(A)\rangle = \theta, \qquad \tilde{\nu}\langle p(A,N), \sigma q(A,N)\rangle = \sigma\tilde{\nu}.$$
$$\tilde{\tau}\langle I(A), \theta O(A)\rangle = \tilde{g}, \qquad \tilde{\tau}\langle p(A,N), \sigma q(A,N)\rangle = \tilde{h}\langle\langle p(A,N), \tilde{\nu}\rangle, \tilde{\tau}\rangle.$$

Nous pouvons démontrer que

$[\tilde{\nu}\langle q(N,A), p(N,A)\rangle]^*\sigma = [\sigma e(A,N)\langle q(A\supset N,A), p(A\supset N,A)\rangle]^*[\tilde{\nu}\langle q(N,A), p(N,A)\rangle]^*$ et

$[\tilde{\nu}\langle q(N,A), p(N,A)\rangle]^*\theta = [\theta O(A)q(T,A)]^* = [\theta O(T\wedge A)]^* = [\theta p(T,A)]^*$.

Par unicité sur $\overline{\phi}_u{}^+$,

$[\tilde{\nu}\langle q(N,A), p(N,A)\rangle]^* = \psi([\theta p(T,A)]^*, [\sigma e(A,N)\langle q(A\supset N,A), p(A\supset N,A)\rangle]^*)$.

Mais $[p(N,A)]^*$ satisfait les équations

$[p(N,A)]^*\sigma = [\sigma e(A,N)\langle q(A\supset N,A), p(A\supset N,A)\rangle]^*[p(A,N)]^*$ et $[p(N,A)]^*\theta = [\theta p(T,A)]^*$

et par unicité sur $\overline{\phi}_u^{\,+}$,

$[p(N,A)]^* = \psi([\theta p(T,A)]^*,[\sigma e(A,N)<q(A\supset N,A),p(A\supset N,A)>]^*)$.

Donc, $[\tilde{\nu}\ q(N,A),p(N,A)>]^* = [p(N,A)]^*$, $\tilde{\nu}<q(N,A),p(N,A)> = p(N,A)$ et

$q(A,N) = p(N,A)<q(A,N),p(A,N)> = \tilde{\nu}<q(N,A),p(N,A)><q(A,N),p(A,N)> = \tilde{\nu}$.

Ainsi $\tilde{\tau} : A\wedge N \to B$ satisfait les équations

$\tilde{\tau}<I(A),\theta O(A)> = \tilde{g}$ et

$\tilde{\tau}<p(A,N),\sigma q(A,N)> = \tilde{h}<<p(A,N),\tilde{\nu}>,\tilde{\tau}> = \tilde{h}<<p(A,N),q(A,N)>,\tilde{\tau}> = \tilde{h}<I(A\wedge N),\tilde{\tau}>$

et $\overline{\phi}_u^{\,+}$ est primitive récursive (C).

Comme les morphismes α_A et β_A, définis par la structure de catégorie primitive récursive (C) de $\overline{\phi}_u^{\,+}$, sont respectivement les morphismes α_M et β_M, alors $\beta_A\alpha_A = \beta_M\alpha_M = I(N\wedge N)$. Et en utilisant l'unicité de $\overline{\phi}_u^{\,+}$, nous pouvons vérifier que $\overline{\phi}_u^{\,+}$ est effectivement primitive récursive (D). Ainsi les catégories $L_D(\phi)$, $\overline{\phi}_u^{\,+}$, $S_D(\phi)$ et $S(\overline{\phi}_u^{\,+})$ sont liées de la façon suivante:

$$L_D(\phi) \to \overline{\phi}_u^{\,+}, \qquad S_D(\phi) \to S(\overline{\phi}_u^{\,+}).$$

Tout comme dans le cas de $S_{M+u}(\phi)$, il ne saurait être question d'isomorphisme entre $S_D(\phi)$ et $S(\overline{\phi}_u^{\,+})$.

Au cours de ce chapitre, nous avons défini plusieurs structures de catégorie primitive récursive et chacune de ces structures nous a fourni une catégorie possédant les deux propriétés suivantes:

1) Toute fonction primitive récursive et tout produit de nombres naturels sont représentables dans la catégorie.

2) Tout morphisme de la catégorie est un morphisme ayant pour codomaine l'objet terminal de la catégorie ou représente une fonction primitive récursive ou un produit de nombres naturels.

Le diagramme suivant nous indique les relations entre toutes ces catégories et les liens entre ces catégories et les catégories pré-récursives $S(\overline{\phi})$ et $S(\overline{\phi}_u^{\,+})$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & & & S(\overline{\phi}) \arrow[ddddd, dashed] & & & \\
 & & S_L(\phi) \arrow[r] \arrow[ddd] & & S_M(\phi) \arrow[urr] \arrow[drrrrr] \arrow[ddd] & & & & & \\
S_K(\phi) \arrow[r] \arrow[d] & S_H(\phi) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[d] & & S_G(\phi) \arrow[rr] \arrow[d] & & S_F(\phi) \arrow[rr] \arrow[d] & & S_E(\phi) \arrow[r] \arrow[d] & S_A(\phi) \arrow[r] \arrow[d] & S_C(\phi) \arrow[d] \arrow[uulll] \\
S_{K+u}(\phi) \arrow[r] & S_{H+u}(\phi) \arrow[rr] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & & S_{G+u}(\phi) \arrow[rr] & & S_{F+u}(\phi) \arrow[rr, phantom, "\simeq"] & & S_{E+u}(\phi) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & S_B(\phi) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & S_D(\phi) \arrow[ddlll] \\
 & & S_{L+u}(\phi) \arrow[rr, phantom, "\simeq"] & & S_{M+u}(\phi) \arrow[urrrrr] \arrow[drr] & & & & & \\
 & & & & & & S(\overline{\phi}_u^{\,+}) & & &
\end{tikzcd}
$$

REMERCIEMENTS

Avant de terminer ce travail, je tiens à remercier de façon particulière mon directeur de thèse, Monsieur Joachim Lambek, qui m'a suggéré ce sujet et qui m'a donné de judicieux conseils tout au long de mes recherches.

