

**HABILETÉ, EXPERTISE ET CATÉGORISATION DE PROBLÈMES
MATHÉMATIQUES**

par

Sophie Pelletier

Mémoire présenté à la faculté des études supérieures et de la recherche
pour l'obtention du grade de
"Master of Arts in Educational Psychology"

"Department of Educational and Counselling Psychology"
Faculté des Sciences de l'Éducation
Université McGill
Montréal, Québec, Canada

©1994

Sophie Pelletier

à Yves

et

à mes parents

ABSTRACT

The present study attempts to locate gifted individuals in the process of acquisition of expertise, in a specific academic field. We compared high ability students in mathematics ("gifted") with average ability students ("novices") and experts (university graduate students), on their knowledge organization by examining how they divided 30 high-school level mathematical problems into groups. Each subject performed three tasks: an initial division of the problems into groupings, the identification of similarities among these groupings, and a more detailed redivision of the initial groupings. We examined and compared two aspects of the results: the external characteristics of the groupings of problems and the explanatory content associated with these groupings. Significant differences were found between average ability subjects and experts for a number of measurements, notably concerning the number of reasons used to describe the groupings and the frequency of use and nature of these reasons. The reasons given by the experts were based on more complex elements and involved more metacognitive processes. The performance of high ability subjects fell between that of average ability subjects and of experts, suggesting that high ability students possess characteristics of both novices and experts with regard to these measurements. With respect to the hierarchical complexity of the groupings, however, high ability students were significantly closer to experts. In general, the results indicate that knowledge organization increases in complexity as the subjects' mathematical ability grows. Finally, this study shows the relevance of research on giftedness for a greater understanding of the mechanisms involved in the acquisition of expertise.

REMERCIEMENTS

Plusieurs personnes ont fourni une aide indispensable à travers mes années d'étude aux cycles supérieurs et je leur dois toute ma gratitude.

Je voudrais d'abord remercier le Dr. Bruce Shore pour son soutien continu, sa compréhension et ses encouragements, son ouverture d'esprit et sa confiance en mes capacités. Mon travail à ses côtés et nos discussions m'ont permis de développer une conception de l'éducation fondée sur la recherche de l'excellence présente chez tous les enfants.

Je suis reconnaissante au Dr. Lannie Kanevsky qui s'est révélée une aide précieuse et disponible lors de la conception du système de codification, au Dr. Alenoush Saroyan pour son amitié et pour ses conseils pertinents, particulièrement lors des études de fidélité et aux Drs. Dominic Modafferri, Egil Pedersen et Socrates Rapagna pour leur disponibilité à discuter de certains aspects techniques reliés à ma thèse.

Je remercie M. Don Taylor, directeur de l'école "Royal West Academy", qui, en nous autorisant à contacter élèves et parents, leur a montré l'importance de la recherche dans ce domaine et M. Michael Lewis, enseignant, pour avoir accepté de participer à l'étude et pris le temps de discuter de plusieurs aspects relatifs à son enseignement.

Merci également à M. Kurt Armstrong de l'école Options II, pour ses conseils et son aide matérielle lors de la sélection des problèmes expérimentaux.

Merci à tous les élèves et étudiant(e)s ayant accepté de participer à l'étude et sans qui rien n'aurait été possible: les élèves d'Explorations 1988 (étude pilote), ceux de Royal West Academy et les étudiant(e)s de maîtrise et doctorat inscrit(e)s aux programmes de mathématiques des universités McGill, Laval et de Montréal.

Je dois à certains amis une gratitude toute spéciale. D'abord, Matthieu Dufour, pour sa disponibilité et dont l'expertise mathématique s'est révélée une aide précieuse, tout particulièrement lors de la conception du système de codification. Son humour a également allégé la codification plutôt ardue de certains protocoles. Peter Leesinsky, pour ses conseils lors du choix des problèmes mathématiques et son expertise pour l'établissement des solutions des problèmes et Jean-Pierre Paré pour sa disponibilité et ses conseils lors de l'étude pilote.

Je suis également reconnaissante à Kim Austin et Marguerite Roy pour leur gentillesse et leur participation comme codeuses indépendantes lors des études de fidélité.

Je remercie mes ami(e)s de McGill qui, par leur présence et leur support, ont créé une ambiance de travail chaleureuse et stimulante.

Merci à mes amis, ma belle-famille et ma famille qui m'ont soutenu à travers ces années d'étude. Particulièrement je veux remercier mes parents; sans leur amour, leur soutien inconditionnel et l'éducation qu'ils m'ont procuré, je n'aurais pu en arriver jusqu'ici. Je leur suis reconnaissante d'avoir toujours cru en moi et de m'avoir ainsi permis de m'épanouir pleinement.

Mon époux Yves, par son amour et son soutien, m'a aidé à passer à travers tous les obstacles et épreuves de façon sereine. Je lui dois énormément. Il s'est, de plus, révélé une aide sans prix, par ses critiques constructives et son aide technique.

En terminant, je tiens à remercier le Fonds pour la Formation de Chercheurs et l'Aide à la Recherche du Québec et la Faculté des Sciences de l'Éducation de l'université McGill pour leur soutien financier pendant mes études de second cycle.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	ii
ABSTRACT	iii
REMERCIEMENTS	iv
TABLE DES MATIÈRES	vi
LISTE DES TABLEAUX	ix
LISTE DES FIGURES	x
CHAPITRE 1 Introduction	1
Résolution de Problème et Compétence	1
Représentation et Compréhension	2
Différences Individuelles et Résolution de Problèmes	4
L'Approche des Corrélations Cognitives	4
L'Approche Experts-Novices	5
Transition de l'État de Novice à Celui d'Expert	12
L'Approche de la Douance	21
Combinaison des Recherches sur la Douance et l'Expertise	26
Organisation des Connaissances et Catégorisation	29
Structure de la Mémoire et Organisation des Connaissances	30
Processus de Catégorisation et Représentations Internes des Problèmes	35
Études sur les Catégorisations	37
Questions de Recherche	45
CHAPITRE 2 Méthodologie	48
Sujets	48
Données sur la sélection des sujets	48
Caractéristiques Générales des Élèves Venant de Terminer Leur Secondaire	49
Critères de Sélection des Sujets	49
Matériel	52
Critères de Sélection des Problèmes	52
Validité du Choix des Problèmes	55
Étude Pilote	57
Clarté des Problèmes	57

Clarté et Formulation des Directives	57
Ajustement dans la Procédure Expérimentale	59
Présence de Différentes Méthodes de Catégorisation	61
Tâches Expérimentales	61
Directives Préliminaires	61
Matériel Utilisé Durant l'Expérimentation	62
Tâche d'Entraînement	62
Directives des Tâches Expérimentales	62
Explication des Groupements	64
Questionnaire Final	64
Présence d'Erreurs Non Intentionnelles dans Quatre Problèmes	64
Développement du Système de Codification	65
Transcription et Segmentation des Protocoles	65
Identification des Catégories Générales	65
Système de Codification Fondé sur les Raisons Associées aux Catégorisation	67
Codification	77
Validité et Fidélité du Système de Codification	78
Analyse	83
Caractéristiques Externes des Groupements	83
Contenu Explicatif Associé à Chacun des Groupements de Problèmes	84
CHAPITRE 3 Résultats et Discussion	85
Caractéristiques Externes des Groupements	85
Organisation Hiérarchique des Groupements de Problèmes	85
Organisation Selon l'Ordre Chronologique d'Enseignement	87
Nombre de Groupements	89
Degré d'Inclusion des Groupements de Problèmes	94
Temps de Catégorisation	95
Description de Groupements Typiques Conçus Par les Trois Groupes-Habilité	96

Résumé des Comparaisons des Caractéristiques Externes des Groupements	103
Contenu Explicatif Associé à Chacun des Groupements de Problèmes	104
Présentation des Analyses	105
Comparaisons Entre les Trois Tâches au Sein de Chaque Groupe-Habilité	107
Comparaison Entre les Trois Groupes-Habilité à Chacune des Tâches	118
Résumé des Résultats des Deux Analyses Précédentes	131
Comparaisons entre les Différents groupes-habilité pour l'ensemble des tâches 1, 2 et 3	133
Nombre de sujets de chaque groupe-habilité ayant utilisé chaque catégorie	139
Influence de la Forme Externe des Problèmes	140
Présence de Stratégies Alternatives de Solution	141
Liens Entre Certaines Caractéristiques Externes des Groupements et les Raisons qui leur sont Associés	143
CHAPITRE 4 Conclusion	147
Implications Théoriques	147
Catégorisation et Organisation des Connaissances	147
Différences Dans l'Organisation des Connaissances des Trois Groupes-Habilité . .	148
Place de la Douance Dans la Transition du Stade de Novice à Celui d'Expert . . .	154
Implications pour l'Éducation	161
Directions Futures	167
BIBLIOGRAPHIE	172
ANNEXES	
1 Correspondance officielle	A1
2 Directives relatives aux tâches de catégorisation	A4
3 Tâche d'Entraînement	A12
4 Problèmes utilisés pour les tâches expérimentales	A21
5 Questionnaire final	A31
6 Solution des problèmes; Expert 1	A34
7 Solution des problèmes; Expert 2	A52
8 Directives au codeur indépendant pour le calcul de fidélité	A67

LISTE DES TABLEAUX

Tableaux

1	Définition des trois formes de problèmes utilisées	56
2	Définition des structures de codification	68
3	Quantité de similarités trouvées (tâche 2)	91
4	Proportion des problèmes inclus dans les groupements les plus importants	94
5	Résumé des codes	108
6	Résumé des résultats d'analyse de variance (Kruskal-Wallis)	119
7	Types de raisons atteignant les pourcentages de présence les plus élevées dans les groupements de la tâche 1	121
8	Types de raisons atteignant les pourcentages de présence les plus élevées dans les groupements de la tâche 2	123
9	Résumé des résultats d'analyse de variance (Kruskal-Wallis)	125
10	Types de raisons atteignant les pourcentages de présence les plus élevées dans les groupements de la tâche 3	127
11	Résumé des résultats d'analyse de variance (Kruskal-Wallis)	133
12	Types de raisons atteignant les pourcentages de présence les plus élevées dans les groupements des tâches 1-3	138

LISTE DES FIGURES

Figures

1	Représentation des niveaux hiérarchiques	86
2	Niveaux hiérarchiques utilisés par les groupes sujets lors de trois tâches expérimentales	88
3	Nombre moyen de groupements aux tâches 1 et 3	92
4	Représentation de la hiérarchie de groupements de l'expert #12	98
5	Représentation de la hiérarchie de groupements de trois experts (#17, 19 & 21)	99
6	Représentation de la hiérarchie de groupements de trois sujets d'habileté moyenne (#10, 16 & 20)	101
7	Représentation de la hiérarchie de groupements de trois sujets de grande habileté (#1, 3 & 4)	102
8	Nombre de sujets de chaque groupe-habileté utilisant chaque catégories pour les trois tâches combinées	106
9	Fréquence à laquelle les catégories de raison apparaissent dans les explications relatives aux groupements de problèmes pour chaque groupe-habileté à chaque tâche	110
10	Fréquence à laquelle les catégories de raison apparaissent dans les explications relatives aux groupements de problèmes pour l'ensemble des trois tâches	134

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Cette recherche a été entreprise afin d'examiner la présence de certains liens entre les résultats découlant des recherches sur la douance et ceux découlant des recherches faites sur l'expertise. Plus spécifiquement, nous essayons de situer l'individu doué dans la progression du stade de novice à celui d'expert. Nous utilisons une tâche mathématique pour comparer nos différents groupes habileté (habileté moyenne, grande habileté et experts en mathématique) sur le plan de l'organisation des connaissances et essayons de faire ressortir leurs différences et ressemblances. La revue de littérature qui suit donne un aperçu de deux courants de pensée et de recherche dans lesquels se situe cette étude; ceux de la résolution de problèmes et de l'organisation des connaissances. Ceci est fait dans la perspective des différences individuelles (expertise et douance) et en relation avec le domaine des mathématiques.

Résolution de Problème et Compétence

Au début des années 60, un changement d'orientation se produisit dans le domaine de la résolution de problèmes. De l'étude des conditions nécessaires à la solution d'un problème, les chercheurs se tournèrent vers l'étude des processus cognitifs impliqués lors de la recherche de solution. Ils se concentrèrent principalement sur les tâches ne demandant que peu de connaissances pour être résolues et où la compétence requise pouvait être acquise en un court laps de temps. "La tour de Hanoi" et "les missionnaires et les cannibales" sont deux exemples de ces tâches. L'étude de ce genre de problèmes permit aux scientifiques de mieux décrire les processus heuristiques généraux utilisés lors de la résolution de ces problèmes (Newell & Simon, 1972), de même que de connaître les capacités des gens à traiter l'information.

Les résultats découlant de ces études, bien qu'intéressants, n'étaient toutefois pas satisfaisants et suffisants pour les scientifiques. Davantage devait être appris sur la pensée et l'apprentissage dans les domaines exigeant une structure de connaissance plus importante; en effet, la plupart des problèmes auxquels une personne est confrontée dans sa vie de tous les jours nécessitent l'utilisation de connaissances acquises dans le passé. Les scientifiques abandonnèrent donc graduellement l'étude des problèmes qui n'exigeaient

aucune connaissance particulière, pour se concentrer sur des problèmes demandant une connaissance spécifique et considérable pour être résolus. On commença à s'intéresser à des domaines plus complexes comme la physique, le jeu d'échec, et les mathématiques.

Représentation et Compréhension

L'étude de la résolution de problèmes dans ces domaines plus complexes a permis d'identifier au moins deux étapes majeures avant l'atteinte d'une solution (a) la représentation du problème et (b) la recherche de moyens pour résoudre le problème. Chacune de ces étapes a deux volets. Lors de la représentation, le sujet traduit d'abord chaque phrase du problème de façon à construire une représentation interne de ce dernier. Chaque phrase est alors emmagasinée dans la mémoire. Ensuite, les parties du problèmes sont mises ensembles dans une représentation significative. La recherche de moyens pour résoudre les problèmes comporte d'abord le choix d'une stratégie pour résoudre le problème et l'utilisation d'algorithme approprié pour résoudre et générer les calculs rapidement et correctement (Mayer, 1983).

Notre étude se penche sur le premier aspect, la représentation du problème, plus spécifiquement sur la relation entre le genre d'organisation des problèmes dans la mémoire et le degré d'habileté et d'expérience des sujets. En effet, la qualité de la représentation interne des problèmes semble reliée de près à l'atteinte d'une bonne compréhension (Greeno, 1977, 1978; Hayes & Simon, 1977; Lester, 1982) et cette dernière joue un rôle important dans l'étude de la résolution de problème.

Plusieurs auteurs ont cherché à mieux définir le lien existant entre représentation et compréhension. Des théories courantes, dans les domaines impliquant des connaissances complexes, indiquent qu'une résolution de problème faite avec succès est en fait un processus où l'individu construit des représentations de problèmes de plus en plus riches et raffinées; le solutionneur de problème commence avec une représentation initiale, puis il élabore et raffine cette représentation initiale jusqu'à ce qu'il atteigne une représentation finale du problème, représentation adéquate pour la solution. Les processus de compréhension incluraient également des processus de représentation se développant selon les différentes situations des problèmes, la plupart des problèmes pouvant être représentés de plusieurs façons. Ainsi, le genre de représentation de problème choisi lors de la

résolution pourrait influencer le niveau de difficulté avec lequel l'individu aborderait les problèmes (Lester, 1982). Selon Lester, enfin, le genre de compréhension atteint par un individu lors d'une tâche dans un domaine particulier pourrait être important pour l'habileté à transférer les connaissances nouvellement acquises à des tâches similaires.

Lesh (1985) propose une autre vision de ce processus. Selon lui, le solutionneur de problèmes construit puis abandonne les modèles de représentation instables du problème jusqu'à ce qu'il atteigne un modèle stable. Greeno (1977, 1978) a une définition plus générale de la compréhension: un processus consistant à construire une représentation de l'objet qui doit être compris. Toutefois le fait de comprendre ou de ne pas comprendre dépendrait de la nature de la représentation possédée par le sujet. Greeno (1977) a élaboré trois critères pour décider d'une bonne compréhension: (a) atteinte d'une représentation cohérente; (b) correspondance étroite entre la représentation interne et les éléments à comprendre; (c) degré de connexion entre la représentation et les concepts et procédures générales dans une structure de connaissance. Pour Hayes et Simon (1977),

To understand a written problem text a person must do two things. First, he must read the sentences of the text and extract information from them by grammatical and semantic analysis. Second, he must construct from the newly extracted information a representation of the problem that is adequate for the solution. This representation must include the initial conditions of the problem, its goal, and the operators for reaching the goal from the initial state. (p. 21)

Selon Mayer (1982) la compréhension implique la capacité à construire des schèmes (schémas) appropriés aux différents types de problèmes. Pour comprendre un problème, l'étudiant a besoin de plus que la connaissance linguistique et factuelle. Il a besoin de trouver une façon de structurer l'information en un tout significatif, c'est-à-dire en la reliant à un type de problème particulier ou schème. Lorsque l'étudiant est en face d'un problème il peut essayer de catégoriser le problème comme appartenant à un certain type. Une fois que l'étudiant a déterminé le schème du problème, le processus consistant au choix des informations pertinentes et à leur traduction en des équations est mis en action.

Les résultats mentionnés précédemment appuient l'idée selon laquelle l'habileté à se représenter des problèmes, et par extension, à placer ceux-ci par catégories (Mayer, 1982), sont des mécanismes cruciaux pour la compréhension et le transfert subséquent des connaissances. Ces données nous montrent l'importance d'étudier les mécanismes de

représentation et catégorisation de façon plus détaillée. Dans ce qui suit nous illustrerons comment l'étude des différences individuelles nous a permis d'acquérir de nouvelles données sur la façon dont les connaissances sont organisées ou représentées dans la mémoire.

Différences Individuelles et Résolution de Problèmes

Lors de l'étude des différences individuelles ou caractéristiques des gens qui résolvent des problèmes deux approches ont été le plus souvent considérées. D'abord (a) l'approche des "corrélations cognitives" où on établit une corrélation entre une habileté générale ou un style cognitif et la performance de l'individu quant à son habileté à résoudre des problèmes. Ensuite (b) l'approche "experts-novices" où l'on contraste la performance de solutionneurs de problèmes très expérimentés et habiles dans un domaine particulier avec celle de solutionneurs de problèmes beaucoup moins habiles. Ces dernières années toutefois une troisième approche a fourni des données qui semblent des plus pertinentes à notre compréhension des processus de résolution de problèmes: (c) l'approche de la "douance", contrastant des individus de différentes habiletés. Chaque approche a contribué à une meilleure compréhension des différences individuelles dans le cadre de la résolution de problème, mais, comme nous le verrons dans ce qui suit, chacune a ses limites. Dans cette section nous examinons chacune de ces approches à la résolution de problèmes en nous concentrant sur les recherches qui ont porté sur l'aspect représentation ou organisation interne des problèmes.

L'Approche des Corrélations Cognitives

L'approche des corrélations cognitives est associée principalement avec la recherche sur le ATI ("Aptitude-Treatment-Interaction") (Cronbach & Snow, 1977). Selon Silver (1985), ce genre de recherche n'a pas fourni de résultats très utiles pour l'instruction mathématique en résolution de problème. Toutefois des travaux indiquant que certaines caractéristiques considérées comme stables chez les individus, semblent être modifiables, pourraient conduire à des résultats intéressants reliés à la résolution de problèmes.

D'autres études mettant en corrélation les attitudes et intérêts des sujets avec leur succès à des résolutions de problèmes sont aussi intéressantes. Par exemples, les travaux de Dodson (1972; dans Lester, 1983) semblent montrer que les bons solutionneurs de

problèmes ont de meilleurs résultats en mathématiques, de meilleures habiletés verbales, spatiales et de raisonnement, des attitudes positives, sont plus résistants à la distraction, ont une indépendance de champ plus forte et sont davantage capables de penser de façon divergente. Une des limites de ce genre d'étude est qu'il n'y a pas de théorie pour guider la sélection des variables mesurées et pour expliquer les résultats. De plus, on n'arrive pas à clarifier ce qui distingue un bon d'un mauvais solutionneur de problème (Lester, 1983). Enfin, aucun patron constant de relation corrélationnelle positive entre les variables n'a été trouvé (Silver, 1985).

L'Approche Experts-Novices

Lorsque l'on parle de différences individuelles, on pense plus généralement aux recherches basées sur le contraste entre experts et novices, car elles ont permis de faire plusieurs observations importantes sur la nature de l'expertise en résolution de problème. Par exemple, l'étude d'experts en mathématiques, physique et chimie montre qu'en face d'un problème raisonnablement complexe, ces scientifiques tendent à faire une analyse qualitative des conditions ou éléments du problème et des relations existants entre ces derniers, avant d'essayer de fournir une solution (Larkin, 1980; Simon & Simon, 1978; Chi, Glaser & Rees, 1982).

Au début des recherches sur les problèmes plus complexes, on émettait surtout l'hypothèse que les performances diverses observées lors de résolutions étaient dues à des variations dans la capacité à traiter l'information. Il semble maintenant davantage plausible de penser à des différences au niveau des connaissances de base (Chi, Glaser & Rees, 1982; Glaser, 1985). Ce changement d'orientation a été provoqué, en partie par (a) l'incapacité des théories psychologiques à modéliser les capacités humaines en se basant seulement sur la recherche des heuristiques —Stratégies utilisées pour trouver la solution des problèmes (ex.: "means-end analysis", Newell & Simon, 1972 ou la méthode hypothético-déductive ("hypothesize-and-test", Simon, 1980)— et en partie (b) par la découverte de limitations dans les systèmes d'intelligence artificielle (Chi, Glaser & Rees, 1982). En effet, il devint évident que les ordinateurs perdraient une bonne partie de leur pouvoir à modéliser le fonctionnement des processus cognitifs humains s'ils n'étaient pas capables de tenir compte des importantes structures de connaissances sous-jacentes.

Plusieurs travaux (Chi, 1978; Carey, 1985) indiquent la pertinence de l'étude de l'expertise pour la compréhension de la nature de l'intelligence dans des domaines riches en contenu de connaissance. En effet, plusieurs données intéressantes sur la cognition proviennent d'études contrastant des différences individuelles telles que l'âge, l'intelligence et la rapidité d'apprentissage. Il semble que les personnes plus "intelligentes", de même que les enfants plus âgés et les personnes qui apprennent plus rapidement, traitent l'information plus rapidement, ont une plus grande capacité mnémonique et utilisent des stratégies plus sophistiquées (Chi, 1976; Greeno & Simon, 1984). Cependant les mécanismes responsables de cet état des choses ne sont pas toujours connus, et on ne sait pas s'ils s'appliquent à toutes les disciplines ou domaines de connaissances. Pour en savoir davantage sur ces mécanismes, l'analyse de l'expertise nous procure une nouvelle dimension de différences individuelles à étudier; celle de la connaissance. En effet, l'expert, par définition, possède et est capable de mettre en application une grande quantité de connaissances.

Il est important d'étudier l'expertise dans différents domaines de connaissances, car ainsi nous pouvons connaître les caractéristiques particulières à chacun de ceux-ci, de même que les similarités ou constantes qui leur sont communes. Les études sur la résolution de problèmes dans des domaines requérant des connaissances de base élevées démontrent, en général, de fortes interactions entre les structures de connaissances et les processus cognitifs (Glaser, 1985). C'est ce qui a amené plusieurs à concevoir l'expertise en terme d'interaction entre les structures de connaissances et les habiletés à traiter l'information. La distinction critique entre individus ayant plus ou moins d'habileté dans des domaines particuliers de connaissances, semble être la capacité à accéder rapidement et à utiliser efficacement un ensemble organisé de connaissances conceptuelles et de procédures (Glaser, 1985; Chi et al., 1982).

Trois thèmes majeurs ont jusqu'à présent guidé les recherches sur les novices et les experts: (a) les différences présentes dans leur performance (b) leurs manières distinctives de représenter la connaissance à l'aide des structures de base sous-jacentes, et finalement, (c) la contribution de l'organisation de la connaissance de base à leurs performances. (Chi, Glaser & Rees, 1982). Une des raisons pour laquelle tant de recherches ont été faites sur ces thèmes est que ceux-ci peuvent nous fournir (1) des modèles de connaissance et de

traitement de l'information qui permettent de mieux comprendre les mécanismes qui sous-tendent la performance des experts dans des domaines particuliers d'habiletés ou de connaissance, et (2) des modèles d'apprentissage ou de développement de l'expertise pouvant être applicables dans des domaines spécifiques de connaissance et d'habileté. Ici, nous nous concentrons davantage sur l'aspect représentation des connaissances (b).

Comme nous l'avons mentionné plus tôt, beaucoup a été appris sur la nature de l'expertise grâce aux recherches sur la résolution de problèmes. Ces dernières nous montrent que deux facteurs importants influencent la résolution de problème: la nature du problème (et son environnement) et le genre ou niveau de connaissance pertinent au problème que possède la personne qui le résout (Chi & Glaser, 1985). Ces connaissances peuvent être de nature déclarative ("declarative knowledge") — ce que l'on connaît, ou de procédure ("procedural knowledge") — savoir comment utiliser les connaissances. Finalement, on décrit les variations de connaissance de trois façons — la quantité, l'organisation et l'accessibilité — ces trois genres de variations sont interreliées (Rabinowitz & Glaser, 1985).

On reconnaît au moins trois catégories de problèmes: (a) les problèmes bien structurés, c'est à dire des problèmes clairement énoncés, pour lesquels un algorithme est connu et où des critères ou informations sont disponibles pour évaluer et arriver à la solution; (b) les problèmes peu ou mal structurés, qui manquent à la fois d'une formulation claire, d'une procédure à suivre qui garantie une solution correcte et de critères pour évaluer la solution (Chi & Glaser, 1985; Frederiksen, 1984); enfin (c) les problèmes structurés demandant une pensée productive (Greeno, 1978; Greeno & Simon, 1984; Frederiksen, 1984). Ces problèmes sont similaires à ceux qui sont bien structurés, excepté que le procédé de résolution en entier, ou une étape cruciale, doit être généré par la personne qui résout le problème. La plupart des théories en résolution de problèmes portent sur les problèmes structurés, y compris ceux demandant une pensée productive. Toutefois les quelques recherches faites sur les problèmes mal définis ont apportés des résultats importants et complémentaires. Dans ce qui suit, nous verrons comment les recherches faites sur les différents genres de problèmes révèlent la place importante que prend la connaissance et son organisation pour expliquer, du moins en partie, la nature de l'expertise.

Contribution des recherches sur les problèmes bien structurés (incluant ceux demandant une pensée productive). C'est sans doute à cause de leur simplicité et de leur nature que les problèmes mieux structurés ont été les plus étudiés, et dans des domaines très variés (physique, électronique, échecs, baseball, médecine etc.). Les expériences faites sur des problèmes mieux structurés comme les jeux de GO et les jeux d'échecs ont en général montré l'importance de la connaissance pour la reconnaissance des patrons complexes qui se produisent durant le jeu. Ces recherches suggèrent en général que les distinctions entre les représentations de problèmes conçues par les joueurs se produisent à cause de différences dans l'habileté à percevoir les relations entre les éléments du matériel présenté, plutôt qu'à cause de variations de stratégies employées lors de la résolution du problème.

Les résultats de de Groot (1965) indiquent que les maîtres en échec ne possèdent pas de pouvoirs spéciaux en imagerie visuelle, ni en mémoire (les experts et les novices possèdent le même nombre de morceaux d'information emmagasinés — "chunks"), mais plutôt, que leur supériorité vient du nombre supérieur d'heures passés par les experts à regarder l'échiquier et à emmagasiner les configurations de 3 ou 4 pièces qui surviennent constamment lors des jeux. Notons que même si le nombre de "chunks" retenu dans la mémoire à court terme est le même pour les deux groupes, c'est le contenu de ces "chunks" qui est dissemblable; pour les experts, ils contiennent des configurations complexes de pièces, alors que chez les novices, l'information est emmagasinée pièce par pièce (Chase & Simon, 1973). Finalement, ajoutons que l'habileté acquise par l'expert en jouant à des jeux comme les échecs n'est pas seulement une habileté à reconnaître des stimuli ou configurations de stimuli spécifiques. La connaissance de l'expert doit être intégrée à une connaissance stratégique qui lui permet de reconnaître, dans les différentes situations de jeu, le patron le plus pertinent au choix de déplacements et de plan (Eisenstadt & Kareen, 1975). On a aussi observé cette habileté des experts à reconnaître des patrons complexes dans plusieurs autres domaines; l'électronique (Egan & Schwartz, 1979) la programmation d'ordinateur (McKeithen, Reitman, Ruter & Hirtle, 1981) la radiologie (Lesgold, Feltovich, Glaser & Wang, 1981) et la physique (Greeno & Simon, 1984). Selon Greeno et Simon (1984) les connaissances des experts physiciens sont fortement organisées et leur permettent de repérer facilement les relations entre les

différents principes ainsi que les patrons complexes de caractéristiques des problèmes. Grâce à cette capacité, les experts peuvent mieux déterminer les conditions d'applicabilité des formules.

Les études comparant les performances d'experts physiciens avec celles d'étudiants en physique, nous ont permis d'identifier deux autres composantes de la connaissance, qui caractérisent les personnes plus habiles en résolution de problème. La première caractéristique a trait au niveau d'abstraction. Les experts utilisent des principes physiques abstraits lorsqu'ils se représentent des problèmes, lorsqu'ils fournissent des méthodes de solution, de même que lorsqu'on leur demande de classifier des problèmes par catégories (Chi, Feltovich & Glaser, 1981; McDermott & Larkin, 1978). En revanche, les novices ne semblent se concentrer que sur les caractéristiques superficielles des problèmes, telles que le genre d'objet utilisé dans les données du problème (Chi et al., 1981). Nous reparlerons de façon plus détaillée de ce dernier point dans la section "études sur les catégorisations".

La deuxième caractéristique des experts physiciens est que leur connaissance spécifique d'un domaine est intégrée à de puissants concepts généraux, à des processus de raisonnement, et à des procédés qui permettent de faire des inférences. Par exemple, dans une étude de Simon et Simon (1978) où deux sujets devaient résoudre des problèmes physiques, l'expert semblait posséder une représentation du problème en terme de quantité physique, ce qui lui permettait d'appliquer des procédés d'ordre généraux (calculer les composantes de vélocité ou faire une moyenne), alors que le novice se restreignait aux formules qui lui étaient fournies. Il semble que la représentation mentale initiale influence fortement le choix de stratégies qui seront utilisées. Sur la base de différentes représentations mentales des problèmes et de variations dans les degrés d'accessibilité aux informations, les gens utilisent diverses stratégies pour travailler sur les problèmes. La nature des représentations mentales des individus semble aussi affecter la capacité à utiliser des habiletés de résolution de problèmes telles que questionner, prédire les conséquences, et déterminer les éléments les plus importants (Rabinowitz & Glaser, 1985; Sternberg, 1981b).

Un autre type majeur de problèmes bien structurés, les problèmes d'induction, nous ont permis de mieux comprendre la façon dont les connaissances sont organisées dans la

mémoire. La personne qui résout de tels problèmes doit trouver le principe général correspondant à un ensemble de matériel. Les problèmes de détection de défectuosité électronique et de diagnostic médical sont les deux principaux genres étudiés. On a utilisé avec succès les ordinateurs comme modèle, pour montrer à l'étudiant comment détecter les failles d'un circuit (Brown, Burton & deKleer, 1983), ou identifier une ou plusieurs maladies à partir de symptômes (Miller, Pople & Myers, 1982). Dans les deux cas, les bases de connaissances servant aux ordinateurs à poser leur diagnostic étaient similaires, c'est-à-dire: des connaissances organisées hiérarchiquement permettant au système de rechercher les éléments pertinents de façon systématique, dans l'ensemble de données disponibles. Ces deux systèmes possédaient aussi des règles intégrées permettant d'inférer des hypothèses en se basant sur les symptômes et les résultats des tests, et de propager l'information inférée en utilisant des structures hiérarchiques de connaissance (Greeno & Simon, 1984). Ces résultats appuient l'hypothèse selon laquelle les connaissances sont organisées d'une façon hiérarchique dans la mémoire.

Des études comparant experts et novices quant à leur capacité à poser un diagnostic médical montrent que ces experts possèdent des caractéristiques similaires à celles des maîtres en échecs ou experts en radiologie sur le plan de la connaissance. Comparés aux novices, les experts en diagnostic possèdent une connaissance à la fois plus intégrée, détaillée et précise des maladies, symptômes et relations entre maladies et symptômes. De plus, bien que les novices aient proposé des hypothèses raisonnables face aux premiers éléments de preuve présentés, ils étaient moins portés à considérer la signification des éléments de preuve ultérieurs et à changer leurs hypothèses si cela était indiqué (Feltovich, 1981). Enfin, ils proposèrent moins d'hypothèses que les experts (Lesgold, Feltovich, Glaser & Wang, 1981). Il est important de noter les conclusions similaires atteints par ces différentes études; selon Greeno et Simon (1984), c'est l'habileté des experts à se représenter les problèmes avec succès qui est la principale raison de leur performance supérieure. Cette habileté vient du fait que l'expert possède une structure de connaissance bien intégrée, dans laquelle les patrons de caractéristiques des problèmes sont associés à des concepts ayant des niveaux différents de généralité dans l'organisation structurale des connaissances. Cela permet une recherche efficace des hypothèses touchant aux caractéristiques importantes du problème.

De façon générale les résultats des recherches sur les différents genres de problèmes structurés concordent, suggérant que les experts possèdent une organisation hiérarchique des connaissances plus complexe que ne le possèdent les novices. Les experts sont donc avantagés au point de vue de la qualité de la représentation des problèmes, de la performance et du choix des stratégies de résolution de problèmes.

Contributions des recherches sur les problèmes non structurés. Les problèmes qualifiés de non structurés sont en fait les problèmes de la vie de tous les jours, c'est-à-dire ceux que l'on rencontre dans le monde réel. Paradoxalement, peu de travaux ont été effectués à leur sujet, car leur résolution est complexe et difficile à étudier. Un exemple classique est celui de Voss, Sherman et Yengo (1983) qui ont comparé des experts en sciences politiques spécialisé dans l'étude de l'URSS avec des étudiants ayant fait un cours sur l'URSS et des experts en chimie, quant à leurs suggestions sur la procédure à suivre pour augmenter la productivité agricole en URSS. En se basant sur cette étude, Chi et Glaser (1985) remarquent que la nature des problèmes non structurés implique que ceux qui les résolvent doivent se reconstruire une définition personnelle des problèmes. Cela implique que lors de la résolution de tels problèmes, la connaissance des domaines s'y rattachant rend la tâche de définition plus facile; par exemple en permettant l'identification des contraintes restreignant les solutions possibles. Chi et Glaser (1985) concluent également que ceux qui résolvent des problèmes mal structurés utilisent des méthodes heuristiques similaires à celles employées lors de la résolution de problèmes bien structurés (ex.: se fixer des buts intermédiaires à atteindre).

Selon Voss, Sherman et Yengo (1983), la principale similarité entre les résultats des travaux sur les problèmes bien structurés et ceux sur les problèmes moins bien structurés, est que, dans les deux cas, les experts prennent un temps considérable à se développer une représentation personnelle du problème, alors que les novices y sont beaucoup plus rapides. C'est une fois que la représentation du problème est développée que les processus de solutions de ces experts en physiques et en science politique diffèrent. Alors qu'habituellement les experts dans des domaines bien structurés (tels que la physique) résolvent les problèmes en produisant des équations successives qui amènent à la solution, les experts dans les domaines moins bien définis (tels que les sciences politiques) offrent

d'abord une solution abstraite et ensuite développent des arguments justifiant cette solution.

Transition de l'État de Novice à Celui d'Expert

Un aspect un peu négligé par les recherches portant sur la résolution de problèmes est l'étude des mécanismes responsables de la transition du stade de novice à celui d'expert, en d'autres mots, du processus d'acquisition de l'expertise. De nouvelles données nous révèlent toutefois l'importance de ce champ de recherche pour la compréhension de la nature de chacun de ces stades, et nous éclairent sur les moyens requis pour passer de l'un à l'autre.

En 1981, discutant de la façon dont l'expertise est acquise, Chase et Chi expliquent:

The most obvious answer is practice, thousands of hours of practice. [...] There may be some as yet undiscovered abilities that underlie the attainment of truly exceptional performance, [...] but for the most part practice is by far the best predictor of performance. [...] Practice can produce two kinds of knowledge [...] a storage of lexicons [and] a set of strategies (or procedures) that can operate on the patterns. (p. 12)

Un des travaux de Chi, Feltovich et Glaser (1981) sur la catégorisation de problèmes mathématiques, nous fournit des données intéressantes sur l'acquisition de l'expertise. Les auteurs ont varié des problèmes selon leurs caractéristiques de surfaces ou de structure (ex.: les lois de physique qui leur étaient rattachées), et ont examiné la performance d'un des sujets de compétence intermédiaire (entre le stade de novice et celui d'expert). Celui-ci se distinguait par le fait qu'il avait groupé ses problèmes en ne se basant pas vraiment sur les lois de physique, ni uniformément sur les caractéristiques superficielles. Ce résultat suggère qu'avec l'apprentissage, les novices catégoriseraient en se basant de plus en plus sur les principes de base du domaine étudié, et en dépendant de moins en moins des caractéristiques de surface des problèmes, même si leurs groupements sont encore restreints par ces caractéristiques superficielles (Chi et al., 1981).

Stade de développement de l'expertise. Il est intéressant de remarquer qu'un même problème peut être considéré comme étant d'une nature différente, selon le niveau d'expertise de la personne qui le résout (Greeno & Simon, 1984; Glaser, 1985). Cela vient du fait que le développement de la capacité à résoudre un problème passe par plusieurs stades. Anderson (1982), en s'inspirant de travaux sur l'intelligence artificielle,

a examiné l'acquisition de l'expertise en résolution de problème. Il conclut que l'apprentissage en résolution de problèmes se fait en passant par trois stades. Lors du (a) stade de déclaration ("déclarative stage"), l'individu apprend un ensemble de propositions (règles, postulats) spécifiques à un domaine particulier. Cette information est alors emmagasinée dans la mémoire à court terme comme étant un ensemble de faits reliés à l'habileté pertinente à la résolution du problème. Pendant ce stade, des procédures générales de résolution de problème sont utilisées pour interpréter la nouvelle information de façon à diriger le comportement de celui qui apprend vers de meilleures actions à entreprendre. Le deuxième stade (b) consiste à la compilation des connaissances; la connaissance est alors convertie en un ensemble de procédures qui peuvent être utilisées sans passer par des mécanismes d'interprétation. Enfin, on passe au stade de procédure (c) pendant lequel l'activité peut être accomplie automatiquement. Étant donné qu'à ce stade on peut agir de façon automatique, la résolution de problème (ou l'activité en cours) peut se faire en un tout, plutôt que par étapes. De plus, la vitesse d'exécution des résolutions augmente graduellement, à mesure que la mémoire à court terme a moins de demandes à satisfaire. On peut donc penser qu'une personne qui en est au stade 3 percevra ou intégrera l'information des problèmes de façon beaucoup plus structurée qu'une personne qui en est au stade 1. Notons enfin que pour Anderson (1982), l'architecture cognitive à la base de toutes ces tâches est hiérarchique et structurée, de façon à permettre l'atteinte des buts fixés, quels qu'ils soient.

Beaucoup de travail reste à faire pour vraiment comprendre tous les mécanismes régissant cette transition du stade de novice à celui d'expert. La création d'ordinateurs qui améliorent l'habileté à résoudre des problèmes (programme ABLE; Larkin, 1981) promet de donner des résultats intéressants, toutefois, pour le moment les programmes employés sont spécifiques et presque seulement algébriques.

Importance des mécanismes d'automatisation. Nous avons vu plus tôt que certaines composantes des mécanismes responsables de l'excellence des performances à résoudre des problèmes peuvent être examinées dans le cadre du développement chez les individus, de structures des connaissances organisées et cohésives. Par exemple, l'habileté à retrouver des informations rapidement, la manière dont la représentation mentale d'un

problème est formée et l'habileté à utiliser des stratégies cognitives varient selon la quantité de connaissances possédées. Plus spécifiquement, on a démontré que chacune de ces habiletés dépendent de l'accessibilité relative des informations (Rabinowitz & Glaser, 1985).

Un élément important de l'acquisition de l'expertise semble être la transition des individus d'un stade où ils dépendent de mécanismes de traitement de l'information conscients et contrôlés pour arriver à une réponse, vers un stade où leur accès à la réponse est automatique et rapide (Groen & Parkman, 1972; Siegler & Robinson, 1982; Sternberg, 1985). En effet, l'atteinte d'une performance excellente semble impliquer une bonne quantité de traitements rapides et inconscients de l'information, ainsi qu'une habileté à effectuer des opérations complexes en ne portant, apparemment, que très peu d'attention aux détails fondamentaux. Il semble que l'accès rapide à l'information permet cette habileté. Selon Rabinowitz et Glaser (1985), il est possible de concevoir l'intelligence comme un réseau associatif. L'accès rapide dépendrait alors de la force des liens unissant les concepts dans la structure des connaissances:

One way to think about the issue of accessibility is in relation to the automatic spread of activation along associative pathways in a knowledge structure. If the associative links are weak and few, then the rise in the level of activation of related knowledge will be negligible, and the information should still be relatively inaccessible. In such cases, a person would need to use a procedure to derive information. The greater the amount of excitation a node is receiving, either through stronger or a greater number of inputs, the higher the level of activation will be and thus the more accessible the information becomes. Accessibility, then, can be viewed along a continuum. Weak associative links provide little input to allow information to become automatically accessible. As the spread of activation increases, due to stronger associative links, related information becomes more accessible. (p. 84)

La transition des processus contrôlés à des processus automatiques est considéré importante pour deux raisons. D'abord, (a) elle libère les ressources attentionnelles qui peuvent être redirigées vers d'autres aspects de la tâche. Deuxièmement, (b) l'accessibilité plus facile à des connaissances pertinentes permet que soit construite une représentation plus complexe du contexte des problèmes (Rabinowitz & Glaser, 1985). Ces deux aspects, soit l'accès rapide à l'information et la réduction de la demande pour les ressources attentionnelles, sont des composantes qui dépendent de connaissances bien

organisées et fortement structurées. Cette augmentation du traitement automatique des informations permet, de son côté, une augmentation de la performance.

Sternberg (1985) décrit également un modèle d'automatisation des informations, mais en utilisant une approche basée davantage sur le traitement de l'information. Selon lui, l'automatisation peut se produire soit lors de la compréhension de la tâche, dans son exécution, ou dans les deux. Le traitement contrôlé de l'information est sous la direction consciente de l'individu et est de nature hiérarchique; les mécanismes exécutifs (mécanismes utilisés pour planifier, surveiller et réviser les stratégies de traitement de l'information) dirigent les mécanismes non exécutifs (mécanismes utilisés pour mener à bien les stratégies que les mécanismes exécutifs sélectionnent, surveillent et révisent). Le traitement automatique de l'information est préconscient (donc, n'est pas sous la direction consciente de l'individu), et est de nature non hiérarchique. Dans les domaines où les gens possèdent peu d'expertise, le traitement de l'information est principalement dirigé vers les systèmes de connaissances et de traitement globaux. Un système exécutif central active directement les systèmes non-exécutifs et reçoit des réactions directes de leur part. Le traitement de l'information est alors de capacité très limitée et l'attention est portée vers la tâche en cours.

À mesure que l'expertise se développe, une partie de plus en plus grande du traitement est transférée aux systèmes de traitement locaux. Les experts sont capables de faire face à une grande variété de situations grâce à l'usage de ces systèmes locaux, parce qu'ils y ont emmagasiné une énorme quantité d'information. Un système exécutif central active un système composé de mécanismes et connaissances de base s'appliquant localement. Plusieurs systèmes locaux peuvent être en opération de façon parallèle. La performance dans ces systèmes est automatique et de capacité presque illimitée et l'attention n'est pas dirigée vers la tâche en cours. Un point critique est que l'activation va des mécanismes exécutifs du système global vers l'ensemble du système local. Les novices, quant-à-eux, peuvent difficilement utiliser ces systèmes locaux, parce que ces derniers n'ont pas acquis suffisamment de mécanismes de traitement et n'incluent que très peu de connaissances (Sternberg, 1985).

According to this view, the extent to which one develops expertise in a given domain largely depends on the ability of the individual to pack new information, in

a usable way, into a given local processing system and to gain access to this information as needed. This view contrasts with that of certain theorists who seem to believe in the primacy of knowledge itself in intelligent functioning (e.g., Chi, Glaser & Rees, 1982). [...] [T]he reason that, of two people who play chess a great deal, one may become an expert and the other remain a duffer is that the first has been able to exploit information in a highly efficacious way whereas the latter has not. The greater knowledge base of the expert is the result, rather than the cause, of the chess player's expertise, which derives from the experts's ability to organize efficiently information he or she has encountered in many, many hours of play (Sternberg, 1985, p.95)

Importance des connaissances de base. Une étude de Schneider, Körkkel et Weinert (1989) indique que les connaissances spécifiques à un domaine peuvent compenser une faible aptitude générale lors de tâches cognitives reliées au domaine. De plus, au point de vue du développement, les recherches de Chi et Koeske (1983) et de Chi (1985) examinant un enfant ayant une connaissance experte des dinosaures, suggèrent que la quantité de connaissances possédées serait un facteur clé pour différencier les jeunes personnes en apprentissage ("learners") des plus âgées (Chi, 1985). Généralement les jeunes enfants n'utilisent pas des catégories taxonomiques pour organiser l'information dont ils se souviennent. Chi (1985) a pu démontré que certains enfants sont capables d'utiliser des catégories taxonomiques pour des sujets qu'ils connaissent particulièrement bien. Selon l'auteur, cette capacité à catégoriser émerge lorsqu'une personne connaît un grand nombre de faits et de relations entre ces faits dans un domaine donné. Des études subséquentes, comparant des échantillons d'enfants équivalents pour toutes les variables, mais différant quant à leur connaissance des dinosaures (Chi, Hutchinson & Robin, 1989), ont permis de démontrer que les enfants novices sont aussi compétents que les enfants experts dans leur usage d'habiletés générales d'apprentissage (par exemple faire des comparaisons et donner des explications causales), lorsque ces habiletés étaient évaluées dans un domaine où les enfants novices et experts possédaient des connaissances équivalentes. L'utilisation des habiletés d'apprentissage diffèrait seulement quand les experts et les novices accomplissaient des tâches où la connaissance des dinosaures était impliquée. Il a été de plus démontré que l'organisation des connaissances des enfants experts sur les dinosaures, comprend des structures hiérarchiques où les familles de dinosaures et les groupements de familles sont bien définis. Ceci permet à ces enfants

d'utiliser les éléments pertinent à leur domaine d'expertise pour générer des explications causales, pour utiliser des raisonnements catégoriques (raisonnements dérivée de la classification des éléments dans une classe), pour faire des inférences sur les caractéristiques des nouveaux dinosaures présentés et pour classer ces derniers de façon systématique. Les novices de leur côté fournissent des explications causales en se concentrant souvent sur les caractéristiques superficielles et non pertinentes des dinosaures. Ils tirent des conclusions sur les caractéristiques des nouveaux dinosaures présentés en utilisant des raisonnements linéaires (par opposition aux raisonnements catégoriques), c'est-à-dire que les conclusions sont dérivées directement des caractéristiques décrites de façon explicite, plutôt que de la classification des éléments dans une classe. De plus, les novices se fondent sur des similarités de perception pour catégoriser les dinosaures plutôt que sur leur appartenance à une famille ou classe. Le fait de posséder des connaissances si bien structurées hiérarchiquement a pour conséquence que les enfants experts peuvent s'en servir pour concevoir hypothèses et conclusions lorsqu'ils sont confrontés à de nouveaux types de dinosaures. Les enfants novices de leur côté, doivent fonder leurs conclusions sur leur connaissances générales du monde animal pour générer des caractéristiques des dinosaures non familiers. Ceci entraîne que les conclusions des novices sont souvent inappropriées ou moins justes que celles des experts (Chi et al., 1989). Suite à leurs études, les auteurs suggèrent que les enfants peuvent agir plus ou moins intelligemment selon les connaissances qu'ils possèdent. Même dans un domaine de connaissance restreint comme celui des dinosaures, la maîtrise modeste du domaine a donné lieu à des explications intelligentes, des inférences bien délimitées dans le domaine d'étude (en contraste avec celles obtenues des connaissances générales du monde), des raisonnements catégoriques et des classifications hiérarchiques basées sur des structures de famille bien définies et sur l'existence de catégories d'ordre supérieur telle que la diète. En conclusion, une des raisons pour laquelle les enfants démontrent une insuffisance globale dans un grand nombre de domaines est leur manque de connaissances pertinentes à ces domaines (Chi, Hutchinson & Robin, 1989).

Rôle des habitudes générales de l'esprit.

Selon Keating (1990), l'acquisition de l'expertise requerrait l'acquisition des habitudes de l'esprit qui facilitent le plus la performance. Ces patrons de pensée sont utilisés de façon constante par chaque individu dans leur vie de tous les jours et peuvent affecter la façon d'aborder des tâches variées. Les mêmes problèmes, selon des personnes, sont donc abordés avec des approches cognitives différentes, par exemple, de façon globale ou analytique, impulsive ou réfléchie ou encore flexible ou rigide. Ces habitudes de l'esprit ne sont pas exclusivement cognitives et peuvent facilement inclure des composantes affectives, métacognitives, de motivation ou de personnalité. L'auteur fait une distinction entre habitudes générales de l'esprit et l'expertise relative au domaine. Selon Keating, l'acquisition de l'expertise spécifique au domaine est reliée, bien que différente du développement des habitudes générales de l'esprit. Ces dernières opèrent de façon générale à travers plusieurs contenus de domaines et affectent l'acquisition de compétence. Toutefois, certaines habitudes de l'esprit conviennent davantage à des environnements d'instruction standards sur le plan culturel. Ainsi, des enfants avec différentes habitudes de l'esprit peuvent posséder le même potentiel pour devenir des lecteurs, écrivains ou mathématiciens compétents, mais certains peuvent confronter une niche environnementale incompatible au développement de leurs habiletés cognitives. Par exemple, les enfants possédant des habitudes conformes à celles mises de l'avant dans les écoles, sont plus susceptibles de bénéficier de leur expérience scolaire. Enfin, chaque domaine de connaissances semble souvent faire appel à des habitudes de l'esprit qui lui sont propres.