Le Conseil National de Recherches du Canada et l'Université du Québec à Trois-Rivières m'ont apporté une aide précieuse, le premier par son apport financier qui m'a permis d'entreprendre mes études doctorales, la seconde en m'accordant une année de perfectionnement, ce qui m'a permis de compléter mes recherches.

Je veux souligner l'excellent travail de dactylographie de Madame Angèle Saint-Pierre et en profiter pour la remercier.

Je veux encore remercier les professeurs du département de mathématiques de l'Université McGill, mes collègues du département de mathématiques de l'Université du Québec à Trois-Rivières et tous ceux qui, de près ou de loin, m'ont soutenue dans ce long projet de recherches.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. CHURCH, *An unsolvable problem of elementary number theory*, American Journal of Mathematics, Vol. 58 (1936), pp. 345-363.

[2] A. CHURCH, *The calculi of lambda-conversion*, Annals of Mathematics Studies 6 (Princeton University Press, Princeton, N.J., 1941).

[3] H.B. CURRY et R. FEYS, *Combinatory logic*, Vol. 1 (North Holland, Amsterdam, 1958).

[4] S. EILENBERG et G.M. KELLY, *Closed categories*, Proc. Conference Categorical Algebra, La Jolla 1965 (Springer-Verlag, New York, 1966), pp. 421-562.

[5] P. FREYD, *Aspects of topoi*, Bull. Austral. Math. Soc., Vol. 7 (1972), pp. 1-76.

[6] K. GÖDEL, *On formally undecidable propositions of principia mathematica and related systems I*, From Frege to Gödel, Jean von Heijenoort (Harvard University Press, 1967), pp. 596-616. (Reprise d'un article allemand publié en 1931.)

[7] K. GÖDEL, *On undecidable propositions of formal mathematical systems*, Notes by S.C. Kleene and Barkley Rosser on lectures at the Institute for Advanced Study, Mimeographed (Princeton, N.J., 1934).

[8] A. GRZEGORCZYK, *Fonctions récursives*, Collection de logique mathématique (Gauthier-Villars & Cie, Paris et E. Nauwelaerts, Louvain, 1961).

[9] S.C. KLEENE, *λ-definability and recursiveness*, Duke Math. J., Vol. 2 (1936), pp. 340-353.

[10] S.C. KLEENE, *General recursive functions of natural numbers*, Math. Ann., Vol. 112 (1936), pp. 727-742.

[11] S.C. KLEENE, *Introduction to metamathematics*, The University Series in higher mathematics (Van Nostrand Reinhold, 1952).

[12] S.C. KLEENE, *A note on recursive functions*, Bull. American Mathematical Society, Vol. 42 (1936), pp. 544-546.

[13] J. LAMBEK, *Deductive systems and categories I*, Math. Systems Theory 2 (1958), pp. 278-318.

[14] J. LAMBEK, *Deductive systems and categories II*, Lecture Notes in Mathematics 86 (Springer-Verlag, Berlin, 1969).

[15] J. LAMBEK, *Deductive systems and categories III*, Lecture Notes in Mathematics 274 (Springer-Verlag, Berlin, 1972).

[16] J. LAMBEK, *Functional completeness of cartesian categories*, Annals of Mathematical Logic, Vol. 6, No. 3/4 (North Holland, Amsterdam, 1974), pp. 259-292.

[17] J. MACLANE, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics (Springer-Verlag, New York, 1971).

[18] C.R. MANN, *The connection between equivalence of proofs and cartesian closed categories*, Proceedings of the London Mathematical Society, Series (3) 31, No. 3 (1976), pp. 289-310.

[19] E. MENDELSON, *Introduction to mathematical logic*, The University series in undergraduate mathematics (Van Nostrand Reinhold, 1964).

[20] R. PÉTER, *Konstruktion nichtrekursiver funktionen*, Math. Ann., Vol. 111 (1935), pp. 42-60.

[21] R. PÉTER, *Recursive functions* (Academic Press, New York and London, 1967).

[22] D. PRAWITZ, *Ideas and results in proof theory*, Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium (North Holland, Amsterdam, 1971), pp. 235-307.

[23] P.C. ROSENBLOOM, *The elements of mathematical logic* (Dover, New York, 1950).

[24] M.E. SZABO, *Proof-theoretic investigations in categorical algebra*, Ph.D. Thesis (McGill University, 1970).

[25] M.E. SZABO, *A categorical equivalence of proofs*, Notre Dame J. of Formal Logic 15 (1974), pp. 174-191.

[26] A.M. TURING, *Computability and λ-definability*, Jour. Symbolic Logic, Vol. 2 (1937), pp. 153-163.