Du point de vue conceptuel, l'expertise en activité est toujours spécifique au contenu de son domaine:

In their field, experts compared to novices always have greater automaticity of basic processes, more knowledge of information and strategies, and more organized knowledge. The cognitive activities that support expertise are domain-specific almost by definition. But the developmental processes that lead to the acquisition of expertise often cuts across content domains (p.258).

Finalement, le fait de reconnaître la complémentarité développementale des habitudes générales de l'esprit et l'expertise dans un domaine particulier, nous permet d'utiliser cette dichotomie de façon créative.

Importance de la métacognition.

Il semble que plusieurs facteurs ayant un impact majeur sur le succès ou non d'un épisode de résolution de problème soient de nature métacognitive. Comme l'expliquent Rabinowitz et Glaser (1985), même s'il a été démontré que la possession de connaissances est un facteur important permettant aux individus d'accéder à une performance compétente, la manière dont les connaissances sont acquises et utilisées est un point qui n'a pas encore été abordé. Même avec des connaissances suffisantes, tous n'utilisent pas les habiletés qui leur sont disponibles. De plus, selon Glaser (1984), les individus ont besoin de connaître plus que les règles, théories ou procédures pour être capables de transférer leurs apprentissages à de nouvelles situations; ils doivent savoir comment contrôler l'usage de leurs connaissances. Ainsi, les connaissances peuvent permettre, sans être nécessaires à l'usage des habiletés disponibles. Les activités cognitives auto-régulatrices semblent donc être des éléments importants pour l'instruction et leur présence pourrait permettre de prédire l'habileté des étudiants à résoudre leurs problèmes et à apprendre de façon réussie.

La métacognition se divise essentiellement en deux composantes, d'abord la connaissance ou conscience métacognitive, qui réfère à la conscience que les individus ont de leurs propres ressources cognitives, des demandes de la tâche et des stratégies nécessaires pour mener à bien, et de façon efficace, la tâche cognitive. La seconde composante est le contrôle exécutif ou la régulation de la cognition. On réfère ici à l'habileté de l'individu à manipuler et à ajuster ses propres ressources cognitives et stratégies, de façon à assurer une exécution réussie de la tâche. Les activités de planification, contrôle, vérification, mise à l'épreuve et révision peuvent être toutes classifiées dans cette catégorie de métacognition (Flavell, 1976; Cheng, 1993)

Plusieurs travaux montrent l'importance de la métacognition dans le développement et l'atteinte de la compétence. D'abord, des études indiquent que l'entraînement dans l'utilisation des habiletés métacognitives améliore souvent de façon marquée la capacité à penser et la performance en résolution de problème (Brown, Bransford, Ferrara & Campione, 1983; Schoenfeld, 1982). Ensuite, on remarque que les experts dans une variété de domaines font preuve de capacités auto-régulatrices et métacognitives qu'on ne retrouve pas chez les personnes moins matures ou moins expérimentées (Glaser, 1985),

par exemple, pour ce qui est du contrôle du processus de solution, de la distribution des ressources attentionnelles et de leur capacité particulière à évaluer l'information ("sensitivity to informational feedback") (Bereiter & Scardamalia, 1987; Glaser, 1985). Finalement, les études sur la douance mettent en évidence le fait que les étudiants démontrant le plus de capacités semblent davantage réfléchis, peuvent mieux contrôler leurs propres processus cognitifs et peuvent évaluer leur statut de compréhension (échec ou succès de compréhension) de façon plus exacte (Wong, 1982; Meichenbaum, 1980; Chi, 1987). Il semble également que lors des résolutions de problèmes, les meilleurs étudiants contrôlent et évaluent de façon plus adéquate leurs propres processus de résolution de problèmes et sont capables de référer immédiatement aux informations pertinentes acquises précédemment, de façon à résoudre les problèmes (Coleman, 1991). Une analyse de Cheng (1993), examinant les conceptions théoriques et les recherches empiriques dans le domaine de la douance, semble fortement indiquer qu'une des composantes essentielles de la douance serait la possession d'une habileté métacognitive supérieure. Les individus doués sont peut-être doués parce qu'ils sont plus susceptibles d'utiliser de telles habiletés pour construire et utiliser leurs connaissances (Sternberg, 1981b, 1984).

Beaucoup reste à savoir sur les processus métacognitifs, par exemple la relation entre les deux composantes qui la définissent, la conscience métacognitive et les contrôles exécutifs (Cheng, 1993) et la manière dont ces deux composantes interagissent pour mener au développement de la compétence. En effet, certaines recherches montrent que l'émergence des habiletés métacognitives semble suivre une progression développementale (Flavell, 1978 dans Chung, 1993; Garner, 1987), toutefois, peu est connu sur le développement de la métacognition, en particulier chez les populations douées. Parallèlement, selon Glaser (1985): "these self-regulatory activities are specific to a domain of knowledge in experts. Where they appear to be generalized competencies, i.e., in 'generally intelligent' individuals, my hypothesis is that they become abstracted strategies after individuals use them in several fields of knowledge" (p. 9). Cette approche mène à une conception de l'intelligence — et de la compétence — qui met l'emphasis sur les habiletés générales plutôt que sur les connaissances spécifiques à un domaine particulier (Rabinowitz & Glaser, 1985).

L'Approche de la Douance

Nous mentionnions dans la section précédente que deux approches dominent lorsque l'on considère les différences individuelles et la résolution de problèmes. Toutefois, plusieurs études récentes impliquant des individus de différentes habiletés se sont également révélées utiles et pertinentes à une meilleure compréhension des processus de résolution de problèmes et d'organisation des connaissances, tout en nous permettant d'approfondir la nature de la douance.

Lorsque l'on essaie de définir la douance, l'emphase est souvent mise sur une différence au niveau de l'intelligence. Cette dernière étant au moins en partie héréditaire, l'on en déduit souvent que la douance ne peut être apprise ou améliorée. Les résultats des recherches comparant les experts et les novices remettent cela en question; on croit maintenant possible que la douance soit en partie due à la possession d'une quantité plus élevée de connaissances et à la manière dont les connaissances sont organisées. Il devient important de vérifier cette hypothèse, car si la situation s'avérait semblable à ce qu'on observe entre novices et experts, cela, commanderait de modifier la conception héréditaire de la douance, pour y inclure une composante pouvant être acquise (c'est-à-dire par l'enseignement).

Après l'étude d'une variété de théories et d'études empiriques, dans une variété de paradigmes du domaine de la douance, Sternberg et Davidson (1985) ont dégagé quatre aires de recherche, essentielles à la bonne compréhension de ce champ d'étude: (1) la nature de l'habileté à saisir les problèmes chez le doué (2) la représentation de l'information, (3) le rôle de l'environnement et (4) la combinaison de talents qui amènent à la douance. L'étude de la représentation constitue donc, également dans le domaine de la douance, une aire d'investigation des plus pertinentes. La description qui suit nous montre que l'individu doué semble non seulement savoir davantage dans son champ d'habileté, mais sait également utiliser ses connaissances d'une meilleure façon.

Les travaux de Krutetskii (1976) ont été parmi les premiers à fournir des données sur ce qui distingue les bons des mauvais solutionneurs de problèmes. Dans une étude approfondie de l'habileté mathématique chez les enfants à l'école, Krutetskii a montré que les jeunes mathématiquement doués se distinguent de ceux d'habileté moyenne et de faible

habileté par leur façon de réagir à la structure des problèmes. D'abord, leur perception initiale du problème est différente; les individus doués en mathématiques ne perçoivent pas seulement les éléments individuels, mais aussi les structures mathématiques pertinentes les complexes de quantités mathématiques interreliées et les catégories qui sont en rapport de dépendance fonctionnelle. Deuxièmement, leur capacité à généraliser les objets mathématiques, relations et opérations est supérieure. Troisièmement, ils gardent mieux en mémoire l'information pertinentes aux problèmes. "Superfluous unnecessary data [...] are usually not remembered by capable pupils. They have a good memory for the method of solving problems of a certain type — the generic structure of operation" (p. 295). Leur mémoire mathématique se caractérise par le rappel des caractères généraux des problèmes tels que les relations mathématiques, les caractéristiques typiques, les patrons d'arguments, les méthodes de résolution et les principes pertinents à une bonne approche des problèmes. À l'opposé, Krutetskii trouva que les individus d'habileté moyenne essayaient de se rappeler aussi bien du général que du particulier, de l'essentiel que du non essentiel. Enfin, les individus non doués mathématiquement ne se rappelaient que de peu de chose, même quand on leur présentait du matériel mathématique concret. Krutetskii conclut de ces résultats: "the essence of mathematical memory consists in the generalized recollection of typical schemas of reasoning of operations" (p. 299). De plus, "in very mathematically gifted pupils a unique organization of the mind, which we shall call a mathematical cast of mind, acquires a noticeable development" (p. 302). Cet "esprit" mathématique se caractérise par une tendance constante à donner une interprétation mathématique à l'environnement, à remarquer partout les relations spatiales et quantitatives, les liens et les relations de dépendance fonctionnelles.

Des études plus récentes ont confirmés certains des résultats de Krutetskii (1976). D'abord, en utilisant des élèves de 8^{ième} et 7^{ième} année, Silver (1979, 1981) est arrivé à la conclusion que les bons solutionneurs de problèmes sont supérieurs aux faibles quant à leur capacité à percevoir la structure mathématique des problèmes et à relier les problèmes qui ont une structure similaire.

Une autre observation conforme aux résultats de Krutetskii (1976) est que les bons solutionneurs de problèmes avaient tendance à se rappeler correctement la structure des problèmes qu'ils avaient résolus, alors que les faibles solutionneurs de problèmes n'y

réussirent que très rarement (Silver, 1981). Ces moins bons solutionneurs de problèmes ont également obtenu de faibles performances lors d'une tâche de triage de cartes. Ceci suggère que les difficultés auxquelles font face ces sujets lors des résolutions pourraient être causées par une incapacité à percevoir la structure des problèmes avant de les résoudre, lorsqu'ils essaient de les résoudre ou même lorsque la solution leur a été présentée lors d'une discussion en classe. Les résultats semblent également indiquer que les bons et les faibles solutionneurs de problèmes diffèrent quant au degré avec lequel ils peuvent se rappeler et utiliser l'information structurale obtenue lors de la solution d'un problème. Finalement, il semble que l'incapacité à se souvenir de la structure des problèmes ne peut pas uniquement être attribuée à un déficit général au niveau de mémoire. En effet, on observa que certains faibles solutionneurs de problèmes se rappelaient mieux des détails de l'énoncé du problème que la plupart des bons solutionneurs de problèmes. Selon Smiley, Oakley, Worthen, Campione et Brown (1977), cette situation refléterait plutôt un déficit général au niveau des mécanismes de compréhension. Comme l'explique Silver (1981): "whether a poor problem solver's failure to notice structure is specific to the domain of mathematics or is a more general information processing characteristic is open for further investigation" (p. 63).

Une étude comparant les styles d'apprentissage de populations d'enfants (4^{ième}, 5^{ième} et 6^{ième} années) doués avec d'autres provenant de la population générale, montra que ces derniers préféraient les séances d'apprentissages de type structuré, alors que les enfants doués préféraient étudier de façon indépendante (Ricca, 1984). Il est possible que ce contraste de préférences reflète le fait que les élèves doués possèdent déjà une représentation interne de la matière étudiée et que conséquemment, ils aient moins besoin d'une aide extérieure (et soient moins tentés d'y recourir) pour atteindre une bonne compréhension

L'habileté supérieure à résoudre des problèmes, est souvent citée comme caractéristique des enfants doués (Clark, 1979; Sternberg, 1981b). Toutefois, en comparant des enfants (4^{ième}, 5^{ième} et 6^{ième} années) doués et d'habileté moyenne dans une tâche de discrimination multiple (genre "Master Mind"), Ludlow et Woodrum (1982) arrivèrent à des résultats un peu en désaccord avec cette affirmation. Les jeunes doués se démarquèrent au niveau des mesures de mémoire et d'attention reliées à la tâche de

résolution de problème, mais pas au niveau des mesures reliées à l'efficacité de la performance et aux stratégies de sélection. Ces résultats peuvent s'expliquer, selon les auteurs, par le fait que les élèves doués ont besoin d'opportunités éducationnelles enrichies pour développer des habiletés cognitives supérieures et que leur groupe d'élèves doués n'avaient été exposés qu'au curriculum d'enseignement régulier.

Plusieurs résultats, obtenus entre autres par notre équipe de recherche, ont montré la pertinence d'étudier l'organisation des connaissances, de même que le processus de catégorisation, pour préciser la nature de la douance et déterminer si les processus de pensée des individus doués diffèrent qualitativement de ceux des autres individus.

Maniatis (1983) a comparé deux groupes d'enfants de 9 à 11 ans (QI dans la moyenne vs QI au-dessus de la moyenne), à qui l'on a présenté des problèmes graphiques de tortue ("turtle-graphics") du programme LOGO, et est arrivé à trois observations particulièrement intéressantes. En général les paires d'étudiants doués ont généré et complété un plus grand nombre de projets complexes. En plus, les structures arborescentes se rapportant à ces projets contenaient plus de niveaux, indiquant ainsi la présence d'un plus grand nombre de routines et sous-routines secondaires. Enfin, même si les deux groupes de sujets ont fait un nombre similaire de corrections à leurs programmes de dessin, celles des étudiants d'habileté moyenne étaient petites et spécifiques, alors que celles des étudiants doués étaient plus globales; ces révisions étaient reliées aux opérations générales du programme et affectaient plusieurs étapes. Ces résultats appuient la thèse que l'organisation des connaissances est plus complexe chez les étudiants doués.

Une autre étude (Kaizer, 1988; Kaizer & Shore, sous presse) a examiné l'effet des forces cognitives d'étudiants forts et moins forts en mathématiques sur le genre de stratégies choisies pour résoudre des problèmes mathématiques écrits (problèmes de Krutetskii, 1976). En général, les auteurs ne constatèrent pas de différences entre les étudiants forts et moins forts quant à leur usage de stratégies visuelles. Cependant, les étudiants forts en mathématiques ont utilisé des stratégies "logico-verbales" avec plus de succès et significativement plus souvent que les étudiants moins forts. Ceci va dans le même sens qu'une étude de Hermelin et O'Connor (1986) — comparant des étudiants doués artistiquement ou mathématiquement, de même que d'autres étudiants ayant des

quotients intellectuels comparables (groupes contrôles) — qui montre une plus grande facilité des étudiants doués en mathématiques à résoudre des problèmes présentés sous forme verbale. Il est cependant intéressant de remarquer que l'ensemble des étudiants participant à l'étude de Kaizer (1988) ont préféré les stratégies logico-verbales aux stratégies visuelles pour aborder les problèmes. Selon l'auteur, cela pourrait être un artefact du fait que les étudiants travaillaient exclusivement avec des problèmes écrits. Une étude de Mayer (1982), indiquant que la forme extérieure des problèmes (sous forme écrite ou avec des équations) influence le type de stratégie choisie par les sujets lors de la résolution de problèmes, appuierait cette dernière interprétation. Ces études suggèrent l'importance d'utiliser une diversité de formes pour présenter les problèmes, afin de déterminer l'impact de ces dernières sur la résolution des problèmes et de mieux juger de l'emploi des stratégies verbales par les étudiants doués en mathématiques.

Kaizer (1988) indique également que les étudiants forts en mathématiques ont résolu significativement plus de problèmes. Ceci suggère que leur habileté à utiliser une certaine stratégie de façon appropriée constitue un aspect plus important d'une résolution de problème mathématiques réussie, que le type général de solution employé. Ainsi, les différences de performance entre les étudiants forts et moins forts en mathématiques se trouvent peut-être au niveau des processus impliqués lors de l'emploi d'une stratégie donnée. Il serait aussi intéressant d'examiner la facilité avec laquelle les étudiants plus forts discernent la nature des problèmes en terme du choix correct des stratégies à employer pour résoudre les problèmes. Cela nous donnerait des informations importantes quant à leur processus de catégorisation.

Une autre observation intéressante des travaux de Kaizer (1988) est la réaction des sujets face à des difficultés dans le processus de résolution des problèmes. Tous les élèves ont changé de stratégie d'approche des problèmes en face de difficulté, toutefois, une plus grande proportion d'étudiants moins forts choisirent une stratégie d'essai et erreur comme dernière tentative de résolution de problèmes, alors que les étudiants forts utilisèrent des stratégies plus appropriées, comme les stratégies d'approche verbales ou visuelles. Tel que l'explique l'auteur (Kaizer, 1988): "The greater use of trial-and-error as a final solution strategy by less competent students suggests that they were less able to retrieve from memory, or to use a complex algorithm" (p. 107). Cela vient peut être

d'une organisation des connaissances différente ou moins efficace, ce qui les empêcherait d'utiliser une stratégie de plus haut niveau.

Une série d'études conduites par Austin (1993) sur la performance en physique d'étudiants du niveau CÉGEP nous donnent des indications supplémentaires d'une meilleure organisation des connaissances des étudiants qui réussissent mieux (performants). Dans une première étude, l'auteur a trouvé que la réussite en physique des étudiants du CÉGEP semble reliée à la capacité à générer des cartes de concepts ("concept maps") de bonne qualité. Ceci, en retour, reflète l'organisation cognitive du matériel. Plus spécifiquement, les étudiants réussissant moins bien semblent posséder une moins bonne organisation des connaissances reliées au matériel. Selon Austin, la capacité à construire des cartes de concepts de qualité peut ne pas être importante pour la résolution de problèmes simples (c'est-à-dire possédant une seule étape de résolution par exemple) qui n'exigent que des connaissances de base d'un concept et qu'une compréhension peu élevée des relations entre concepts, mais elle est beaucoup plus importante pour la résolution de problèmes plus complexes. De plus, elle peut se révéler un bon indicateur de la véritable habileté des étudiants à poursuivre leurs études dans un domaine.

Dans une deuxième étude de Austin (1993), où l'on compare les étudiants de grande habileté, d'habileté moyenne et de faible habileté, il semble que ce soit les étudiants d'habileté moyenne qui profitent le plus d'une instruction basée sur la construction de cartes de concepts; celle-ci rendrait plus clairs les liens entre concepts. Cette même instruction semble n'avoir aucun effet sur la performance des étudiants de faible habileté, peut-être, selon l'auteur, parce que la compréhension initiale de la matière est tellement faible qu'il n'y a pas de structure de connaissance assez forte pour construire davantage. Enfin, chez les étudiants de grande habileté, un effet de plafond semble se développer. Ces résultats vont dans le sens de ceux obtenus par Ricca (1984).

Combinaison des Recherches sur la Douance et l'Expertise

Une comparaison de l'ensemble des travaux portant sur la douance et sur l'expertise met en évidence les ressemblances existantes entre ces deux population, pour ce qui est de l'utilisation de plusieurs processus de pensée. Par exemple, Larkin, McDermott, Simon et

Simon (1980) ont trouvé que les experts possèdent de plus grandes connaissances de base et résolvent plus rapidement les problèmes. Sternberg (1981b), de son côté, a observé que les étudiants doués utilisent leurs connaissances de base différemment des étudiants non doués. Le fait que les experts prennent de plus longues pauses lorsqu'ils recherchent et extraient l'information pertinente de leur mémoire démontre, il semble, des regroupements d'opération différents de ceux employés par les novices (Larkin, 1979). Un résultat comparable est que les individus plus intelligents prennent davantage de temps pour la planification de haut degré lors de la résolution de problème (Davidson & Sternberg, 1984; Sternberg, 1982). Les représentations internes des problèmes et situations faites par les experts sont qualitativement différentes des représentations des novices (Sternberg, 1981b). Les étudiants doués, quant à eux, sélectionnent les représentations de l'information d'une façon qui ressemble à celle des experts (Coleman, 1977; Sternberg, 1981b; Sternberg & Powell, 1983). Au point de vue de la catégorisation, on a trouvé des différences entre experts et novices (Chi, Glaser & Rees, 1982; Neigemann & Parr, 1986), alors que les étudiants doués sont davantage capables de reconnaître la nature du problème qu'ils doivent résoudre (Coleman, 1977, Scruggs, Mastropieri, Monson & Jorgensen, 1985; Zimmerman, 1981) et catégorisent différemment des étudiants d'habileté moyenne (Silver, 1979; Gliner, 1988). Enfin, les gens qui démontrent de l'expertise dans un domaine de connaissance sont capables d'accéder à l'information rapidement. De leur côté, les enfants d'habileté au-dessus de la moyenne semblent accéder à l'information en mémoire plus rapidement que ceux d'habileté moyenne (Keating & Bobbitt, 1978).

Coleman et Shore (1991) ont comparé les processus de pensée d'étudiants ayant des performances moyennes en physique, d'étudiants ayant des performances de niveau supérieur dans ce même domaine et des experts en physique, quant à la quantité et la justesse des "méta-énoncés" la quantité des énoncés de planification et la proportion de références à des connaissances antérieures. Ils obtinrent deux résultats majeurs. Les experts et les étudiants à performance de niveau supérieur firent (a) significativement plus de façon significative plus de méta-énoncés corrects et (b) plus de références aux connaissances antérieures que les étudiants de performance moyenne. Ces résultats suggèrent d'abord que les étudiants atteignent des performances de niveau supérieur

ressemble davantage aux experts que les étudiants ayant des performances dans la moyenne. Deuxièmement, la relation directe trouvée entre les connaissances antérieures et l'expertise suggère que "as people acquire expertise they may rely more heavily on information previously learned and less on the information given, on the other hand the inverse would be true for the person less knowledgeable in a specific domain" (Coleman, 1988, p. 82). Ce résultat concorde avec ceux de d'autres études sur les connaissances antérieures (Chiesi, Spilich & Voss, 1979; Glaser, 1985).

Examinant plus en détail un problème exigeant une réponse créative, Coleman (1988) constata que les solutions des experts et des étudiants performant à un niveau supérieur, avaient tendance à être plus abstraites et à inclure plus de termes et de lois de physique sophistiqués que celles du groupe d'étudiants moyens. Ces résultats selon l'auteur, suggèrent une organisation plus complexe et peut-être aussi une plus grande capacité à catégoriser chez les sujets plus habiles.

Un résultat secondaire des travaux de Coleman est particulièrement pertinent à notre étude: "An analysis of the average subjects' responses indicated that their use of prior knowledge was different from that of both the high and expert groups. Accordingly, many of their attempts to successfully use their prior knowledge failed because they lacked a clear understanding of the physics concepts being used, or they used their prior knowledge incorrectly." (Coleman, 1988, p.88). Les recherches futures devront donc examiner si les individus organisent leurs connaissances antérieures différemment les uns et des autres et si ces différences d'organisation rendent la compréhension et le raisonnement plus efficaces. On devra également examiner comment les individus diffèrent quant à leur usage de connaissances antérieures lorsqu'ils résolvent des problèmes spécifiques.

En comparant experts, étudiants de grande habileté et étudiants d'habileté moyenne, Austin (1993) trouva plusieurs similarités entre les experts et les étudiants de grande habileté. Par exemple ces deux groupes conçurent des cartes de concepts où les concepts formaient une seule composante, où plusieurs liens entre concepts ont été faits et où plusieurs concepts possédaient des liens multiples avec d'autres concepts.

Comparativement, les étudiants d'habileté moyenne construisent des cartes de concepts où ceux-ci étaient organisés en plusieurs composantes avec un nombre de concepts non reliés

plus grand que chez les experts et les étudiants plus habiles. De façon générale on remarque que la complexité des cartes de concepts est beaucoup plus élevée chez les experts que chez les étudiants, qu'ils soient plus ou moins habiles. Toutefois, lorsque l'on compare les paramètres les plus stables tels que le nombre de liens créés, les résultats totaux des cartes (évaluant si les liens sont plausibles, bons ou mauvais), le nombre d'erreurs (concepts non reliés à d'autres) et le nombre de concepts, les cartes de concepts des étudiants de grande habileté ressemblent davantage à celles des experts qu'à celles des étudiants d'habileté moyenne.

Les résultats de cette dernière section nous montrent que plusieurs similarités peuvent être trouvées entre les processus de pensée utilisés lors de la résolution de problèmes entre jeunes doués et experts, plus particulièrement pour ceux ayant trait à la représentation des connaissances pertinentes à la résolution. Parmi les études ayant à la fois comparé jeunes d'habileté moyenne, jeunes de fortes habileté et experts, la plupart (ex.: Coleman & Shore, 1991; Austin, 1993) concluent que les individus doués ressemblent davantage aux experts qu'à leurs pairs d'habileté moindre pour les habiletés mesurées. Ce genre de conclusion laisse aussi entendre que même si les individus ayant plus d'aptitudes ressemblent davantage aux experts, cela ne veut pas dire qu'ils leur sont semblables. Mais qu'elle est l'ampleur de ces différences et de ces ressemblances? Quel est l'impact de la plus grande expérience des experts sur les performances atteintes? Où se situe l'individu doué dans le continuum novice-expert? La présente étude cherche à connaître de façon plus détaillée la nature de ces différences et ressemblances sur le plan de l'organisation des connaissances.

Avant d'examiner de plus près le genre de tâche choisie, nous décrirons les bases théoriques qui soutiennent les recherches sur l'organisation des connaissances, sous l'aspect des représentations internes formées par les sujets.

Organisation des Connaissances et Catégorisation

[A] well-stocked and well-organized body of knowledge is an asset to the problem solver. Good organization which renders the knowledge readily available may be even more important than the extent of knowledge (Polya, 1973, p. 82)

Structures de la Mémoire et Organisation des Connaissances

Selon Jeeves et Greer (1983) l'organisation des connaissances de chacun résulte de l'apprentissage d'une structure. Ce genre d'apprentissage est avantageux de plusieurs façons:

[First,] it helps simplify the phenomena under study. The simplification obtained may result either from abstraction (in the sense of ignoring irrelevant aspects) or efficient description. In either case, the construction of a model by the subject may enable him to succeed, as we have seen, on learning tasks which otherwise would be impossible because of information-processing limitations. [...] [Structural learning also] helps the individual to go beyond the information given, by interpolations and extrapolations. [...] [Finally,] structural learning allows the individual to relate different phenomena, having different surface features but similar structures underlying them. (pp. 236-237)

Selon Jeeves et Greer (1983), il est important de mieux définir le genre de structure mentale possédée par l'être humain, qu'il s'agisse d'un enfant, adolescent, adulte ou personne plus âgée. Un des moyens est de rechercher quelles formes prennent ces représentations dans l'esprit. La façon dont nous pensons et organisons l'information dans la mémoire lorsque nous apprenons est sans doute reliée de près à la façon dont la mémoire est organisée et fonctionne.

Les chercheurs ont étudié les mécanismes cognitifs qui traitent et emmagasinent l'information, de même que les contraintes qui sont imposées par ces mécanismes sur l'apprentissage et la résolution de problème. Plusieurs données sur la structure de la mémoire humaine en ressortent. La mémoire est habituellement décrite comme possédant deux éléments pour emmagasiner l'information (Anderson, 1980). La mémoire à court terme retient l'information de façon temporaire et permet d'emmagasiner ou de retrouver cette dernière de façon rapide (de l'ordre de plusieurs centaines de millisecondes; Simon, 1981). C'est cette mémoire qui a été principalement étudiée par les chercheurs en traitement de l'information, parce qu'elle traite ou transforme tous les genres d'informations, que ce soit l'information nouvelle provenant de l'environnement ou l'information rappelée de la mémoire à long terme. Sa contrainte majeure est sa capacité limitée: celle-ci est mesurée d'après le nombre de blocs que la mémoire possède. Un "bloc" est une information ou un ensemble d'informations pouvant être représentées par un symbole (Miller, 1956). La dimension des blocs semble dépendre du bagage de

connaissances des individus. En général les adultes ont une capacité variant entre 4 et 7 blocs d'information. (Simon, 1979; Miller, 1956). Toutes les informations doivent passer par la mémoire à court terme avant d'aller dans la mémoire à long terme.

La mémoire à long terme, quant à elle, retient l'information pour une grande période de temps et sert donc à emmagasiner la connaissance de façon permanente (Simon 1979). Elle n'a pas une capacité limitée comme la mémoire à court terme, mais le temps requis pour emmagasiner et retrouver l'information est plus long, en plus du fait que l'information est plus difficile à retrouver. Sa contrainte principale est la capacité à accéder à l'information que l'on doit retrouver. Cette capacité dépend de trois composantes: le contenu de la mémoire à long terme, la manière dont le contenu de cette mémoire est organisé et la route par laquelle on peut avoir accès à l'information désirée (Simon, 1979).

La plupart des modèles de traitement de l'information utilisent la même description de la mémoire à long terme, se servant de structures ou réseaux de noeuds et de liens (Briars, 1982). Chaque noeud emmagasine un symbole et est relié à d'autres noeuds par des liens qui représentent les relations entre ces noeuds. Un seul noeud peut correspondre à un symbole complexe, comme une représentation des pièces d'un jeu d'échec. Chacun des noeuds peut aussi être décomposé en plusieurs éléments.

En plus de cette structure de base, on a suggéré une organisation plus complexe des connaissances: le concept de schème de mémoire et autres concepts s'y rapportant (Rumelhart & Norman, 1983). Un schème est une collection de structures de mémoire qui décrivent les caractéristiques typiques et les propriétés du concept qu'elle représente. Les schèmes semblent non seulement associés avec l'interprétation et l'emmagasinage de l'information nouvelle, mais aussi avec le rappel de l'information traitée antérieurement (Thorndyke & Hayes-Roth, 1979).

Comme nous l'avons décrit plus haut, il existe une relation intime entre la manière dont l'information est mise en blocs dans la mémoire à court terme et comment elle est organisée dans la mémoire à long terme. Ainsi, selon Briars (1982), "how incoming information is chunked may be an important variable in research on mathematical problem solving, possibly providing a more precise way of measuring differences between high- and low-ability students' organization of mathematical knowledge" (p. 43). Les travaux

portant sur les mémoires à court et à long terme montrent donc la pertinence d'étudier l'organisation des connaissances des individus de faible et forte habileté. De plus, ils nous font prendre conscience de l'importance des premières étapes de résolution (telles que la catégorisation selon la nature des problèmes) pour l'atteinte de la solution des problèmes.

Hinsley, Hayes et Simon (1978) sont parmi les premiers à avoir établi un lien entre la théorie des schèmes et la résolution de problèmes mathématiques. Ces auteurs ont construit une tâche expérimentale comportant cinq volets. Dans les deux premiers volets, les sujets devaient catégoriser des séries de problèmes standards d'algèbre, présentés sous forme écrite. À la première expérience, on demandait aux sujets de les grouper selon le type de problèmes présentés, alors que dans la deuxième expérience (et avec une deuxième série de problèmes), les problèmes étaient lus partie par partie et les sujets devaient, après chaque partie de texte, essayer de catégoriser les problèmes et émettre des prévisions quant aux informations à recevoir. Dans les trois autres volets les étudiants devaient résoudre les problèmes (encore une fois, problèmes d'algèbre, sous forme écrite); soit un ensemble de problèmes standards et non standards à ceux habituellement vu par les étudiants, soit des problèmes n'ayant pas de sens ou soit le problème dénommé "small town," qui est un problème standard auquel des informations non pertinentes ont été ajoutées pour tester le jugement des étudiants sur la pertinence des éléments présentés.

Parmi les résultats, Hinsley, Hayes et Simon (1978) rapportent que les sujets reconnaissent des catégories de problèmes: les étudiants divisèrent les problèmes dans des catégories standards, telles que des "problèmes d'âge" ou "distance-rate-time problems." De plus, les sujets furent capables de catégoriser les problèmes presque immédiatement, habituellement seulement après avoir entendu les quelques premiers mots. Des études subséquentes (Hayes, Waterman & Robinson, 1977; Robinson & Hayes, 1978) corroborèrent ce dernier résultat. Hinsley, Hayes et Simon (1978) montrèrent également que les sujets tendaient à utiliser les catégorisations de problèmes comme outils, pour s'aider à retrouver dans leur mémoire à long terme, l'information utile à la solution. Dans le cas de problèmes qui pouvaient être interprétés de multiples façons, les sujets qui avaient catégoriser les problèmes comme "distance-rate-time" portaient attention à différentes informations de l'énoncé du problème que s'ils avaient choisi de catégoriser comme des problèmes reliés au Triangle de Pythagore. Les étudiants utiliseraient donc

leurs décision à propos des catégories pour juger quelles données de leur mémoire sont pertinentes aux problèmes. En général les auteurs concluent que leurs sujets possèdent un schème pour les problèmes d'algèbre standard et que ce schème influence l'emmagasinage et le rappel de l'information pendant la résolution des problèmes. Une fois que le schème a été identifié, il est utilisé pour guider l'attention sélective de l'étudiant vers l'information pertinente (Hayes, Waterman & Robinson, 1977; Robinson et Hayes, 1978). Quand une personne utilise un mauvais schème, des erreurs de compréhension en résultent, car les schèmes influencent ce sur quoi les étudiants vont porter leur attention dans le problème (Hinsley, Waterman & Robinson, 1977).

Des études récentes ont porté sur les différences d'organisation des connaissances mathématiques chez divers étudiants. Un des résultats principaux est que les étudiants les plus doués tendent à organiser leurs connaissances selon des schèmes mathématiques riches sur le plan conceptuel, alors que les moins doués ne le font pas. Selon Briars (1982),

this may also mean that more able students are encoding the problem in larger chunks (i.e. relational chunks) than the less able students. Because STM [short term memory] chunks are pointers to nodes in LTM [long term memory], this description is consistent with the current hypothesis that more able students have knowledge organized differently, and that chunking is possible because of the way knowledge is stored in memory. [...] The relation between chunks and knowledge organization suggests that a recall paradigm similar to that used in the chess studies of de Groot (1965) and Chase & Simon (1979) could be used to assess individual differences in knowledge organization (pp. 43-44).

"As yet, however, we have few instantiations of schemata in other mathematical domains (algebra word problems), especially sophisticated ones. Promising areas for schema research include theorem proving in geometry, mental calculation, and differentiation and integration in elementary calculus" (Silver, 1982, p. 17). De plus, selon Silver (1982), les prochaines recherches devront porter non seulement sur la manière dont se développent les schèmes, mais aussi sur les différences individuelles quant au contenu ou l'organisation de ces schèmes.

Lorsque les sujets font une tâche de catégorisation de problèmes, il est possible, selon plusieurs chercheurs (Chi, Feltovich & Glaser, 1981; Chi & Glaser, 1985; Schoenfeld & Hermann, 1982; Silver, 1979), d'inférer une catégorisation y correspondant dans la

mémoire. Ainsi on peut catégoriser les problèmes de plusieurs façons, selon la manière dont l'information est intégrée. Plusieurs recherches ont été faites en contrastant experts et novices dans le but d'étudier ces représentations. Par exemple, il est bien connu que la qualité de représentation d'un problème influence la facilité avec lequel ce problème sera résolu (Hayes & Simon, 1976). Selon Novack et Araya (1980) la catégorisation selon le type de problème servirait de signal permettant d'aller chercher l'information au sein des connaissances de base. L'étape initiale du modèle de résolution de problème proposé par Reif (1979) est une représentation ou redescription de chaque problème en termes de concepts fournis par les connaissances de base. Ces connaissances de base sont arrangées autour de schèmes de problèmes. Chacun de ces schèmes contient l'information nécessaire pour résoudre une catégorie spécifique de problèmes. Selon Chi, Feltovich et Glaser (1981), les différences entre experts et novices pourraient être reliées au fait que chez les novices, les catégories sont mal formées, diffèrent qualitativement, ou n'existent tout simplement pas.

Plusieurs auteurs soutiennent l'idée que les solutionneurs de problèmes se représentent ces derniers par catégories et que ces catégories pourraient diriger la résolution de problème. D'abord, comme nous l'avons mentionné antérieurement, Hinsley, Hayes et Simon (1978) ont trouvé que des étudiants de collège peuvent catégoriser les problèmes écrits d'algèbre par types et que cette catégorisation peut se produire très rapidement. Ainsi, ces résultats fournissent des évidences que des schèmes de problèmes existent; ceux-ci étant des ensembles de connaissances qui unifieraient des problèmes superficiellement différents, grâce à leurs caractéristiques sous-jacentes communes. Deuxièmement, les recherches sur les jeux d'échecs ont montré que la supériorité des experts à mémoriser les positions des pions provient de l'existence d'un emmagasinage important et bien organisé de configurations ou de patrons d'échecs dans la mémoire (Chase & Simon, 1973). Finalement, on peut croire, d'après les recherches faites en diagnostique médical, que les experts en diagnostique représentent les cas particuliers par des catégories générales et que ces catégories favorisent la formation d'hypothèses lors du diagnostique (Pople, 1977).

Processus de Catégorisation et Représentations Internes des Problèmes

Parmi les théories voulant expliquer la relation entre catégorisation et représentation interne des problèmes, deux sont plus particulièrement intéressantes. McDermott et Larkin (1978) croient qu'après avoir lu l'énoncé d'un problème, une représentation se forme et que c'est sur cette représentation que se fondent les catégorisations. Le solutionneur de problème progresse à travers quatre stades de représentations. Il commence par une représentation littérale de l'énoncé du problème contenant des mots-clefs pertinents. Il passe ensuite à une représentation naïve du problème, incluant les objets impliqués dans le problème et leurs relations spatiales telles que décrites dans l'énoncé du problème, de même d'une ébauche de la situation. Les personnes relativement ignorantes du domaine de la physique ne se rendent habituellement que jusqu'à ce stade de représentation. Le troisième stade, appelé représentation "scientifique," est relié à la méthode de solution et contient les objets idéalisés et les concepts physiques, comme les forces et énergies, qui sont nécessaires pour générer les équations du quatrième stade, la représentation algébrique.

Chi, Feltovich et Glaser (1981) ont une interprétation différente. Selon eux, un problème serait catégorisé de façon provisoire après des analyses préliminaires grossières des caractéristiques du problème. Ce n'est qu'après que la catégorie potentielle est activée, que le reste de la représentation est construite, avec l'aide des connaissances disponibles associées à cette catégorie, de façon à engendrer une solution. Selon leur interprétation, la représentation d'un problème n'est pas terminée tant que la catégorisation initiale ne s'est pas produite. De plus, le processus de catégorisation s'accomplit selon un ensemble de règles qui spécifient les caractéristiques du problèmes et les catégories correspondantes vers lesquelles elles doivent diriger l'attention.

Quelques données de recherche appuient l'interprétation de McDermott et Larkin (1978). Par exemple, le fait que les experts prennent plus de temps que les novices à terminer la classification initiale des problèmes, ou encore, que les experts doivent traiter les problèmes plus "en profondeur" dans une représentation scientifique, pour déterminer les principes sous-jacents aux problèmes. L'interprétation de Chi, Feltovich et Glaser (1981) quant à elle, est soutenue par les résultats de Hinsley, Hayes et Simon (1978)

montrant que les problèmes peuvent être catégorisés rapidement (environ 45 secondes) et qu'ils peuvent être souvent catégorisés de façon provisoire après qu'on ait lu que la première phrase du problème. Selon Chi et al. (1981) cette interprétation est plus adéquate, car elle suggère que la représentation d'un problème est construite dans le contexte des connaissances disponibles pour ce type de problème, connaissances qui restreignent et guident la forme finale que la dernière représentation va prendre. C'est la catégorie et les connaissances qui lui sont associées qui constituent le "schème" d'un type particulier de problème. La qualité de ces schèmes de problème déterminent finalement la valeur de la représentation du problème.

Étant donné que les caractéristiques des catégories de problèmes varient selon l'expérience des sujets, Chi, Feltovich et Glaser (1981) ont élaboré une autre étude leur permettant d'examiner si les schèmes de problèmes des novices et des experts contiennent différentes connaissances et demandèrent aux sujets de dire tout ce qu'ils savaient sur différentes sortes de catégories de problèmes. Un des résultats les plus intéressants est que les experts et les novices ont tous les deux utilisés des descriptions des caractéristiques de surfaces des problèmes dans leurs explications, cette connaissance est donc commune aux deux groupes habileté, toutefois, les experts ont des connaissances supplémentaires sur les procédures de solution fondées sur des lois majeures de physique.

Une dernière étude faite par Chi, Feltovich et Glaser (1981) vise à identifier les caractéristiques de l'énoncé du problème qui amènent au choix, par les sujets, de leur approche pour solutionner les problèmes. Des résultats obtenus les auteurs suggèrent que les experts perçoivent davantage dans l'énoncé du problème que les novices. Ils possèdent une grande quantité de connaissances tacites qui peuvent être utilisées pour tirer des conclusions sur la situation décrite dans l'énoncé du problème. La sélection de l'approche à suivre pour solutionner les problèmes semble être guidée par cette connaissance de second-ordre, dérivée de d'autres connaissances. Selon les auteurs: "Even though the same set of keywords may be deemed important by subjects of both skill groups, the actual cues used by the experts are not the words themselves, but what they signify. Novice features eliciting what they consider to be a 'basic approach' were, again, literal problem components leading to solution" (p. 149).

Un trait distinctif des experts que l'on retrouve souvent dans la littérature est que ceux-ci font une analyse qualitative des problèmes avant de travailler avec les équations appropriées (Chi, Feltovich & Glaser, 1981; Simon & Simon, 1978). Selon Chi et al. (1981), cela serait dû au fait qu'une des première phase de la résolution de problème implique l'activation et la confirmation d'un schème, c'est-à-dire, d'une structure de connaissance appropriée et orientée vers les principes du problème. L'activation initiale de ce schème se produirait en réponse à certaines données du problème. Une fois activé, le schème lui-même spécifierait des tests supplémentaires pour vérifier s'il est correct. Finalement, lorsque l'expert décide qu'un principe particulier est approprié, la connaissance contenue dans le schème indiquerait la forme générale que doivent prendre les équations spécifiques, pour arriver à la solution (p. 149).

Études sur les Catégorisations

Il existe au moins deux genres d'approches pour étudier le processus de catégorisation. La première a été sans doute plus utilisée dans le passé (voir Bruner, 1973): on choisit d'abord une tâche où les sujets n'ont pas de connaissances antérieures, puis on leur présente de nouvelles données et leur demande d'essayer de catégoriser ces nouvelles connaissances en concepts et catégories. On examine ensuite les différentes stratégies utilisées. Dans le second genre d'approche, on emploie des sujets qui possèdent déjà un bagage de connaissances sur un certain domaine et on leur demande de catégoriser quelques problèmes, en se fondant sur leurs connaissances et en utilisant leurs propres critères. Pour catégoriser selon le type de problèmes les sujets doivent être capables de percevoir la structure sous-jacente aux problèmes et de reconnaître que plusieurs de ces problèmes possèdent des structures semblables. Comme les gens varient quant à leur perception d'un même problème (Jeeves & Greer, 1983), ils développent différentes représentations de ces derniers et différentes stratégies pour les résoudre. C'est ce genre d'approche qui nous intéresse davantage.

Avant d'examiner plus en détail les différentes méthodes utilisées pour étudier ce deuxième type de catégorisation, il est important de comprendre qu'en plus de la structure interne d'un domaine inhérente à chaque individu, il existerait également une structure générale propre à chaque domaine qui influencerait la structure interne acquise par les

individus. Une des méthodes utilisées pour capturer cette structure générale consiste à demander aux sujets de construire des structures arborescentes à l'aide des concepts-clefs d'un domaine ou unité de connaissance, de façon à en déduire une organisation structurale des connaissances de ce domaine particulier (Donald, 1983). Cette méthode nous permet de voir les relations les plus proches entre les concepts, dans l'ordre. En général, on remarque que dans les cours de science bien définis (mathématiques, physique ou biologie par exemple), les relations entre concepts tendent à être hiérarchiques, tandis que les structures arborescentes contiennent des concepts reliés par plusieurs liens serrés. En contraste, les formations de concepts dans les cours de sciences sociales et humaines tendent à être beaucoup plus lâches. Elles contiennent des concepts pivots, des palmes de concepts et des réseaux. Les représentations reflètent donc le degré de structure d'un domaine donné (Donald, 1983; 1987). Ces différentes organisations de concepts-clefs ont fort probablement un impact sur la façon d'apprendre dans différents domaines et "d'internaliser" les différents concepts appris. En fait, des études suggèrent que l'enseignement de la structure d'un domaine aiderait à améliorer l'apprentissage des individus. Par exemple, l'utilisation de cartes de concepts semble être une stratégie d'enseignement efficace pour améliorer la performance en résolution de problèmes de physique, surtout pour les élèves d'habileté moyenne (Austin, 1993).

Selon Olson et Biolsi (1991) les recherches sur l'expertise montrent que les experts possèdent un ensemble de connaissances spécifiques auxquels ils font constamment référence pour résoudre les problèmes efficacement. Toutefois, ces auteurs ajoutent, "the major challenge to investigators of expertise is to elicit and describe the content and the general organization of experts' knowledge, as well as to identify and infer their general strategies for operating with that knowledge to solve problems" (p. 241). Selon eux, les méthodes disponibles pour arriver à cette fin, se divisent comme suit: les méthodes générales et spécifiques et les méthodes directes et indirectes.

Pour Olson et Biolsi (1991), les méthodes directes, telles que les interviews, la pensée à haute voix, ou les tâches de triage de cartes, nous permettent de découvrir les concepts et les stratégies des experts. Elles nous révèlent les concepts qu'ils utilisent, l'organisation de ces concepts et nous donnent des indications sur les approches utilisées lors de la résolution de problème. Toutefois, Olson et Biolsi recommandent que les

conclusions auxquelles on arrive en utilisant ces méthodes soient confirmées par d'autres mesures plus subtiles, car ces méthodes ont leurs limites. Par exemple, la méthode de triage hiérarchique de cartes se fonde sur la supposition que l'information est emmagasinée hiérarchiquement, ce qui peut amener le sujet à organiser l'information de façon plus rationnelle qu'il ne le ferait autrement. Toutefois cette méthode s'avère un moyen rapide pour commencer à comprendre l'organisation de la mémoire.

Il existe plusieurs méthodes dites indirectes. Par exemple, "multidimensional scaling", "Johnson hierarchical clustering", "additive trees", "ordered trees from recall". Ces méthodes sont à la fois plus détaillées dans leur processus et permettent de tirer des conclusions plus précises et limitées. Elles permettent d'extraire des comportements plus menus des experts et utilisent des algorithmes compliqués pour faire des déductions quant à la nature de l'organisation des connaissances. Toutefois ces méthodes montrent seulement les organisations de concepts déjà identifiés par d'autres moyens; elles ne nous apprennent rien du genre de processus de pensée impliqués dans la résolution des problèmes étudiés.

Nous avons vu plus tôt que la catégorisation des problèmes se produit dans les toutes premières secondes de la résolution d'un problème (Hinsley, Hayes & Simon, 1978). Ceci indique sans doute qu'elle constitue du processus de résolution. Il semble donc raisonnable de croire que c'est seulement une fois qu'un individu connaît la nature du problème auquel il a affaire et sait à quel genre de connaissances il peut le relier, qu'il peut commencer à travailler et décider de la stratégie la plus appropriée, s'il ne possède pas déjà une stratégie correspondant à la catégorie choisie. La catégorisation des problèmes serait donc une étape cruciale du processus de résolution des problèmes, d'où l'importance d'étudier davantage ce processus.

Parmi les chercheurs qui ont travaillé directement sur le processus de catégorisation, Chartoff (1977) a examiné la perception de 500 étudiants (de la 7^{ème} année jusqu'au niveau du collège), sur la similarité mathématique de paires de problèmes d'algèbre verbaux. Les sujets devaient évaluer les problèmes à l'aide d'une échelle continue de similarité. Les étudiants de tous les niveaux ont reconnu quatre dimensions fondamentales de similarité entre les problèmes: (a) la façon dont les problèmes sont résolus, (b) le cadre contextuel, (c) la comparaison avec un problème générique du même type et (d) la

question du problème. Le degré de référence à chacune des dimensions variait selon les individus.

Selon Schoenfeld et Hermann (1982), "although expert-novice studies do show that experts and novices differ in problem perception, the design of these studies precludes univocal conclusions about the origins of these differences" (p. 485). En effet, dans la plupart de ces études, les experts sont plus vieux, plus entraînés, plus expérimentés et plus susceptibles de posséder de meilleures aptitudes dans le domaine que les novices. Une étude de Schoenfeld et Hermann (1982) a permis de mesurer de façon plus claire l'influence de l'entraînement sur la perception mathématique en examinant la perception des problèmes d'un groupe d'individus qui, avec un entraînement particulier, acquièrent de l'expérience et améliorent leur habileté à résoudre ces problèmes. L'étude impliquait deux groupes d'étudiants, un groupe de novices, étudiants de première et deuxième année à l'université, et un groupe d'experts, neufs professeurs de mathématique à l'université. On choisit trente-deux problèmes mathématiques pour la tâche de catégorisation et un expert mathématicien assigna à chaque problème, a priori, une structure profonde et une structure de surface. Les deux groupes d'étudiants devaient grouper les problèmes selon qu'ils étaient mathématiquement similaires, c'est-à-dire, qu'ils pouvaient être résolus de la même façon. Après une première catégorisation, les deux groupes de novices reçurent chacun un entraînement; le groupe expérimental reçut un cours en résolution de problème et le groupe contrôle, un cours de programmation. Après l'entraînement, les deux groupes firent une deuxième tâche de catégorisation, avec des problèmes différents, mais équivalents à ceux de la première catégorisation. Les données des deux groupes de novices indiquent que les relations structurales profondes entre problèmes ont été rarement perçues lorsqu'elles étaient en contradiction avec les relations structurales de surface. Après l'entraînement toutefois, les étudiants qui avaient pris le cours de résolution de problème virent leur performance s'améliorer, dans le sens des relations structurales profondes faites par les experts, alors ce ne fut pas le cas pour les étudiants inscrits au cours d'informatique. Ceci indique qu'une instruction qui se concentre sur la compréhension et la performance peut avoir un impact important sur les perceptions mathématiques des problèmes. En terminant, les auteurs concluent que leur groupe expérimental ne peut pas vraiment être qualifié d'experts. En effet, un examen plus

détaillé des groupements de problèmes montre certaines différences dans la catégorisation des problèmes qui peuvent être expliquées par les connaissances et l'expérience plus grandes des experts, ce qui permet ces derniers de percevoir des relations inaccessibles aux novices. Le groupe expérimental se situerait plutôt en position intermédiaire entre le groupe des novices non expérimentaux et celui des experts.

Deux études conduites par Silver (1979) incluent également une étape de résolution de problèmes entre deux catégorisations. Des sujets provenant de classes régulières de mathématique (8ième année) ont eu à catégoriser 24 problèmes écrits d'algèbres en jugeant le degré avec lequel les problèmes étaient mathématiquement reliés. Chaque problème a été varié systématiquement selon quatre dimensions: la structure mathématique et les détails contextuels dans une première étude, et la pseudostructure et la forme de la question dans une deuxième étude. On demanda aux sujets de catégoriser les problèmes deux fois, une fois avant et une fois après avoir tenté de les résoudre. Les étudiants ne pouvaient relier les paires de problèmes par plus d'une dimension. Les résultats indiquent que tous les sujets utilisent les quatre dimensions pour catégoriser. De plus, en comparant les catégorisations avant et après la résolution des problèmes, on constate une augmentation marquée des catégorisations faites sur la base de la structure mathématique. Les deux études montrent une forte corrélation positive entre l'habileté mathématique, évaluée grâce aux mesures prises préalablement (QI verbal et non-verbal, mesures de la connaissance de concepts mathématiques et habileté de calcul mathématique, mesure de l'habileté numérique) et les catégorisation basées sur la structure mathématique. De plus, les résultats indiquent une corrélation négative entre l'habileté mathématique et la tendance à catégoriser les problèmes selon les détails du contexte. Ces résultats nous révèlent que la perception de la structure avant la solution demeure corrélée de façon significative avec la performance en résolution de problème, même lorsque les effets des QIs verbaux et non verbaux sont contrôlés simultanément. Ceci est en accord avec les résultats de Krutetskii (1976) qui montrent que les bons solutionneurs de problèmes sont capables de saisir la structure des problèmes avant de les résoudre.

Même après avoir éliminé l'effet des variables impliquées dans la mesure de l'habileté mathématique, les QI verbaux et non verbaux, les mesures de la connaissance de concepts mathématiques et l'habileté de calcul mathématique, on constate que la perception de la

structure après solution demeure significativement différente de la perception avant solution. On en conclut que l'habileté des bons solutionneurs de problèmes à extraire des solutions l'information au sujet de la structure mathématique des problèmes et à utiliser cette information pour juger du degré de relation entre les problèmes n'est pas simplement fonction de l'habileté mathématique. Les quatre dimensions identifiées par Silver (1979) (structure mathématique, détails contextuels, pseudostructure et forme de la question) sont similaires à celles identifiées par Chartoff (1977). Ce résultat est impressionnant, étant donné les différences d'approches des deux auteurs (différents problèmes, différentes procédures d'administration, différentes analyses).

Gliner (1988) utilisa 13 des 24 problèmes utilisés initialement par Silver (1979) et demanda à un groupe d'experts (membres du département de mathématique) et 133 étudiants de différentes orientations (algèbre, calcul différentiel et intégral pour étudiants en administration, équations différentielles et psychologie) de classifier les problèmes selon leur structure mathématique, puis de les résoudre. Cette dernière procédure permit de différencier les sujets selon leur habileté à résoudre correctement les problèmes. Les problèmes ont été choisis et divisés selon les mêmes quatre dimensions identifiées par Silver (1979): structure mathématique, contexte, forme de la question et pseudostructure. Les paires de problèmes ne pouvaient être reliées par plus d'une dimension. De façon générale, les résultats indiquent que les raisons de catégorisations mentionnées par les membres de la faculté de mathématique correspondent à celles préalablement conçues par les expérimentateurs en se basant sur la structure mathématique. Il y a des différences marquées entre les solutionneurs de problèmes ayant du succès et ceux qui n'en ont pas, en ce qui concerne l'organisation des problèmes écrits. Lorsque qu'on demanda aux sujets de catégoriser les problèmes selon leur structure mathématique, les solutionneurs de problèmes ayant un taux de réussite plus élevé (10 à 13 problèmes corrects) reconnurent les relations mathématiques entre les problèmes et furent immédiatement capables d'organiser les problèmes en se basant sur leur structure mathématique. Les structures correspondant aux solutionneurs de problèmes ayant le plus de succès ressemblent à celles des membres de la faculté et les raisons de catégorisation données correspondent aux méthodes de solution. À l'opposé, les solutionneurs de problèmes ayant un taux de réussite peu élevé ne virent pas les caractéristiques structurelles mathématiques sous-

jacentes aux problèmes et organisèrent les problèmes en se basant sur des structures de surface comme la forme de la question, le contexte et des unités de mesures communes. De plus, selon Gliner (1988), ces derniers ne semblaient pas utiliser les mêmes critères de façon constante, ils catégorisaient les problèmes selon les similarités entre paires de problèmes.

Krutetskii (1976) suggère que des différences qualificatives existent entre les bons et mauvais solutionneurs de problèmes quant à l'étendue de leur rappel d'information de problèmes rencontrés préalablement. Les bons solutionneurs de problèmes tendraient à se rappeler des caractéristiques structurales des problèmes, alors que les moins bons, s'ils se rappellent de quelque chose, se rappelleraient plutôt de détails spécifiques de l'énoncé du problème. Dans une étude de Silver (1981), on demanda à des étudiants de septième année et d'habileté au-dessus de la moyenne de compléter une tâche de catégorisation de problèmes, de même qu'une tâche de résolution de problèmes. Après qu'ils aient résolu les mêmes problèmes par 4 fois (sur une période allant jusqu'à quatre semaines), on leur demanda d'exposer tout ce dont ils se rappelaient des problèmes et de leur solution. Les résultats de Silver corroborent de façon générale ceux de Krutetskii (1976), à savoir, que les bons solutionneurs de problèmes tendent à se rappeler de façon correcte la structure mathématique des problèmes qu'ils ont résolus, alors que les moins bons solutionneurs de problèmes le font rarement. Cependant, dans l'étude de Silver (1981) on note quelques résultats dissemblables. Par exemple, alors que les bons solutionneurs de problèmes se rappelaient surtout des détails des problèmes, les moins bons solutionneurs de problèmes avaient tendance à bien se rappeler de la question et du contexte du problème. Dans l'étude de Krutetskii à l'inverse, les bons solutionneurs de problèmes oubliaient tout sauf la structure du problème après l'avoir résolu, alors que les moins bons solutionneurs de problèmes ne se rappelaient que de très peu de choses des problèmes qu'ils avaient résolus. On peut expliquer cette divergence du fait que, dans l'étude de Krutetskii, on n'avertit pas les sujets à l'avance que leur mémoire serait testée alors que ce fut le cas dans celle de Silver. Selon ce dernier, les données de cette étude

clarify Krutetskii's general finding by suggesting that the difficulty for poor problem solvers may lie in their lack of ability to notice structure before solving a problem, during an attempted solution, or even when the solution has been presented during a class discussion. [...] [It also] suggests that good and poor problem solvers differ

with respect to the degree to which they can remember and utilize structural information obtained from a presented problem solution. [...] [and] that their [the poor problem solvers'] poor memory is not due to a general memory deficit. (pp. 62-63)

Smiley, Oakley, Worthen, Campione et Brown (1977) ont obtenu des résultats équivalents dans le domaine de la lecture où les bons et les moins bons lecteurs différaient quant à l'étendue avec laquelle ils se rappelaient des unités structurales importantes des histoires, alors que les moins bons lecteurs souffraient d'un déficit de compréhension.

Lors d'une tâche de catégorisation Chi, Feltovich et Glaser (1981) ont demandé à un groupe de huit experts (étudiants au doctorat) et un de huit novices (premier cycle) en physique de catégoriser 24 problèmes de physique selon la similarité de leur solution. Tout de suite après avoir catégorisé les problèmes, les auteurs redemandèrent aux sujets de grouper les problèmes, pour vérifier la stabilité ou fidélité des premières catégorisations. On leur a ensuite demandé d'expliquer leurs groupements. La tâche expérimentale s'est avérée stable, mais on peut remettre en question le fait que cette vérification de la stabilité ait eu lieu immédiatement après la première catégorisation: l'influence des connaissances tout juste acquises a sûrement été important. Une analyse de la nature des groupements et des explications les accompagnant révèle que les descriptions des novices contiennent principalement les caractéristiques de surface des problèmes (objets ou autres), alors que toutes les descriptions données par les experts impliquent des lois de la physique. En général, les sujets ne se confinent pas à l'utilisation d'un seul type de catégorie; les novices utilisent parfois des caractéristiques nécessitant la reconnaissance d'une structure, alors que les experts utilisent des caractéristiques de surface en plus de celles qui sont basées sur la structure des problèmes. Il est finalement intéressant de constater que les experts ont regroupé la plupart des problèmes en trois catégories majeures, alors qu'une seule catégorie majeure est utilisée par les novices. Les auteurs suggèrent donc que "experts are able to `see' the underlying similarities in a great number of problems, whereas the novices `see' a variety of problems that they consider to be dissimilar because the surface features are different" (p. 130).

Questions de Recherche

L'emploi de tâches de résolution de problèmes a permis d'apprendre énormément sur la nature de l'expertise, la nature de la douance, de même que sur les chemins qui mènent à la compétence. Toutefois, en examinant les résultats des travaux sur le sujet, on constate le besoin de solidifier les bases théoriques des recherches en résolution de problèmes (Lester, 1983; Greeno, 1978), expertise (Schoenfeld & Hermann, 1982) et douance (Sternberg, 1985; Shore & Kanevsky, 1993). Les similarités observées entre les résultats des recherches sur l'expertise et ceux de la douance, dans le cadre des résolutions de problèmes, peuvent, à notre avis, ouvrir la voie à une théorie unifiée de l'acquisition de la compétence. Un des objectifs généraux de notre étude est d'approfondir davantage la relation entre la douance et l'expertise— *Est-ce que la douance peut être conçue comme une forme d'expertise? Quelle est sa place dans la transition du stade de novice à celui d'expert?*— et d'examiner cette relation sous l'angle de l'organisation des connaissances.

Certaines constantes semblent se dégager des travaux faits jusqu'à présent sur l'organisation des connaissances dans le cadre des recherches sur la résolution de problèmes, indiquant les bases possibles d'une théorie de l'acquisition de la compétence unifiant les courants de recherche de l'expertise et de la douance. Par exemple, lorsque l'on compare les performances d'experts et de novices, le rôle "facilitateur" que jouent les bonnes connaissances de bases pour l'obtention d'une représentation interne des problèmes de qualité supérieure et que jouent ces dernières pour la résolution (Greeno & Simon, 1984, p. 11). La complexité de l'organisation des connaissances semble jouer un rôle clef dans ce qui distingue les novices des experts, par exemple, en permettant la reconnaissance de patrons complexes, ce qui amène à un meilleur choix de stratégies de résolution. De même, les individus plus doués semblent posséder une plus grande capacité à percevoir la structure interne des problèmes (Krutetskii, 1976; Coleman & Shore, 1991, Austin, 1993).

Les recherches de Hinsley, Hayes et Simon (1978) ont montré que les sujets semblent catégoriser les problèmes presque immédiatement après les avoir reçus. La catégorisation serait donc une des premières étapes du processus de résolution de problème. L'examen de cette première étape se révèle important, car il nous permet d'avoir une meilleure idée

du genre de représentation et d'organisation des connaissances que possède un individu et de la manière dont ces structures influencent la résolution d'un problème. L'utilisation de tâches de catégorisations pour comparer experts et novices (Chi, Glaser & Rees, 1982; Chartoff, 1977, Schoenfeld & Hermann, 1982) ou individus doués et moins doués (Silver, 1979; Gliner, 1988) a permis d'observer une préférence chez les experts et les individus doués pour l'utilisation de catégories fondées sur la structure des problèmes. De leur côté, les novices et les individus moins doués semblent se tourner davantage vers les catégories fondées sur les caractéristiques de surface. Ce lien apparent entre les tendances des experts et des individus doués ou entre les tendances des novices et des individus moins doués a rarement été examiné directement à l'intérieur d'une même étude, encore moins pour ce qui est de l'organisation des connaissances. *Le second objectif de notre étude est de combler en partie ce vide, en réunissant experts, individus doués et moins doués autour des mêmes tâches expérimentales.*

L'objectif central de notre étude est d'essayer de décrire et comparer, de la meilleure façon possible, l'organisation des connaissances d'individus de différentes habiletés en mathématiques. Nous utilisons la procédure de catégorisation développée par Chi, Glaser et Rees (1982): en effet, au lieu de limiter leur expérimentation à une simple catégorisation des problèmes (comme la plupart des études de ce genre), Chi et al. ont également donné l'occasion aux sujets de diviser davantage les groupements de problèmes venant d'être formés, et de regrouper ces derniers (les groupements de problèmes) selon les similarités. Cette procédure permet de décrire de façon plus détaillée l'organisation hiérarchique des problèmes et catégories de problèmes et, par extension, d'obtenir un meilleur aperçu de l'organisation des connaissances correspondantes. Chi et al. (1982) ont comparé deux groupes de sujets, des experts et des novices, lors d'une tâche de physique. Cette étude comparera trois groupes de sujets, des experts, des individus de grande habileté et des individus d'habileté moyenne, lors d'une tâche mathématique. Les objectifs décrits plus haut nous amènent donc aux questions de recherche suivantes, qui sont au coeur de notre étude: *est-ce que les individus doués ressemblent davantage à des pairs de leurs âge mais d'habileté mathématique moins élevée ou plutôt aux experts beaucoup plus expérimentés sur le plan de leur catégorisation des problèmes*

mathématiques? Plus concrètement, quelles sont la nature et le degré de ressemblance des catégorisations hiérarchiques de ces différents groupes de sujets?

Les mathématiques ont été choisies comme domaine d'investigation parce que cela permettra de tester et répliquer les résultats obtenus par l'équipe de Chi, Glaser et Rees (1982) dans un autre domaine et ensuite parce que, selon Jeeves et Greer (1983), les mathématiques peuvent être considérés comme la forme la plus développée d'apprentissage structural. Découvertes et représentation font en effet partie intégrale de l'origine des mathématiques et donc constituent un domaine tout-à-fait approprié pour l'étude de l'organisation des connaissances.

Finalement, un objectif secondaire de notre étude découle de deux observations de Kaizer et Shore (sous presse) sur la flexibilité dans l'utilisation des stratégies de résolution. D'abord, il ressort de leurs travaux que les stratégies utilisées par les sujets lors des résolutions de problèmes semblaient être influencées par la forme extérieure des problèmes écrits. Il est important de déterminer de façon plus directe l'influence de la forme des problèmes sur le processus de résolution. Nous tenterons donc ici d'examiner de plus près cette influence aux premiers moments du processus de résolution, lors du stade de catégorisation, en posant la question suivante: *le processus de catégorisation est-il influencé par la forme extérieure du problème (symbolique, écrit, graphique)?*

Dans une de ses conclusions, Kaizer (1988) note également la pertinence d'étudier à quel stade de résolution de problème les stratégies alternatives de solution sont considérées par les sujets. Kaizer et Shore (sous presse) suggèrent qu'il est probable que cette considération se produise dans les tous premiers stades de la résolution de problèmes. Étant donné que la catégorisation des problèmes constitue un de ces premiers stades, nous tenterons, en analysant les explications associées aux groupements, de porter une attention particulière aux différents genres de stratégies mentionnées et de répondre à la question suivante: *les sujets considèrent-ils des stratégies alternatives de solutions dès les tous premiers stades de résolution de problèmes, à savoir lors de la catégorisation des problèmes?*

CHAPITRE 2

MÉTHODOLOGIE

Sujets

Données sur la Sélection des Sujets

Nous avons utilisé 24 sujets divisés en experts et novices et constituant trois groupes-habileté; 8 mathématiciens (étudiants à la maîtrise ou au doctorat en mathématiques) constituent le groupe d'*experts*. Ce qualificatif d'expert a été utilisé en considération du niveau peu élevé de difficulté de la tâche choisie, soit des problèmes de mathématiques de la fin du secondaire. Nous avons choisi, selon leur habileté mathématique, 16 élèves venant de terminer leur cinquième secondaire et les avons divisé en deux sous-groupements: huit élèves *de grande habileté* en mathématiques et huit élèves *d'habileté moyenne*. Tous ces élèves proviennent de la même école secondaire anglophone de la région de Montréal, où une même personne leur a enseigné les mathématiques. Nous les avons contacté à la fin de leur cinquième secondaire et testés à la fin de l'été ou durant l'automne suivant.

Un consentement parental écrit a été obtenu pour chacun des élèves ayant participé à l'étude. De plus, nous nous sommes assurés que chacun des élèves choisis avaient les capacités nécessaires pour comprendre et accomplir les tâches expérimentales en vérifiant leur moyenne générale ainsi que leur note en anglais. En effet, les problèmes de mathématiques présentés aux sujets étaient dans cette langue, de même que les directives (dans le cas de certains experts francophones les directives étaient en français — voir la section Critères de Sélection des Sujets Experts).

Le jour de l'entrevue, les élèves venant de terminer leur secondaire devaient amener le consentement de leur parents ainsi que donner leur propre consentement par écrit. Chaque sujet était payé \$10 pour sa participation à l'étude. Chaque séance d'entrevue dura entre 1 h 30 et 3 heures. Nous avons noté le temps de complétion de chaque tâche expérimentale. Pour comparer le degré d'exposition des élèves aux mathématiques depuis la fin de leur cours secondaire et évaluer leur motivation à travailler dans ce domaine scolaire, nous leur avons fait remplir un formulaire à la fin de l'entrevue (annexe 5).

Caractéristiques Générales des Élèves Venant de Terminer Leur Secondaire

Les sujets de grande habileté avaient tous suivi des cours de mathématiques durant le semestre d'automne, aimaient beaucoup cette matière scolaire (4 ou 5 sur une échelle de 5) et avaient déjà participé à des concours de mathématiques. Après avoir complété leurs études secondaires ils avaient tous choisi les concentrations Sciences de la Santé ou Science pures et appliquées pour leur cours collégial. Du côté des sujets d'habileté moyenne, tous, sauf un, avaient sélectionné des concentrations nécessitant au moins un cours de mathématique pour l'obtention de leur diplôme du collégial. Cependant, seulement la moitié d'entre eux suivaient des cours de mathématiques au semestre d'automne. De ces sujets, tous possédaient une assez forte motivation (de 3 à 5 sur une échelle de 5) et étaient dans les concentrations Sciences de la Santé ou Sciences Pures, à l'exception d'un sujet dans la concentration Commerce (qui implique davantage de mathématiques). Les élèves qui n'avaient pas de cours de mathématiques à l'automne n'aimaient pas tellement les mathématiques (1 à 3 sur une échelle de 5). Deux d'entre eux étaient dans la concentration Sciences Sociales et deux dans des cours professionnels ("Santé Animale" et "Technologie de Bureau"). Nous n'avons trouvé aucune relation entre la classe de provenance des sujets d'habileté moyenne (cours de mathématique régulier, 522 ou enrichi 532), leur motivation à faire des mathématiques et leur degré d'exposition à cette matière scolaire.

Comme la conceptrice de l'étude est aussi l'expérimentatrice, nous avons décidé qu'elle ne serait pas mise au courant du groupe de provenance des étudiants pour éviter de biaiser son évaluation.

Critères de Sélection des Sujets

Experts

Les experts provenaient de trois universités de la province de Québec, principalement de l'Université McGill, mais aussi de l'Université de Montréal et de l'Université Laval. Ils devaient avoir complété un baccalauréat en mathématiques pures et être présentement au doctorat ou à la maîtrise. Certains experts étaient francophones, d'autres anglophones. Dans le cas où les experts étaient francophones, on lut les directives en français et ceux-ci pouvaient donner leurs réponses en français. Toutefois, comme tous les problèmes

présentés étaient écrits en langue anglaise, les experts devaient nous confirmer, avant l'expérimentation, avoir une maîtrise suffisante de l'anglais pour être capables de lire les problèmes.

Élèves de Grande Habileté en Mathématiques

Les critères employés pour sélectionner les sujets de grande habileté sont similaires à ceux habituellement utilisés pour choisir des sujets doués. C'est pourquoi les sujets de grande habileté peuvent être en quelques sortes considérés comme des sujets doués en mathématiques et ceci nous permettra, jusqu'à un certain point, de généraliser nos résultats aux individus mathématiquement doués et donc au courant de la douance.

Plusieurs critères existent pour sélectionner les personnes doués. En général, on favorise l'emploi de plusieurs critères de sélection, à la fois quantitatifs et qualitatifs, qui confirment le trait recherché (Clark, 1983; Davis & Rimm, 1985; Pendarvis, Howley & Howley, 1990; Renzulli, Reis & Smith, 1981; Sisk, 1980). Pour identifier les élèves *mathématiquement* doués, nous avons utilisé les deux critères de sélection suivants: (a) le rendement académique, qui, bien que faillible (ex.: ennui), n'en est pas moins valable (Clark, 1983), surtout pour des matières scolaires telles que les mathématiques, qui sont rarement étudiés hors du contexte scolaire (Tannenbaum, 1983; Pendarvis et al.; 1990), et (b) les recommandations de l'enseignant. Ce dernier critère est assez controversé, même s'il est un des plus utilisés (Alexander & Muia, 1982; Davis & Rimm, 1985). En effet, les enseignants prennent souvent pour acquis que les élèves plus dociles ou ceux obtenant un rendement académique plus élevé possèdent les plus hauts niveaux d'habileté. En fait cela conduit souvent à des erreurs (Alexander & Muia, 1982). Pour pallier à cela on recommande généralement que les enseignants reçoivent un entraînement pour les aider à identifier les étudiants doués et qu'il leur soit donné suffisamment de temps pour connaître les élèves avant la période d'identification des plus doués (Davis & Rimm, 1985). C'est pour cette raison que l'identification des élèves impliqués dans notre étude s'est faite complètement à la fin de l'année scolaire.

Les élèves "doués" en mathématiques devaient premièrement posséder un rendement académique au-dessus de la moyenne de leur classe de mathématiques enrichis.

Deuxièmement, ils devaient être identifiés par leur enseignant selon les critères employés

par Krutetskii (1976) dans ses séries d'études sur les personnes douées en mathématiques. L'emploi de ces critères assura que l'enseignant se concentre sur autre chose que le rendement académique pour la sélection des élèves et sache précisément ce à quoi il devait porter attention. Cette procédure nous a ainsi permis de mettre de côté les étudiants ne possédant qu'un bon rendement académique et de ne garder comme sujets "doués" que ceux qui, en plus, atteignaient un degré hors d'ordinaire de compréhension du matériel mathématique. Selon Krutetskii, les doués sont ceux qui:

[1] Placed among the capable were pupils who quickly and easily mastered mathematical material and acquired skills in performing mathematical operations, [2] who thought independently and somewhat creatively while studying new material, [3] and who came up with original solutions of nonstandard problems. (p. 176)

Élèves d'Habileté Moyenne en Mathématiques

Pour faire partie du groupe d'habileté moyenne, l'élève devait avoir à la fois des résultats académiques et des habiletés dans la moyenne (telles que définies par Krutetskii, 1976), sans posséder aucune des caractéristiques correspondant aux élèves de grande habileté mathématique. Selon cet auteur, ces élèves sont ceux qui:

[1] Placed in the group of pupils of average ability were pupils for whom successful work in mathematics required a considerable—in comparison with the capable pupils— expenditure of time and effort. [2] [...] these pupils experience great difficulty in transferring to solving problems of a new type. But having mastered the methods of solving them they subsequently cope with similar assignments rather well. [3] Their knowledge is imitative rather than creative. (p. 176)

Les élèves d'habileté moyenne faisaient partie d'une classe de mathématiques régulière en cinquième secondaire (enseignée par le même professeur que le groupe enrichi d'élèves doués en mathématiques) à l'exception de 4 élèves ayant fait partie de la classe enrichie et ayant des résultats au moins 10 points sous la moyenne de cette classe. Pour s'assurer que tous ces élèves étaient d'habileté comparable, on vérifia que les résultats obtenus à l'examen de mathématiques du Ministère de l'Éducation étaient comparables. Cet examen est standardisé et obligatoire pour tous les élèves de cinquième secondaire de la province de Québec. Les notes obtenues par les élèves d'habileté moyenne provenant de la classe régulière à l'examen de mathématiques 522 se situaient entre le 29^{ème} et le 63^{ème} percentile, tandis que celles provenant des élèves moyens de la classe enrichie se

distribuaient entre le 27^{ème} et le 48^{ème} percentile. Comparativement, les élèves du groupe de doués se classèrent entre le 89^{ème} et le 98^{ème} percentile au même examen.

Matériel

Critères de Sélection des Problèmes

Nous avons utilisé cinq critères pour sélectionner les problèmes de mathématiques qui sont à la base des tâches expérimentales. Ceux-ci devaient (a) être représentatifs de ce que les élèves avaient appris en mathématiques lors de leur cinquième secondaire, (b) faire partie d'une section enseignée de la même façon aux deux groupes de novices (élèves doués et élèves d'habileté moyenne), (c) être de nature suffisamment différente pour que les élèves d'habileté moyenne, de grande habileté et les experts soient capables de faire plusieurs groupements de problèmes, (d) être en quantité suffisamment grande pour permettre que les sujets fassent des sous-groupements à leurs groupements s'ils le désirent et, finalement, (e) être présentés sous des formes différentes (graphique, symbolique et écrite) pour vérifier si l'apparence des problèmes influence les élèves dans leur catégorisation.

(a) Représentativité des Problèmes

Le livre de base du cours de mathématiques suivi par les deux groupes de novices était Algebraic and circular functions de Paterson, Clarke, George et Kurys (1970). Comme le nom du livre l'indique, le cours portait sur tout ce qui se rapporte aux fonctions: les relations en général, les relations dans l'Ensemble des nombres réels, relations du premier et du second degré, les fonctions logarithmiques et exponentielles et fonctions trigonométriques. Ce cours s'appuie sur le document numéro 16-3302A du Ministère de l'Éducation (Province de Québec) qui décrit le curriculum mathématique du second cycle du secondaire (1984).

Pour choisir les sections d'où les problèmes seraient puisés, nous nous sommes également inspirés du document gouvernemental (numéro 16-7177 A) contenant des informations sur les examens du ministère de l'éducation en sciences naturelles et mathématiques (1986). Ce document décrit entre autres les proportions de l'examen du ministère qui porteront sur les différentes sections des programmes enrichi et régulier.

(b) Équivalence dans l'Enseignement des Problèmes

Une autre étape dans le choix des problèmes avait pour but d'éviter que l'obtention de résultats significatifs soit due à une différence dans l'enseignement donné aux élèves plutôt qu'à une différence dans l'habileté mathématique des sujets. En effet, bien que le curriculum du programme enrichi en mathématiques inclut tout le programme régulier, d'autres notions y sont ajoutées et la plupart des sections y sont enseignées de manière plus approfondie. L'enseignant impliqué dans cette étude nous a de plus expliqué qu'il enseigne un peu différemment selon qu'il est dans un groupe régulier ou dans un groupe enrichi: plus lentement dans le programme régulier, à cause des nombreuses explications et exemples donnés et beaucoup plus vite dans le programme enrichi, car les élèves comprennent rapidement et ont besoin de beaucoup moins d'exemples. L'enseignant ajoute aussi, dans le programme enrichi, plusieurs démonstrations mathématiques, ce qu'il ne fait pas dans la classe régulière.

Tous ces facteurs sont suffisants pour que les résultats des deux groupes diffèrent, sans que l'habileté mathématique n'y joue de rôle important. C'est pourquoi il convient d'éliminer le plus possible l'influence de tels facteurs. Pour atteindre cet objectif, nous avons d'abord choisi, pour les tâches expérimentales, que des problèmes provenant du programme régulier en mathématiques, programme commun à la classe enrichie et la classe régulière. Ensuite, nous avons demandé à l'enseignant quelles parties du programme commun avaient été vues plus en profondeur ou enseignées de façon différente dans la classe de mathématiques enrichis (ex.: le fait que des élèves apprennent à faire des preuves dans un groupe et pas dans l'autre), de façon à ne choisir aucun de ces problèmes. Les problèmes sélectionnés pour l'expérimentation ne s'inspirent donc que du programme vu de la même façon dans les deux classes.

(c) Différences dans la Nature des Problèmes

Les mathématiques sont une discipline dont les éléments sont souvent interreliés, surtout lorsque l'on considère l'enseignement fait à la fin du cours secondaire; les problèmes sont très simples et de base. Le même problème peut être perçu de différentes façons selon l'approche utilisée ou l'expérience. Pour notre étude toutefois, il fallait choisir des problèmes de nature assez différente pour que les experts et les élèves ayant

tout juste terminer leur secondaire soient capables de les diviser en plusieurs groupements, indépendamment de leur manière de les catégoriser (c'est-à-dire selon l'apparence ou la structure interne du problème).

En se basant sur ces critères de sélection (a) à (c), nous avons choisi, pour puiser les problèmes, deux sections du curriculum mathématique du cinquième secondaire: la géométrie et l'algèbre, en relation avec les fonctions. Avant de choisir les problèmes qui constitueraient la tâche expérimentale, l'expérimentatrice s'est refamiliarisée avec le contenu du programme de cinquième secondaire en mathématiques.

Nous avons pris les problèmes de quatre sources majeures: du livre de base Algebraic and Circular Functions (Paterson et al., 1970), du livret Tutorial Notes, functions: (mathematics 522-532) (Tutorial notes, 1984) qui regroupent des problèmes simulés, équivalents à ceux donnés aux examens du Ministère de l'Éducation du gouvernement du Québec des années 1970 à 1983, de copies des examens du ministère des années 1983 à 1987, enfin du livre Algebra, its big ideas and basic skills (Aiken, Henderson & Pingry, 1960).

Dans la section *géométrie*, on retrouve 6 problèmes touchant à la trigonométrie et 6 touchant au cercle. Dans la section *algèbre*, on peut trouver 6 problèmes touchant aux équations et inéquations, 6 autres touchant à la théorie des ensembles et enfin 6 touchant aux fonctions constantes ou du premier degré. L'ensemble des problèmes utilisés est relié à la théorie des fonctions et est disponible à l'annexe 4. Nous nous sommes assurés d'avoir un nombre égal de problèmes dans chacune des divisions des sections choisies.

(d) Quantité Suffisante de Problèmes

Pour décider de la quantité idéale de problèmes requis pour la tâche expérimentale, nous nous sommes inspirés des études similaires faites sur le sujet. Dans ces études le nombre de problèmes (de mathématiques ou de physique) employé varie entre 13 et 40 (Chi, Glaser & Rees, 1982; Feltovich & Glaser, 1981; Gliner, 1988; Schoenfeld & Hermann, 1982; Silver, 1979). Toutefois, l'étude de Chi et al. (1982) dont nous nous sommes grandement inspirés pour bâtir notre design expérimental, est la seule où l'on demande aux sujets de rediviser les groupements faits après la première catégorisation. Cela explique sans doute le nombre plus élevé de problèmes requis, soit 40.

La présente étude, quant à elle, fait face à certaines limites pour ce qui est de l'étendue des domaines parmi lesquels on peut choisir les problèmes, étant donné le programme scolaire limité des élèves de cinquième secondaire et les restrictions supplémentaires que nous y avons apportées pour que les élèves des deux groupes d'habileté aient des problèmes de difficulté semblable. De plus, comme nous l'avons expliqué plus tôt, nous devons nous assurer que les problèmes choisis soient de natures suffisamment différentes pour permettre des catégorisations diverses.

Nous avons sélectionné 34 problèmes dont 4 ont été éliminés par la suite. Une étude pilote a permis de vérifier que les trois tâches expérimentales pouvaient être accomplies de façon satisfaisante avec les trente problèmes restants; tous les sujets ont fait plusieurs groupements et sous-groupements lors de leurs catégorisations.

(e) Différence dans la Forme des Problèmes

Comme il a été mentionné dans l'introduction, un objectif secondaire de l'étude est de tester si la forme du problème, graphique, symbolique ou verbale, influence les élèves au point de vue de la catégorisation. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi et divisé les problèmes selon leur forme. Dans chacune des sous-sections (théorie des ensembles, équations/inéquations, etc.) nous avons placé deux problèmes graphiques, deux symboliques et deux verbaux (voir le Tableau 1 pour la définition de chacune des formes).

Validité du Choix des Problèmes

Pour s'assurer que chaque problème était bien représentatif de chaque section de mathématique, nous les avons présentés à deux experts (un mathématicien et un enseignant de mathématiques) pour qu'ils les classifient, d'abord en géométrie ou algèbre et, ensuite, dans chacune des sous-divisions. Les deux experts ont été d'accord à 90% sur les sous-divisions. Ils ont toutefois expliqué que les deux grandes sections, géométrie et algèbre, n'étaient pas vraiment pertinentes, car plusieurs sous-divisions pouvaient être à la fois classées dans les deux sections. La distinction algèbre/géométrie fut quand même utile comme point de départ pour choisir les problèmes.

Pour s'assurer que la forme des problèmes (graphique, symbolique ou verbal) correspondait vraiment aux classements que nous leur avons donné, deux juges indépendants (étudiants de cycles supérieurs) ont classé les problèmes selon leur forme,

d'après les définitions expliquées au tableau 1. Cela a mené à l'élimination de trois problèmes jugés différemment par les deux juges. Les problèmes choisis ont tous obtenu un coefficient de fidélité inter-juges de 1.00 (100% d'accord).

Avant d'entreprendre l'étude pilote, nous avons présenté les problèmes à l'enseignant pour qu'il les vérifie sur la base des critères suivants: est-ce que le matériel présenté correspond bien au matériel vu en mathématiques 522 (régulier)? Est-ce que tous les problèmes touchant exclusivement au matériel du groupe 532 (enrichi) et ceux enseignés de façon différente à ce groupe ont été éliminés? Est-ce que les problèmes choisis sont clairs et leur présentation correspond-t-elle à la manière dont les élèves sont habitués de voir le matériel? Suite à cette vérification, nous avons retiré un problème et amélioré la présentation de trois autres.

Tableau 1

Définition des Trois Formes de Problèmes Utilisées

<u>Problème graphique</u>	Tout problème incluant un graphique ou une figure peut être considérée comme graphique, à condition que l'information donnée par la figure soit nécessaire à la résolution du problème. Cette dernière caractéristique distingue un problème graphique d'un problème impliquant simplement un graphe ou une figure.
<u>Problème symbolique</u>	Les relations entre les éléments constituant ce genre de problème sont exprimées principalement en termes non-verbaux, par exemple des équations. Les directives peuvent toutefois être donnés verbalement.
<u>Problème écrit</u>	Ces problèmes sont presque totalement exprimés à l'aide de mots et les principales relations entre les différents concepts mathématiques sont exprimées verbalement (aucune équation ne peut être présente).

Étude Pilote

Cinq sujets ont participé à l'étude pilote, dont un expert, deux élèves d'habileté moyenne en mathématiques et deux de grande habileté. Bien que les élèves utilisés (habileté moyenne et de grande habileté) n'avaient pas encore fait leur cinquième secondaire (ils étaient IIème, IIIème et IVème secondaire) cela permis de tester (a) la clarté des problèmes, (b) la clarté et la formulation des directives et (c) si les tâches expérimentales pouvaient engendrer différentes méthodes de classification et différents niveaux de groupements. Cette étape a également permis à l'expérimentatrice de s'exercer à administrer les tâches, de s'assurer que tout le matériel employé était adéquat, d'utiliser les données ainsi obtenues pour commencer à construire un système de codification et, enfin, de prévoir des méthodes d'analyses des résultats.

Clarté des Problèmes

Nous avons dû apporter des modifications à certains problèmes, par exemple, convertir certaines données au système international (métrique), corriger des erreurs typographiques ou clarifier la formulation de quelques problèmes.

Clarté et Formulation des Directives

Les essais pratiques effectués avant l'étude pilote ont mené à la décision de modifier quelque peu les directives utilisées pour l'expérimentation par rapport à celles d'autres études précédentes (Chi, Glaser & Rees, 1982; Gliner, 1988; Schoenfeld & Hermann, 1982; Silver, 1979). Chi et al. (1982) et Schoenfeld et Hermann (1982), par exemple, demandèrent à leurs sujets de grouper les problèmes selon la similitude de leur méthode de résolution. Étant donné les objectifs poursuivis ici, une telle approche est toutefois trop précise et trop définie. En effet, nous cherchons à savoir si les sujets baseront spontanément leurs groupements sur la méthode de résolution ou s'ils utiliseront d'autres critères. Le genre directives données par Silver (1979) et Gliner (1988) conviennent davantage. Ces auteurs demandèrent à leurs sujets de faire les groupements *selon la structure mathématique des problèmes*. Cette formulation est suffisamment ouverte pour laisser les sujets décider ce qu'est *pour eux* la structure mathématique d'un problème. Il est possible que les sujets perçoivent la structure mathématique des problèmes autrement que comme la façon de les résoudre.

Un des objectifs de cette étude est de voir comment l'habileté mathématique des sujets influence la façon dont les hiérarchies de groupements sont construites. C'est la raison pour laquelle nous avons cru bon d'inclure dans les directives une phrase signalant aux sujets qu'il leur était permis de faire autant de groupes qu'ils le voulaient (Gliner, 1988; Schoenfeld & Hermann, 1982). Nous avons donc adopté la formulation utilisée par Silver (1979), à une petite différence près: à la fin des directives, au lieu de dire, "vous pouvez placer vos cartes en autant de groupes que vous le désirez", nous avons aussi ajouté, "vous pouvez placer vos cartes en autant de groupes ou sous-groupements que vous le désirez". En effet, lors des essais pratiques pré-expérimentaux, nous avons demandé aux sujets s'ils avaient pensé à ajouter des sous-groupements supplémentaires à leurs groupements initiaux (et ainsi aller au-delà des directives). Certains ont indiqué qu'ils leur est arrivé de ne pas faire de sous-groupement parce qu'ils croyaient que cela n'était pas permis, alors que d'autres n'avaient pas pensé à ce moyen alternatif de refléter leur pensée. D'un autre côté, il est certain qu'ajouter les mots "sous-groupements" aux directives peut biaiser la performance des sujets. Si ces mots sont perçus comme une suggestion, les groupements obtenus ne reflètent pas la pensée de l'individu dans son état pur et sont biaisés par la perception d'une préférence de la part de l'expérimentatrice. Pour clarifier ce problème, nous avons demandé aux élèves de l'étude pilote, particulièrement à ceux qui avaient fait des sous-groupements lors de leurs catégorisations, si cette partie des directives les avaient influencé. Les sujets qui ont admis avoir été influencé par l'addition des mots "sous-groupements" ("faire autant de groupe et de sous-groupements qu'ils désirent") ont expliqué que lorsqu'ils formaient leurs groupes, il leur est arrivé de regrouper des cartes qui étaient semblables sous certains aspects, mais différentes sur d'autres et qu'ils ne savaient pas trop comment exprimer ces différences. Comme l'expérimentatrice avait mentionné la possibilité de faire des sous-groupes, ils ont décidé d'en faire, car cela leur permettait de vraiment grouper les problèmes de façon satisfaisante.

Omettre de mentionner la possibilité de mettre les cartes en différents sous-groupements peut aussi influencer les sujets. Un individu pourrait aussi se dire que la tâche ne consiste qu'à mettre les cartes en groupements et donc, dès le début, éliminer la possibilité de faire des sous-groupements de ses raisonnements. Une objection plausible serait de dire que, si

l'étudiant désire réellement faire des sous-groupements, il en fera ou demandera à l'expérimentatrice s'il peut en faire. Nous pensons que cela peut être vrai pour certains sujets, mais pas pour tous: cela dépend de la personnalité de chacun. Pareillement, certains sujets sont davantage affectés que d'autres si on leur dit "qu'ils peuvent faire autant de groupes et de sous-groupes qu'ils le désirent" et décident d'en faire seulement pour plaire à l'expérimentatrice. Toutefois, si ces mots sont perçus comme une possibilité ("je peux faire un sous-groupe si je le désire") et non pas interprétés comme une demande ("je dois essayer de faire un sous-groupe"), cela ne devrait pas influencer la performance des sujets.

En résumé, on doit être conscient que, quelque soit le contenu des directives données par l'expérimentatrice, "faire autant de groupes que les sujets le désirent" ou "faire autant de groupes ou de sous-groupements que les sujets le désirent", les sujets sont influencés par elles et que cela peut se refléter dans leur catégorisation. Nous avons décidé de rajouter les mots "sous-groupements" dans les directives parce qu'alors les sujets semblaient se sentir plus à l'aise de faire des sous-groupements quand ils le désiraient, sans toutefois se sentir forcé d'en faire. Pour mieux saisir l'influence de cette décision sur la performance des sujets, nous avons décidé de questionner les sujets sur l'influence de ces directives spécifiques à la fin de la tâche expérimentale et de s'en servir lors de l'interprétation des résultats.

Ajustement dans la Procédure Expérimentale

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, nous nous sommes basés sur les travaux de Chi, Feltovich et Glaser (1981) et par ceux de Chi, Glaser et Rees (1982) pour élaborer nos tâches expérimentales. Nous nous sommes plus spécifiquement inspiré de la méthodologie élaborée par Chi et al. (1982, pp. 48-49). Toutefois, dans la description de leur méthodologie, ces auteurs indiquent avoir enregistré les explications des sujets pour chaque groupement, mais ne donnent pas plus de précisions sur leur manière de faire. Ont-ils utilisé la méthode de pensée à haute voix ou ont plutôt demandé aux sujets d'expliquer leurs raisons une fois tous les groupements terminés?

Lors d'essais qui ont pris place avant la tâche pilote, on demanda aux sujets d'expliquer chacun des groupements de problèmes en utilisant la procédure de pensée à

haute voix, sans aucune interruption par l'expérimentatrice. Il fut presque impossible d'interpréter les résultats à cause du manque de précision des réponses qui pouvaient être interprétées de plusieurs façons. À cause de cela, nous avons décidé que l'expérimentatrice demanderait des clarifications et précisions aux sujets durant l'entrevue, chaque fois qu'elle le jugerait nécessaire.

Notre étude ne vise pas à connaître tout le processus qui amène les sujets à effectuer telle ou telle catégorisation, mais cherche simplement à identifier les systèmes de catégorisation utilisés et les raisons de leurs choix. Pour notre expérimentation nous avons donc choisi le rapport rétrospectif, c'est-à-dire que nous avons demandé aux sujets, immédiatement après qu'ils eurent terminé leurs groupements, les raisons sur lesquelles ils s'étaient basés pour faire leur catégorisation. Ce genre de méthodologie peut être choisie seulement si la plupart des informations nécessaires à la tâche sont présentes dans la mémoire à court terme (Ericsson & Simon, 1984).

Ericsson et Simon (1984) mentionnent quelques des limites du rapport rétrospectif. Selon eux, le sujet pourrait se rappeler de structures de mémoires similaires, au lieu de celles créées par le processus cognitif qui vient d'être fini. De même, si un délai de temps se produit avant de retrouver l'information, le sujet pourrait confondre deux opérations effectuées de façon rapprochée dans le temps. Selon les mêmes auteurs:

From general research on recall, we know that ability to recall specific events—especially with detailed information—deteriorates rapidly with time (see Cannell & Kahneman, 1968). Recall depends very much on the availability of retrieval cues. [...] If the experimenter specifies the relevant time period and particular type of events to be recalled, recall increases considerably (e.g., Biderman, 1967).
(p. 45)

Pour la présente étude, les sujets savaient à l'avance qu'on ne leur demanderait pas d'expliquer toutes les pensées et processus cognitifs qui les ont amenés à faire leur catégorisation, mais qu'on insisterait seulement sur la raison finale. Conséquemment, ils n'avaient pas autant d'efforts à faire au niveau du rappel d'informations de la mémoire. De plus, le délai d'attente entre la fin de la formation de chaque groupement et leur explication a été minimum parce que les problèmes étaient pigés au hasard, un à un, et qu'il fallait un certain temps avant de réaliser quels groupements de problèmes étaient possibles. Étant donné que jusqu'à la complétion des tâches, les sujets devaient évaluer

quel groupement convenait le mieux à chaque nouveau problème, les mécanismes de mémoire étaient constamment réactivés.

Une des difficultés liées à l'emploi, dans notre étude, du rapport rétroactif par les sujets, est que comme ces derniers devaient expliquer chaque groupement l'un après l'autre, il leur devenait plus difficile de se souvenir des raisons expliquant les derniers groupements en liste. Ce problème fut toutefois atténué par le fait que les groupements de problèmes étaient constamment sous les yeux des sujets et que ces derniers pouvaient y référer en cas d'oubli. L'expérimentatrice pouvait aussi leur rappeler certains éléments dits antérieurement. Enfin, au cours des différentes tâches, les sujets pouvaient, s'ils en manifestaient le désir, effectuer des changements à leurs groupements. Lors des analyses nous n'avons considéré que les derniers changements faits aux groupements.

Présence de Différentes Méthodes de Catégorisation

Grâce aux résultats de l'étude pilote, nous nous sommes assurés que la quantité de problèmes utilisée pour les tâches expérimentales était adéquate: le nombre de groupements et de sous-groupements variait selon les sujets, ainsi que les raisons données pour catégorisation et les explications s'y rapportant.

Tâches Expérimentales

Directives Préliminaires

Nous avons expliqué aux sujets qu'il n'y avait ni bonnes ni mauvaises réponses et que nous voulions connaître comment chaque individu pense lorsqu'il est confronté à des problèmes mathématiques. Nous avons ajouté que les problèmes étaient du niveau secondaire et que conséquemment ils ne devraient avoir aucune difficulté à réaliser les tâches. De plus, nous les avons rassuré sur la confidentialité des résultats et sur le fait que l'enregistreuse présente durant l'entrevue n'était là que pour s'assurer que rien de l'entrevue ne serait perdu. Nous leur avons ensuite expliqué qu'il y aurait trois étapes majeures dans l'entrevue, une tâche d'entraînement, des tâches expérimentales et une période de discussion. Les sujets devaient, après chacune des tâches, expliquer leurs groupements en identifiant les cartes contenues par chacun de ces derniers, à l'aide des numéros inscrits sur chaque problème mathématique. Nous avons finalement ajouté qu'il

n'y avait aucune limite de temps pour compléter les tâches et qu'ils pouvaient faire autant de groupements ou de sous-groupements qu'ils le désiraient.

Les sujets n'avaient pas le droit d'avoir de crayon et donc ne pouvaient pas vraiment résoudre les problèmes. Par contre, si au cours de leurs explications ils sentaient le besoin de faire des changements dans leurs groupements cela était permis. Pour chaque sujet et chacune des tâches l'expérimentatrice prenait tous les groupements en note ainsi que l'essentiel des raisons correspondantes.

Matériel Utilisé Durant l'Expérimentation

Nous avons enregistré toutes les entrevues afin d'en avoir le contenu verbatim. Nous avons utilisé l'enregistreuse pour toute la durée de l'expérimentation, y compris la tâche d'entraînement, afin que les sujets s'habituent à la présence de l'appareil.

Nous avons présenté aux sujets, lors de la tâche d'entraînement, un sac contenant trente cartes où étaient écrits des séries de lettres dans différents ordres. Les trente séries de lettres furent remplacées par les trente problèmes mathématiques lors des tâches expérimentales.

Tâche d'Entraînement

La tâche pratique est en tous points similaire à la tâche expérimentale sauf que les cartes à classer ne sont pas des problèmes mathématiques, mais des suites de lettres placées dans des ordres différents (annexe 3). L'utilisation de cette tâche visait à diminuer le stress apporté par la situation expérimentale, à s'assurer que les sujets comprenaient bien ce qu'ils avaient à faire et à donner aux sujets l'occasion de s'exercer à expliquer leurs groupements pour ne pas que cela interfère pas avec la bonne marche des tâches expérimentales (Ericsson & Simon, 1984).

Directives des Tâches Expérimentales

Cette expérimentation se divise en trois tâches expérimentales:

- tâche 1: Les sujets devaient grouper les trente problèmes selon leur structure mathématique.
- tâche 2: Une fois les groupes établis, les sujets devaient les comparer afin d'indiquer les similarités entre ces derniers.

tâche 3: Dans cette dernière tâche les sujets avaient la possibilité de subdiviser leurs groupes initiaux (tâche 1) s'ils trouvaient cela approprié.

Après chacune des tâches, l'expérimentatrice a demandé aux sujets d'expliquer les raisons pour lesquelles ils avaient mis les problèmes dans les groupements choisis. À noter que notre étude a les tâches 2 et 3 inversées par rapport à celle de Chi, Glaser et Rees (1982), diminuant un peu notre pouvoir de comparaison avec cette dernière. Nous avons pris cette décision d'inverser les étapes lors des essais préliminaires (avant l'étude pilote), alors que les sujets tendaient à davantage considérer les groupes en entier (plutôt que seulement les sous-groupements) lors de la tâche "similarités entre les groupes" si cette dernière était placée en seconde plutôt qu'en troisième place.

Directives de la tâche 1.

In this bag, there are 30 cards. Each card has one mathematical problem on it. As in the practice task, you are to pick one card at a time and read it. I want you to put these cards into groups according to the mathematical structure you see in the problems. You can divide the cards in as many groups or subgroups as you want. At the end, I will ask you to explain to me the basis on which you grouped the problems. Remember that there is no time limit to do this task, so just go at your own pace, and there are no right or wrong answers.

Une fois la tâche terminée nous leur avons demandé: "Can you explain to me the basis on which you put the problems together?"

Directives de la tâche 2.

I know you just grouped the problems according to the differences you were seeing among the groups, now, I would like you to see if you could find any similarities among the groups you just made. Again there is no right or wrong answer and there is no time limit.

Une fois la tâche terminée nous leur avons demandé: "Can you explain to me the basis on which you put the groups together?"

Directives de la tâche 3.

Now, take each group of problems individually and I want you to further divide it if you can. After you finish the task, I will ask you to describe your reasons for your subdivisions, as you did in the first part of the task. Remember that there is no time limit to this and that there are no right or wrong answers.

Une fois la tâche terminée nous leur avons demandé: "Can you explain to me the basis on which you subdivided the categories?"

Explication des Groupements

Comme nous l'avons expliqué précédemment (sous-section "ajustement de la procédure expérimentale" dans la section "étude pilote"), l'explication associée à chacun des groupements s'est faite de façon rétrospective à chaque tâche, immédiatement après avoir regroupé ou divisé les problèmes de cette dernière. Si les explications fournies manquaient de clarté, l'expérimentatrice posait des questions pour éclaircir le tout et pour assurer une juste analyse des résultats. Finalement, les sujets étaient autorisés à modifier leurs groupements s'ils le désiraient, à n'importe quel moment de la tâche expérimentale, à condition d'expliquer les raisons de ces changements à l'expérimentatrice.

Questionnaire Final

Comme nous l'avons mentionné plus tôt, chaque entrevue se terminait avec un questionnaire (annexe 5) dont les objectifs étaient de permettre aux sujets (a) d'exprimer leur satisfaction face au système de catégorisation qu'ils avaient bâti et (b) d'indiquer les changements qu'ils auraient peut-être aimé faire. Ce questionnaire a également permis à l'expérimentatrice d'évaluer chez les sujets (c) le niveau de compréhension des directives et des tâches expérimentales, (d) de même que l'influence des directives telles que formulées sur leur performance. Finalement, (e) il a permis de recueillir les impressions générales et commentaires de tous. Les réponses à ce questionnaire seront examinées dans des travaux ultérieurs.

Présence d'Erreurs Non Intentionnelles dans Quatre Problèmes

Malgré toutes les précautions prises pour éviter que des erreurs s'introduisent dans les problèmes (révision des problèmes par l'enseignant des élèves, pré-test avec un expert) des erreurs se sont glissées dans quatre des trente problèmes soit les numéros 8, 23, 26 et 29. Comme nous avons découvert ces erreurs au cours de l'expérimentation, il n'a pas été possible de les corriger. Toutefois, nous avons pu en tenir compte dans la construction de notre système de codification, en assignant le code SP aux sujets capables de reconnaître de telles erreurs (voir la description de la catégorie "Solution Precise").

Développement du Système de Codification

Transcription et Segmentation des Protocoles

Nous avons d'abord transcrit littéralement les verbalisations enregistrées. Les verbalisations de l'expérimentatrice ont été marquées de la lettre "E" et celles des sujets, de la lettre "S". Nous avons segmenté le texte ainsi obtenu en clauses pour permettre une codification détaillée des protocoles et s'assurer que chaque idée serait prise en considération par le codeur. La procédure de segmentation utilisée correspond à celle développée par Halliday (1967a; 1967b; 1968) et par Winograd (1972). Dans ce genre de système de segmentation, un verbe conjugué sert habituellement à identifier les clauses. Toutefois, il y a quelques exceptions à cette règle générale. Par exemple, en présence de certains mots-liens, deux propositions doivent être considérées comme un seul segment:

Ex.: "But I would perhaps put it in a separate category if there were more questions to choose from."

"It makes no differences as to whether the card has a picture on it."

"There are many possibilities whereas in the true/false [question], they give you a small choice."

"Because of the circle. The origin of circle, which is simpler by itself."

Nous avons numéroté chaque segment, puis placé chacun sur une ligne différente. Les verbalisations incomplètes ou incompréhensibles ont été mise entre crochets "[]" et n'ont pas été codées, conformément aux règles expliquées dans Dillenger (1987).

Pour s'assurer que les protocoles avaient été correctement segmentés, nous avons soumis 3 protocoles à un test de fidélité inter-juges. Un résultat de 85% fut obtenu.

Identification des Catégories Générales

La tâche de codification a été exécutée en deux étapes. D'abord, nous avons considéré les données d'un point de vue global, en différenciant les segments selon trois catégories générales: (a) commentaires relatifs à l'identification et à l'organisation des problèmes ou groupes de problèmes "OR", (b) commentaires non pertinents à l'étude "O" et (c) commentaires indiquant ou se rapportant aux raisons des catégorisations "R". Une fois cela fait, nous avons examiné plus en profondeur les segments identifiés comme raison de la catégorisation "R". Cet examen constitue un des points centraux de la présente étude.

Identification des Problèmes et Verbalisations sur l'Organisation des Problèmes "OR"

Lors de la tâche expérimentale, les sujets devaient lire à haute voix les numéros correspondant aux problèmes dont ils étaient en train de parler. Par exemple, dire "Ceci est le groupe avec #3, #5 et #6." Une telle énumération des problèmes d'un groupe fait partie de la sous-catégorie générale *identification des problèmes*.

Les sujets pouvaient faire autant de groupements ou de sous-groupements qu'ils le désiraient. Toutefois, comme les raisons de catégorisation varient d'une personne à une autre, les groupements en résultant sont aussi différents. Les segments qui reflétaient l'organisation des groupes (par exemple, identifier si un groupe est formé de plusieurs sous-groupements ou s'il est similaire à d'autres), correspondent à la sous-catégorie générale *organisation des problèmes*. Ex.: "Le groupe avec #9, je le diviserais en trois sous-groupements."

Autres Problèmes "O"

Les segments qui n'entrent dans aucune des deux autres catégories générales font partie de cette catégorie. Il peut s'agir de verbalisations de planification (ex.: "Je vais d'abord parler de ce groupe, puis je parlerai de celui-ci"), de la répétition d'une réponse à la demande de l'expérimentatrice, d'une confirmation après une question de l'expérimentatrice ou de tout autre commentaire qui n'est ni relié à l'organisation ou l'identification des problèmes et groupements, ni aux raisons associées aux catégorisations.

Raisons Associées aux Catégorisations "R"

Après chacune des trois tâches expérimentales (groupements initiaux, similarités et sous-divisions), les sujets devaient expliquer en quoi les problèmes qu'ils avaient regroupés ensemble étaient similaires. Les commentaires textuels tirés des segments de la division générale "R", contiennent tous des informations sur les raisons qui ont amené chaque sujet à construire, diviser et regrouper les groupements de problèmes, à chacune des tâches expérimentales. Ils incluent aussi la justification de chaque catégorisation. Il est à noter qu'un seul problème peut être considéré comme un groupement s'il en a été décidé ainsi par le sujet.

Système de Codification Fondé sur les Raisons Associées aux Catégorisation

Tous les segments identifiés dans un premier temps comme raisons associées aux catégorisation, devaient, dans un deuxième temps, être soumis à un processus de codification plus précis, afin de déterminer la nature de ces raisons. Ce deuxième processus de codification représente l'essentiel de l'étude.

Nous avons construit notre système de codification en nous basant sur les résultats des recherches précédentes, incluant tous les types raisons données par les autres chercheurs (tableau 2).

Nous avons adapté ces catégories à nos problèmes en les détaillant et en ajoutant des exemples trouvés dans 9 des 24 protocoles. Huit nouvelles catégories ont également été conçues pour tenir compte de toutes les données observées dans les protocoles expérimentaux. Seize catégories ont donc été utilisées pour décrire les raisons de catégorisation, dont 4 sont des variantes de certaines des catégories; soit qu'elles possèdent des niveaux de conceptualisation plus bas ((LFT)) ou plus élevés (GMA+, SAB+ et SE+).

1- Laissés-Pour-Compte/de Reste (LFT — "leftovers")

Indications que le sujet ne se rappelle pas des bases sur lesquelles il a fait sa catégorisation ou bien, qu'il a mis les problèmes ensembles parce qu'ils semblaient n'avoir de place nulle part. *Cela doit être la motivation principale pour laquelle le sujet n'a pas groupé ces problèmes avec les autres groupes.* Habituellement, lorsque cette situation se présente, la personne n'a pas une idée a priori du groupement qu'il veut faire et procède par élimination.

Ex.: "I didn't find any other so it went all by itself."

"I wasn't really sure where 24 belongs."

"I put them together not because they have so much in common, but because they were left over from the group."

Les problèmes qui sont de reste parce qu'ils sont les seuls à posséder une certaine caractéristique ne doivent pas être mis dans cette catégorie. De plus il est important de ne pas confondre les réponses placées dans la catégorie LFT avec des "je ne sais pas" placés un peu partout dans les explications de certaines personnes. Ces dernières utilisent cette

expression par habitude ou pour montrer que l'explication qu'ils viennent de fournir est propre à eux, mais qu'ils ne sont pas sûrs de leur raisonnement.

Ex.: "You know, I don't know, I'm biased, when I see two dimensions, I think geometry."

Tableau 2

Définition des structures de codification

	Structures de surface	Structures profondes
Chartoff (1977)	- "Contextual setting" - "Comparison with a generic problem of the same type"	- "How the problems are solved."
Silver (1979)	- "Contextual details" - "Question form"	- "Mathematical structure."
Gliner (1988)	- "Pseudostructure (association based on the mutual presence of a measurable quantity such as weight, time and age)."	
Schoenfeld et Hermann: (1982)	- "A naive characterization of a problem based on the most prominent mathematical objects that appear in it (polynomials, functions, whole numbers) or a general subject area it comes from (plane or solid geometry, limits)."	- "Mathematical principles necessary for solution, as identified by a mathematician."
Chi, Feltovitch et Glaser (1981)	- "The object referred to in the problem (spring or inclined plane)." - "The keywords that have meaning in physics (center of mass, friction)"	- "Major physics principles or fundamentals; laws governing the solution of each problem (sometimes referred to as the solution method)."
Chi, Glaser et Rees (1982)	- "The physical configuration that involves the interaction of several objects component (a block on an inclined plane.)"	

2- Laissé-Pour-Compte/Oubli ((LFT) — "leftovers/forget")

Quelquefois le sujet ne se souvient pas d'un *nom* (ex.: d'un domaine), ou ne se souvient plus pourquoi il a mis une *carte* dans un certain groupe, même si ce dernier a une bonne raison d'existence; ces réponses devraient être mises dans cette catégorie, mais le codeur doit alors mettre le code de la catégorie entre parenthèses "(LFT)".

Ex.: "Those [problems] were examples. ... whereas the other ones were not actually examples, except for this one, which I don't know why I put it there."

3- Caractéristiques les Plus Évidentes (MPF — "most prominent features") (Chartoff, 1977; Chi, Glaser & Rees, 1982; Schoenfeld & Hermann, 1982; Silver, 1979)

Dans cette catégorie, le sujet n'interprète pas du tout l'information présentée par les cartes, il ne s'arrête qu'à ce qu'il voit. *Ici il est très important que le codeur vérifie le degré d'interprétation fait par le sujet en comparant l'information donnée par les problèmes avec ce que le sujet vient de dire.* Pour être dans cette catégorie la raison donnée pour qualifier la catégorisation doit seulement être basée sur la *reconnaissance des informations sur les cartes*. L'exemple suivant: "Those are graphs questions" (section 2-C), peut être codée dans cette catégorie *si et seulement si* les problèmes réfèrent clairement à des graphes (ex.: les mots "graphs" et "plane" écrits sur les cartes ou des graphes dessinés) et non pas à la méthode de solution; si c'est le cas, cela ne doit pas être codé dans la section MPF.

Le codeur doit faire attention de ne pas utiliser le code MPF pour qualifier les segments d'un sujet lorsque ce dernier cite un problème en exemple, dans le cadre d'une explication d'une autre catégorisation.

A- Verbalisation très vague et générale.

Ex.: "'cause these ones are all problems and you have to solve them."
"What they have in common is that they are all different."

B- Caractérisation d'un groupe de problèmes basée sur les objets mathématiques les plus évidents qui y apparaissent ou auxquels on fait allusion. (Chartoff, 1977; Chi, Glaser & Rees, 1982; Schoenfeld & Hermann, 1982; Silver, 1979).

Ex.: "equation of a line", "those are circle problems."

C- Catégorisation selon l'apparence générale de la question. Les problèmes ont été placés dans le même groupe à cause d'une caractéristique vague les décrivant tous ou

parce que leur formulation est similaire (données présentées de façon symbolique —avec des équations, ou de façon graphique —avec des graphes ou sous forme de problème écrit).

Ex.: "It's a very long question."

"All those have words in them."

"Those are graph questions" (voir le paragraphe explicatif au commencement de cette catégorie).

D- Caractérisation selon le genre de mots clés mentionnés dans les problèmes. (Chi, Glaser & Rees, 1982).

Ex.: "Those are sine problems."

E- Caractérisation dans laquelle un sujet répète la question des problèmes, soit en les reformulant ou en utilisant les mêmes mots que dans l'énoncé de ces derniers. (Chartoff, 1977; Silver, 1979).

Ex.: "You have to figure out the angle there."

"This is a question where you have to find the domain and range." (#4)

F- Catégorisation selon ce qu'on demande de faire dans le problème (de trouver, de prouver.

Ex.: "In all those questions you had to *find* something."

"Question where you have to prove something."

G- Catégorisation selon le genre de question.

Ex.: "multiple choice question."

H- Verbalisation faite par le sujet indiquant que la raison donnée pour un groupement l'a été simplement à cause de ce qui se retrouvait dans l'énoncé du problème.

Ex.: "C'est écrit sur le problème."

4- Pseudostructure (Ps) (Silver, 1979)

Association basée sur la présence de quantités mesurables comme l'aire, le volume ou les angles.

Ex.: "It's an area problem."

"They all dealt with time."

"I think, well here you have to find this length and that, the length of different things. I think it's the same for the other ones too."

5- Saisie imprécise (IU — "insight undefined")

A- Saisie imprécise et générale à propos de la nature du problème.

Ex.: "I mean they're more arithmetic."

"It's sort of everyday type of thing, sort of real life applications."

"But I mean the reason why I put 18 separately from 16 is that 16 is a natural graph of it you know."

"Because they're all problem solving —as my teacher would refer to them as— they're all fairly wordy, and they give you hypothetical instances."

"And that's an important part of the problem as far as I am concerned, the circle, the line."

B- Comparaisons vagues à propos de différents problèmes ou groupements.

Ex.: "But I felt there was enough in common, with the problems, that they belong together. More than I felt that they should be somewhat differentiated."

"It's almost like (my group called) problem solving, but they're shorter and smaller."

6- Domaines mathématiques généraux (GMA — "General Mathematical Content Area")

(Schoenfeld & Hermann, 1982)

A- Domaine mathématique général d'où les problèmes proviennent. *Il faut noter que le nom de ces domaines ne doivent pas être donnés explicitement dans le texte.* Ce sont les éléments de la question qui ont permis au sujet d'arriver à ces conclusions (ex.: les mots "sin" et "cos" pour dire "trigonométrie").

Ex.: "geometry", "analytic geometry", "trigonometry", "stuff pertaining to set theory", "functions", "algebra".

"It's just algebraic."

"These problems are essentially planar."

"They're two-dimensional stuff."

"Because (#4, #11) they deal with ordered pairs."

B- Identification du domaine d'où vient un problème particulier.

Ex.: "Number 27 is a good example of what classical geometry is."

C- Identification du domaine d'où un problème ou un groupe ne vient pas, au lieu d'indiquer de quel domaine il vient. Cette sous-catégorisation ne doit pas être confondue avec la catégorie "laissés pour compte/ne sais pas" où un sujet catégorise les problèmes ensemble seulement parce que ils ne vont pas dans d'autres catégories et non parce que le sujet voit qu'il y a quelque chose en commun.

Ex.: "Well I guess it's geometry sort of... It's not geometry though."

7- Explication des Domaines Mathématiques Généraux d'où Proviennent les Problèmes (GMA+ — "General Mathematical Content Area Plus")

Si en plus de nommer le domaine mathématique duquel les problèmes proviennent et le sujet explique ce qu'est le domaine en question ou sa conception de ce dernier, le code GMA+ devrait être donné. *Le "+" peut seulement être donné quand les explications données sont plausibles ou valides.*

Ex.: "OK, it's useful to use the x/y plane to graph things when you're dealing with the unknown, when you're not exactly sure what you're graphing, when you're dealing with variables."

"Une fonction est un cas particulier de relation."

"You think of classical geometry, you think of Euclid right, things that are perpendicular, things that cross another, uh, you know stuff like that."

"Because I consider functions of two variables to be geometry."

"Oh, an ordered pair is, uh, they're called, they're pairs because that is two things, and they're ordered. Because if I say xy , it's not the same thing as yx . And of course, relations are just a set of ordered pairs."

8- Référence à l'Enseignement (TEA — "reference to Teaching")

Ce code doit être donné lorsque le sujet reconnaît que la catégorisation a été influencée ou faite à cause de la manière dont on lui a enseigné les mathématiques. Cela doit être une référence explicite sur la façon dont il a appris les mathématiques à l'école.

Ex.: "They involve, like last year, that's the way we were taught in sequence with ..."

"The thing is, it has a lot to do with how it's taught..."

"In school we already learned the techniques to solve it."

"Like secondary one algebra, you know."

"One of those questions that comes early on a test, to warm you up."

"General purpose problems, like the problems people are asked in exercise."

9- Réflexions sur les Catégorisations (RonC — "Reflections on Categorization")

A- Le sujet parle de la façon dont il perçoit son propre processus de catégorisation et pourquoi il associe les concepts ensembles. Il décrit ses processus de pensée.

Ex.: "Probably because I associate in my mind equations and graphs, I always find it easier to work with equations when they deal with graphs."

"It's more, I would say, sort of a gut feeling, how do I place myself to start working with it."

"It's while I read the problems and I was thinking —oh this is neat— you know instead of saying -oh this is trivial."

"[It's graphs that aren't straight lines]. It's very vague."

"[But you also have to find the cosine ... more difficult]- [E: Why is it more difficult?]- Oh I was never good at cosines. It's only my, I'm projecting on this."

B- Commentaire évaluatif sur la force de la relation entre un problème ou groupe avec un ou plusieurs autres groupements.

Ex.: "It is arbitrary the difference between the two (groups)."

"It is a very fine line between the puzzles and this sort of standard problems."

"In fact in retrospect I would say this is a better division actually."

"I don't consider that an important enough reason to put it (the problem) in another group."

C- Verbalisation où le sujet reconnaît que ce qu'il vient de dire est sa propre façon de penser et que cela lui est relatif.

Ex.: "[C'est le cas par exemple du 33, du 7 aussi où il faut connaître ce que signifie les symboles qui sont là et faire une énumération] enfin je l'ai perçu comme ça."

10- Évaluation de la Méthode de Solution (SE — "Solution method/Evaluation")

A- Commentaire évaluatif *subjectif* sur la méthode de solution (par exemple, sur la difficulté à faire les problèmes).

Ex.: "easy/difficult," "simple," "straight forward," "challenging," "fun," "trivial."

"Subjectivement, il me semble que (le groupe) 3-a soit plus facile que 3-b à interpréter, grosso modo."

B- Commentaire du sujet sur sa propre habileté à résoudre un problème.

Ex.: "I can do this one, I'm pretty excited about that."

11- Évaluation Détaillée de la Méthode de Solution (SE+ — "Solution method/Evaluation Plus")

Si le sujet explique plus en détail son commentaire évaluatif, d'une manière telle qu'il démontre une compréhension claire et précise de la raison pour laquelle il a fait son commentaire évaluatif, le code SE+ devrait être donné. Le "+" peut seulement être donné quand l'explication donnée est plausible ou valide.

Ex.: "Il m'a semblé plus difficile en général de poser le problème." [E: Pourquoi?]

"Soit de la façon dont les questions étaient posées, ça c'est propre à moi évidemment. Soit par la quantité d'information donnée, OK ça peut être troublant qu'il y ait trop d'informations, euh... soit par le nombre d'idées à faire intervenir pour résoudre le problème."

"Pis ça je crois que c'est difficile parce que finalement on ne sait pas vraiment quels outils mathématiques utiliser au départ. Alors que dans le groupe deux, c'est ce que je voulais exprimer tantôt, dans le groupe deux, c'est clairement identifié. T'sé il y a déjà tous les symboles mathématiques qui concernent les problèmes qui sont déjà posés."

12- Méthode de Solution/Vague (SV)

A- Verbalisation très générale et indéfinie ou vague à propos de la méthode de solution ou des moyens de résoudre un problème. Ce code peut aussi être assigné lorsque le degré de profondeur de la réponse donnée n'est pas clair, à cause du manque de détails ou autres.

Ex.: "All I have to do like, solving a problem, like using variables."

"You'd draw a graph to be able to figure those out."

"I mean that would be a simple equation."

"Il y a la question 29 que j'ai mis là. Parce que la façon dont je l'interprète elle va là. C'est que il y a une équation à résoudre de ça."

"And this one would require mathematical computation."

"I put them together because they all deal with graphs. [E: When you say deal with graphs it was because... ?] They'd be simpler to do if you could do them all on a graph basis. It makes it far more concrete and easy to understand."

Pour faire partie de cette catégorie la raison donnée pour la catégorisation *ne devrait pas* seulement être basée sur la reconnaissance d'informations sur les cartes comme cela était dans la catégorie 2-C. Une telle réponse peut être codée dans la catégorie SV *si et seulement si* le sujet réfère à la méthode de solution, comme dans l'exemple mentionné plus haut: "They'd be simpler to do if you could do them all on a graph basis." Dans ce cas, le codeur doit être certain que le sujet ne réfère pas seulement à des objets proéminents sur les cartes (ex.: par exemple des graphes déjà dessinés sur les cartes), mais qu'il ajoute quelques réflexions à propos de la méthode de solution.

B- Verbalisation sur la méthode de solution précise mais fausse. Il se peut qu'une verbalisation précise soit donnée à propos de la méthode de solution (et devrait donc être mise dans SP), mais soit fausse ou mauvaise. À cause de cette fausseté, ces segments doivent être classifiés dans la catégorie SV.

Ex.: "Again in number 17, you're gonna need to use ... is it sine or cosine? You're gonna need your cosine law to find out the other side."

13- Méthode de Solution/ Habiletés ou Connaissances Prérequis (SAB — "Solution method/ Abilities Needed")

Verbalisations sur le genre d'habiletés qu'il faudrait avoir ou les connaissances qu'il serait nécessaire de posséder pour résoudre le problème.

Ex.: "It just takes logic to figure those out."

"This doesn't require logic as opposed to mathematical knowledge, more learning by memory."

"Because, you must know the idea of the angle of elevation, you have to have learned."

"I think 9 requires a bit more understanding of the set theory."

"You have to know how to plot that line."

14- Méthode de Solution/ Description Détaillée des Habiletés ou Connaissances Prérequis (SAB+: "Solution method / Abilities Needed —plus")

Si le sujet explique de façon plus détaillée pourquoi les problèmes requièrent cette connaissance ou habileté, le code SAB+ devrait être donné. Le "+" peut seulement être utilisé lorsque l'explication donnée est plausible ou valide.

Ex.: "Je les ai mis dans ce groupe là parce que c'est des numéros qui font appel simplement à une connaissance. Soit d'une définition, ... 19 c'est la connaissance d'une identité, numéro 16, c'est la connaissance d'une certaine fonction, on peut associer une certaine fonction à ce graphe là, le numéro 10, c'est la connaissance aussi d'une équation qui est reliée à un dessin, pour savoir si on connaît la chose. Même chose #12, c'est la connaissance d'une formule, #4, c'est la connaissance d'une définition, bon il y a une énumération qui est associée à celui-là... et finalement, 11 aussi c'est l'application, à mon avis, d'une définition."

15- Méthode de solution/précise (SP) (Chartoff, 1977; Chi, Glaser & Rees, 1982; Schoenfeld & Hermann, 1982; Silver, 1979)

A- Identification précise des éléments ou principes mathématiques nécessaires pour la solution. *Le genre de réponse donnée doit refléter une compréhension claire de la méthode de solution et doit être vraie* (Chartoff, 1977; Chi, Glaser & Rees, 1982; Schoenfeld & Hermann, 1982; Silver, 1979).

Ex.: "You have to solve (those problems) for a slope."

"Simultaneous equations, you have to solve for x."

"It's a very straight proportionality question."

"They're word problems and they don't really look like they have much to do with lines, but, when you solve them, you have to make, like the equations you'd made,

would be the equation of a line I think. So they'd be linear equations in those cases so."

"It would be directly pertaining to the definition."

"The bottom row is a problem that you only have to know the definition to work."

B- Identification incomplète des éléments mathématiques utilisée en conjonction avec le contexte. Identification brève, précise, mais incomplète d'éléments mathématiques (outils ou domaines) de la méthode de solution lorsque le contexte extérieur au segment nous permet de croire que le sujet a une compréhension claire de la méthode de solution.

Ex.: "Linear equation, one variable."

C- Réponse valide à un problème lorsque le problème est très simple.

Ex.: "This deals with whether a circle is a function or not, and it's not."

D- Habileté à percevoir les erreurs dans la présentation des problèmes. Il y avait des erreurs dans quatre problèmes: #8, #23, #26 et #29 (voir paragraphe explicatif à la page 27).

Ex.: "There is a definite problem with this problem. You can't increase the area by square centimetres!"

E- Compréhension claire des étapes de solution requises pour résoudre les problèmes.

Elles reflètent clairement la méthode de solution.

Ex.: "J'ai mis ensemble aussi là 29, 18, 15, 31, 32. Alors pourquoi, parce que tous les problèmes là ne sont pas directs. Bon premièrement ils demandent à être traduits en langage mathématiques, pis souvent la solution c'est pas, ne se fait pas juste dans une étape."

16- Saisie pénétrante (IP — "Insight Precise")

A- Saisie pénétrante et définie montrant une compréhension claire de la nature des problèmes et où ils se situent dans le processus d'apprentissage et d'enseignement.

Ex.: "When you get taught this stuff, like right at the beginning, you see it as totally separate and then they join. So that you start with functions and you think of that totally independently... And then you start working a lot with normals to plane ... so the two sort of join."

"(Dans ce groupement) on n'utilise pas ... la notion de fonction pour demander de comprendre ou de trouver la solution à un problème plus complexe, on vérifie tout simplement si une personne connaît ce qu'est une fonction."

B- Conscience et connaissance du sujet des bases de son propre système de catégorisation. Habileté à donner un aperçu général de ce système.

Ex.: "Tu sais j'ai pas choisis une catégorisation par domaine. Même s'il y a des choses d'un même domaine qui s'adonnent à se retrouver à la même place.... Donc tous les groupes sont susceptibles de contenir des questions relatives, par exemple, à la théorie des ensembles."

Codification

Étant donné la nature mathématique des tâches expérimentales et les différents degrés d'habileté des sujets, le codeur doit être capable d'évaluer la validité et le degré de profondeur des raisons données pour expliquer les groupements. D'abord, en codant les segments "raisons associées aux catégorisations", il doit absolument considérer les problèmes mathématiques sur lesquels ces derniers ont été basées. En effet, il est nécessaire de pouvoir déterminer si une information a été prise directement de l'énoncé du problème ou si elle est le résultat d'une certaine réflexion de la part du sujet. Ensuite, il doit être capable de différencier les raisons qui demandent un plus grand degré de conceptualisation ou de compréhension de celles qui en demandent moins, grâce à une bonne connaissance de contenu mathématique des problèmes.

Un enseignant de mathématiques et un mathématicien (niveau maîtrise) ont écrit toutes les solutions possibles à chacun des problèmes et ces solutionnaires ont servi de référence à l'expérimentatrice lors du codage des données et à un codeur indépendant lors de l'évaluation de la fidélité de la codification. L'expert mathématicien a de plus agi comme consultant pour tous les cas litigieux, ainsi que toutes les fois où l'expérimentatrice ne se sentait pas la compétence pour évaluer les réponses données.

Quelques verbalisations ne correspondent pas à une seule catégorie, mais ressemblent à plusieurs à la fois. Dans ces cas il a été décidé que le codeur devait placer la verbalisation dans la catégorie qui s'en rapproche le plus, à moins que les différentes catégories qualifient de façon équivalente la verbalisation sous analyse. Dans ce cas, il était possible de coder un segment avec plus d'un code.

Validité et Fidélité du Système de Codification

Validité

La validité de notre système de codification provient en partie du fait que ce dernier a été construit à l'aide de codes utilisés et testés dans des recherches antérieures (voir la description du système de codification): les catégories MPF — caractéristiques les plus évidentes, PS —pseudostructures, GMA —domaines mathématiques généraux et SP —méthode de solution/précise) portant sur les domaines des mathématiques et de la physique. Le fait que les mêmes catégories se retrouvent dans plusieurs études similaires justifie notre utilisation de ces dernières. D'autres catégories ont été conçues à partir des résultats de nos expérimentations et parmi celles-ci plusieurs sont des extensions de catégories communes à plusieurs études; elles les précisent et montrent qu'elles peuvent être utilisées à des degrés de maîtrise différents. Ainsi une compréhension plus complète des domaines mathématiques reliés aux problèmes (GMA), semble être GMA+ —quand le sujet explique sa conception du domaine en plus de le nommer. Une maîtrise imparfaite de la méthode de solution se manifeste par l'utilisation des catégories, SE —quand le sujet mentionne une évaluation subjective de la méthode de solution, SAB —habileté nécessaires ou connaissances requises pour solutionner le problème ou SV —approximation de la méthode de solution (vague). Finalement, une bonne compréhension et maîtrise de la méthode de solution semble prendre d'autres formes que celle décrite par la catégorie SP; par exemple par l'utilisation des catégories SE+ —quand le sujet explique d'une façon claire et précise son évaluation de la méthode de solution ou SAB+ —explication détaillée des raisons pour lesquelles les problèmes requièrent tels habiletés ou connaissance. À notre connaissance, aucune autre étude n'a adopté la méthodologie de Chi, Glaser et Rees sur les catégorisations hiérarchiques (1982, étude 4) aux mathématiques. Le fait que, contrairement aux autres études du même genre, leur approche permet d'aller au-delà de la simple catégorisation des problèmes, explique en partie la découverte de nouvelles catégories explicatives et la détection de degrés intermédiaires de compréhension des problèmes. Ceci montre bien la nature exploratoire de la présente d'étude et le besoin de faire des recherches supplémentaires pour tester les

nouvelles catégories trouvées avec d'autres groupes de sujets, en mathématiques et dans d'autres domaines.

Pour assurer une plus grande validité à nos résultats, nous avons (a) questionné les sujets lors des tâches, au fur et à mesure que des clarifications étaient nécessaires, afin de préciser l'organisation de leurs groupements de problèmes et la nature des raisons données pour expliquer ces derniers et (b), interviewé les sujets à la fin de chaque rencontre pour évaluer à quel point la procédure expérimentale avait pu les influencer dans leurs catégorisations ou explications (annexe 5). Les questions à la fin des entrevues étaient les mêmes pour tous les sujets, toutefois celles posées durant les tâches étaient faites spontanément. Même si ces questions se limitaient à des précisions ou clarifications, il se peut qu'elles aient pu encourager certains sujets à discuter davantage de certains points, ce qu'ils n'auraient pas fait autrement.

Procédure suivie pour compiler les données servant au calcul du taux de fidélité du processus de codification des raisons données

Avant de décrire les taux de fidélité obtenus, il convient d'en décrire la procédure de calcul. Comme les codeurs avaient l'autorisation de donner plus d'un code au même segment, il est arrivé assez souvent que l'un des codeurs donne un seul code alors que l'autre en donne deux. Dans ces cas, nous avons seulement fait une comparaison entre le code unique et un des deux autres codes fournis par l'autre codeur; si les deux codeurs avaient assigné un code similaire au segment, c'est cette comparaison qui était prise en ligne de compte et nous ignorions alors le code supplémentaire du deuxième codeur. Si tous les codes étaient différents nous choisissons au hasard les codes à comparer.

Bien que l'on encourageait les codeurs à assigner un code pour chaque segment, ils avaient aussi la possibilité de donner un code global à un ensemble de segments s'ils le croyaient nécessaire. Par exemple, un premier codeur (#1) peut avoir assigné seulement un code global pour cinq segments, puis un peu plus loin dans le protocole, un code global plus des codes individuels pour deux des segments sous la tutelle du code global. Le deuxième codeur, quant à lui (codeur #2), a assigné dans les deux cas un code à chacun des segments. Dans cette situation, nous avons fait la comparaison entre un code global (codeur #1) et cinq codes individuels (codeur #2), c'est-à-dire que le code global du

codeur #1 était assigné à chacun des segments sous sa tutelle, permettant ainsi une comparaison avec chacun des segments assignés par le codeur #2. Lorsque un peu plus loin dans le protocole le codeur #1 a assigné des codes individuels à deux des segments (segments b et c par exemple), ces codes individuels se sont ajoutés au code global pour les deux segments impliqués (b et c) pour faire une comparaison segment par segment.

Taux de fidélité

Nous avons calculé le taux de fidélité en utilisant la formule proposée par Krippendorff (1980) pour comparer les codes donnés par l'expérimentatrice avec ceux d'un codeur indépendant, pour quatre des protocoles. Cette évaluation s'est faite à trois niveaux. Nous avons d'abord évalué si les codeurs identifiaient les codes généraux de façon similaire, i.e., les segments relatifs aux raisons de catégorisation "R", les segments relatifs à l'organisation des groupes et des cartes "OR" et les autres segments "O". Nous avons obtenu un taux de fidélité de 84%. Nous avons ensuite vérifié plus spécifiquement quelle proportion des segments identifiés comme "R" ou raisons de catégorisation par au moins un des codeurs ont obtenu un accord parfait entre codeurs et ce qui a résulté en un taux de fidélité de 76%. Un coefficient alpha de 60% a finalement été obtenu pour la comparaison des codes rattachés aux catégories spécifiques des raisons pour catégorisation. Il est à noter que pour cette troisième étape tous les segments utilisés pour la comparaison devaient avoir été préalablement identifiés comme raisons données pour justifier la catégorisation ("R") par les deux codeurs (étape 2).

Le faible taux de fidélité obtenu pour les raisons de catégorisation appelle forcément à la prudence quant aux conclusions que l'on peut tirer face aux résultats obtenus. Plusieurs possibilités peuvent expliquer cet état de faits. D'abord, il est possible que le codeur indépendant n'ait pas reçu suffisamment d'entraînement avant le codage final. Le système de codification est très complexe et les différences entre les codes sont quelquefois très fines. La totalité des consignes se rapportant au processus de codification n'ont peut-être pas été toutes explicitement et clairement indiquées. En effet, lors de l'entraînement du codeur, l'expérimentatrice a fourni plusieurs de ces consignes par écrit, mais quelquefois, lors de l'explication d'une catégorie, certaines précisions n'ont été faites qu'oralement, spécialement concernant les différences entre les catégories. Avec la quantité de nouvelles

informations reçues par le codeur il est possible qu'il ait oublié quelques-unes de ces consignes. Il aurait été important que l'expérimentatrice les note pour les incorporer à même les explications des codes. Finalement, après que le codage final ait été terminé, aucune rencontre de discussion n'a été faite avec le codeur indépendant afin d'atteindre un accord sur les codes non similaires. Nous avons pris cette décision parce que le fait de convaincre l'un des parties à changer sa codification amène à une mesure moins valide (Krippendorff, 1980). Néanmoins, même si un accord sur les codes n'était pas recherché, de telles rencontres auraient pu nous éclairer sur les causes des différences et aider à clarifier les définitions des codes.

Le faible taux de fidélité obtenu indique peut-être des failles dans le processus ou le système de codification. Par exemple, le fait que les codeurs avaient le droit de coder globalement tout un groupe de segments au lieu de segment par segment, a peut-être entraîné plus de variabilité parce qu'un codeur a pu considérer un ensemble de segments individuellement alors que l'autre globalement. Par exemple, dans un cas, le codeur indépendant a groupé une vingtaine de segments sous le même code, IP, alors que l'expérimentatrice a codé tous les segments un à un avec d'autres codes.

Par rapport au système de codification comme tel, une analyse détaillée des codes attribués par les différents codeurs nous permet de voir que les définitions de certains codes ne semblent pas avoir été claires, bien définies ou bien comprises. D'abord, pour plusieurs catégories le nombre de désaccords entre codeurs dépasse de beaucoup le nombre d'accords pour leur assignation à des segments. De façon globale, le code SV semble être le code se distinguant le moins des autres obtenant dans 36 cas un accord parfait entre deux juges, mais dans 89 cas des désaccords (dont 31 fois en comparaison avec le code MPF et 18 fois en comparaison avec le code IU). Pour le code IU, 43 cas d'accord parfaits mais encore une fois 89 cas de désaccords (dont 38 avec MPF, 18 avec SV et 11 avec IP). La catégorie RonC ayant 8 cas de d'accords et 19 de désaccords (dont 8 avec IU). Le code SP où seulement 3 accords et 16 désaccords (dont 11 avec SV). Enfin pour la catégorie IP (saisie pénétrante), qui au cours des quatre protocoles n'a jamais été attribuée de la même façon par les deux codeurs, c'est-à-dire en même temps pour un même segment et, qui plus est, a été principalement confondue avec les catégories MPF (12 cas) SV (10 cas) et IU (11 cas). Il est à noter que la catégorie MPF s'oppose

presque directement à la catégorie IP de par sa définition. Les codes SAB+ et GMA+ n'ont jamais été utilisé par le codeur indépendant.

Une troisième explication au faible accord entre codeurs est que le codeur indépendant ait manqué d'attention lors du processus de codification. En fait, nous n'émettons cette hypothèse que parce que dans un des protocoles codés par ce dernier, 3 segments ont été laissés avec des points d'interrogation ce qui nous laissent croire que le codeur avait l'intention de revenir sur ce protocole et qu'il ne l'a pas fait. Dans une des sections où un point d'interrogation est présent vingt codes IP ont été placés désignant toute une section de segments; peut-être qu'après révision de cette section certains des codes auraient été changés ce qui aurait modifié le taux de désaccords.

En examinant toutes ces possibilités, il semble plausible de croire que c'est la combinaison de toutes ces hypothèses qui a influencé le résultat obtenu quant à la fidélité. De façon générale on observe que plus les sujets sont habiles, plus leurs protocoles correspondent à des catégories impliquant des raisonnements complexes et plus les taux de désaccords entre codeurs sont élevés pour l'assignation des segments à des catégories. Ceci peut être expliqué par le fait que l'assignation des catégories de plus haut niveau est plus difficile, car le codeur doit s'assurer que plusieurs des prérequis sont présents avant de choisir ces catégories, de plus, il doit parfois faire des inférences basées sur le contexte écrit du segment examiné.

Une des solutions souvent suggérée pour augmenter la fidélité est de regrouper ensemble les catégories les plus similaires et de recommencer les analyses (Krippendorff, 1980). Dans notre cas un regroupement des catégories SV et IU avec MPF seraient sans doute approprié. Également, la catégorie IP gagnerait à être précisée ou éliminée. Pour le cas des segments où les deux codeurs ont donnés des codes tout à fait opposés, par exemple IP et MPF, nous avons présenté ces segments au mathématicien qui avait servi de référence lors de la construction du système de codification et de son application et lui avons demandé de refaire la codification de certaines parties des protocoles. Des différences assez importantes ont encore une fois été trouvées en la comparant à la codification fournie par l'expérimentatrice. La comparaison avec celle initialement accomplie par le juge indépendant a montré que les deux codifications différaient quant aux codes spécifiques assignés, mais se ressemblaient quant au degré de complexité des

codes choisis pour décrire les segments. L'expertise du juge indépendant et du mathématicien semble donc leur permettre de prendre une perspective différente et plus juste que celle de l'expérimentatrice, lors de l'évaluation des raisons données par les sujets pour expliquer leurs groupements. Conséquemment, nous pouvons conclure que la codification de protocoles tels que ceux obtenus dans cette étude aurait avantage à être accomplie par des experts du domaine.

Analyse

Étant donné la nature exploratoire de la présente étude et le fait que nous utilisons des sujets humains, il peut être difficile de déterminer avec précision les différences entre les groupes-habilité (donc complexes), surtout lorsque certaines caractéristiques semblent chevaucher les groupes. L'approche en a donc été une où nous avons examiné nos deux groupes-habilité "extrêmes" (moyens et experts), pour ensuite essayer de situer les sujets de grande habileté par rapport aux deux autres. Des caractéristiques possédées par un groupe-habilité donné ou par certains de ses membres, mais complètement ignorées par les deux autres groupes-habilité constituent certainement de bonnes évidences que ces caractéristiques sont vraiment propres à ce premier groupe-habilité, toutefois d'autres caractéristiques possédées à un degré moins exclusif peuvent être aussi pertinentes et méritent également d'être examinées.

Les analyses ont porté sur deux aspects distincts des groupements des différents groupes-habilité: (a) les caractéristiques externes des groupements et (b) le contenu explicatif associé à chacun des groupements de problèmes.

Caractéristiques Externes des Groupements

Nous avons d'abord examiné les caractéristiques externes des groupements de problèmes: le nombre de niveaux hiérarchiques utilisés, le nombre de groupements faits et leur inter-organisation, la largesse des groupements de problèmes, le temps pris par les sujets pour catégoriser les problèmes. Nous avons également relevé certains groupements typiques, représentatifs de la variabilité observée dans chacun des groupes-habilité. Pour ce faire, nous avons comparé chacun des groupes-habilité (moyens, grande habileté et experts) les uns aux autres, selon chacune des caractéristiques et, s'il y avait lieu, à chacune des tâches expérimentales.

Contenu Explicatif Associé à Chacun des Groupements de Problèmes

La deuxième part d'analyses ajoute un élément qualitatif à notre étude. Elle a pour but de comparer les contenus explicatifs associés à chacun des groupements et donnés par les différents sujets. Pour ce faire, nous nous sommes servi du système de codification pour illustrer les aspects des problèmes mathématiques qui retiennent l'attention des différents sujets lorsqu'on leur demande de classer les problèmes selon leur structure mathématique. Des analyses statistiques nous ont permis de comparer les différents groupes-habileté.

CHAPITRE 3

RÉSULTATS ET DISCUSSION

Caractéristiques Externes des Groupements

Cette première série d'analyses décrit de façon quantitative les caractéristiques inhérentes aux groupements de problèmes.

Organisation Hiérarchique des Groupements de Problèmes

La particularité des tâches expérimentales que nous avons utilisées est que celles-ci vont au-delà de la simple catégorisation des problèmes et permettent aux sujets d'organiser leurs groupements de manière hiérarchique. Il devient donc important de déterminer, en utilisant les indications fournies par les sujets, si les groupements conçus par nos groupes-habilité (habileté moyenne, grande habileté et experts) contiennent des niveaux hiérarchiques semblables; la figure 1 illustre ce que nous entendons par niveau hiérarchique et décrit la façon dont nous avons quantifié ces derniers.

Avant d'expliquer les raisons de leur catégorisation (raisons sur lesquelles les sujets se sont fondés pour grouper les problèmes), les sujets devaient mentionner les numéros correspondant aux problèmes inclus dans chacun de leurs groupements, de même que décrire l'organisation existante entre les problèmes ou groupements de problèmes (ex.: présence de groupements, sous-groupements, problèmes communs à deux groupements et/ou ordre d'un groupement à l'autre). Grâce à ces descriptions nous avons pu représenter graphiquement les groupements de problèmes de chaque sujet et ainsi établir le nombre de niveaux hiérarchiques utilisés par chacun.

La figure 2 montre la fréquence d'utilisation de chacun des niveaux hiérarchiques en compilant, pour chacun des sujets de chaque groupe-habilité, la présence ou pas de groupements faits à chacun des niveaux hiérarchiques et pour l'ensemble des trois tâches expérimentales. On y remarque qu'à mesure que l'habileté mathématique des sujets croît, (a) ceux-ci emploient une plus grande variété de niveaux hiérarchiques et (b) utilisent des niveaux de plus en plus supérieurs de hiérarchie. Une ANOVA indique que les trois distributions sont significativement différentes ($\chi^2_{(2)} \text{ corrigée} = 9.6, p < 0.05$). Les sujets de grande habileté (GH) ressemblent beaucoup aux experts (E) quant à leur utilisation des

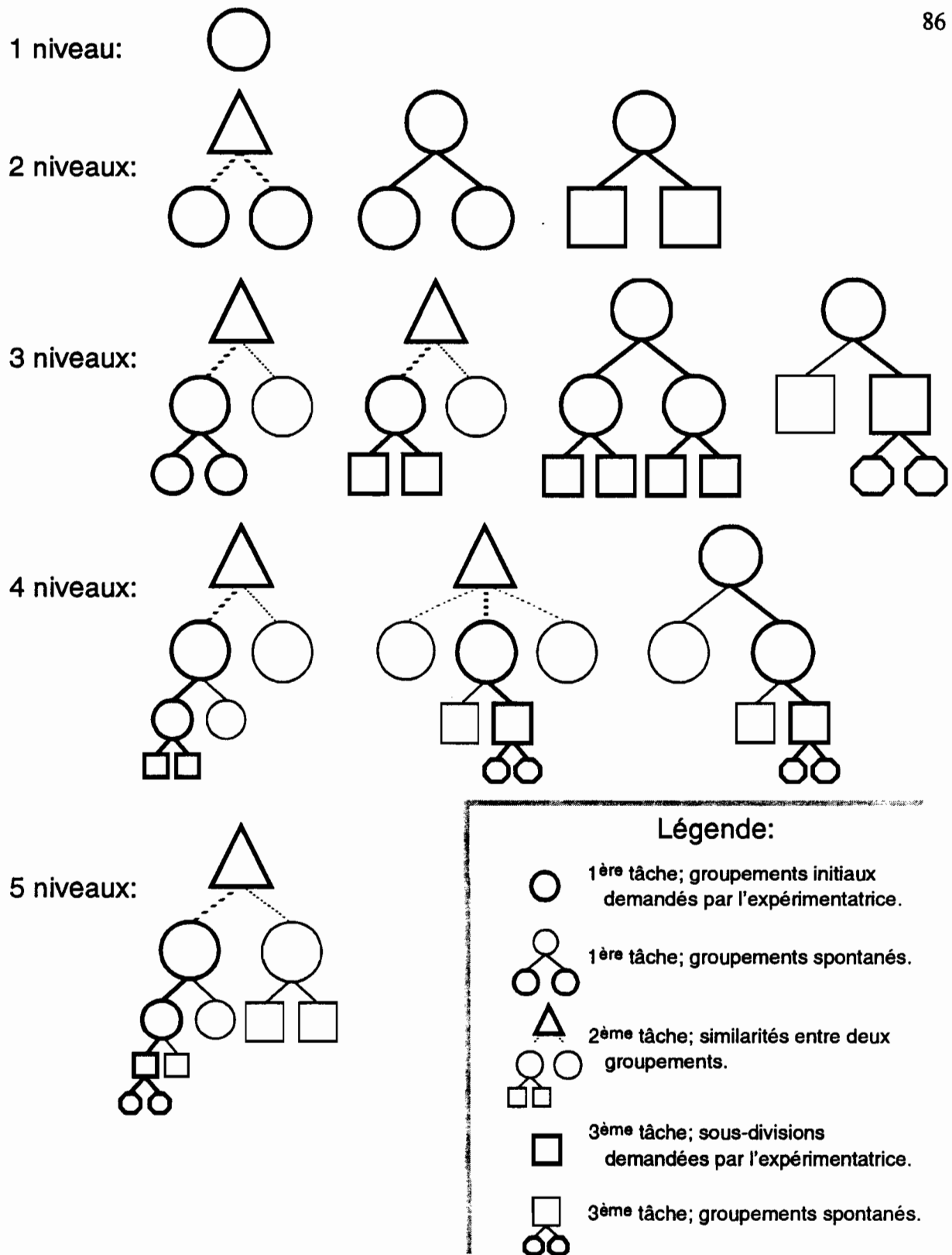


Figure 1: Représentation des niveaux hiérarchiques.

niveaux hiérarchiques (nombre moyen de niveaux hiérarchiques utilisés: 3.1 ± 0.2 et 3.2 ± 0.2 , respectivement; $Z = 4.0$; $p > 0.05$; Mann-Whitney U), leur usage des quatrième et cinquième niveaux hiérarchique est toutefois un peu moins important. La distribution des sujets d'habileté moyenne (HM) est significativement différente de celles des deux autres groupes-habileté (HM vs GH, $Z=2.6$, $p < 0.05$; HM vs E, $Z=2.8$, $p < 0.05$) pour deux raisons. D'abord parce qu'ils n'utilisent que les 3 premiers niveaux hiérarchiques; alors que la plupart des sujets de grande habileté et des experts vont au-delà du troisième niveau hiérarchique et utilisent jusqu'à 4 ou 5 niveaux de hiérarchie. Ceci est significativement plus faible que les sujets de grande habileté et experts (2.2 ± 0.2 ; $p < 0.05$ Mann-Whitney U). Ensuite, parce que la moitié de ces sujets moins habiles (4/8) ont conçu des groupements à un seul niveau hiérarchique. Par contraste presque aucun des sujets de grande habileté (0/8) et aucun des experts (1/8) n'ont formé de tels groupements (figure 2). De plus, chez les sujets de grande habileté et les experts, la majorité des individus ont utilisé des niveaux hiérarchiques de 4 ou plus (5/8 — grande habileté; 6/8 — experts). Ces résultats montrent la tendance des sujets de grande habileté et des experts à regrouper les problèmes selon une organisation hiérarchique plus complexe.

Organisation Selon l'Ordre Chronologique d'Enseignement

Certains experts se distinguent des sujets des deux autres groupes-habileté par la façon dont ils ont organisés les groupements de problèmes les uns par rapport aux autres. Trois des experts ont en effet placé les groupements selon l'ordre chronologique d'enseignement qu'ils choisiraient s'ils avaient à enseigner les mathématiques qui se rapporte à ces problèmes. Ce genre d'organisation reflète sans doute le fait que les sujets experts sont des universitaires gradués pour qui le contenu mathématique des problèmes correspond davantage au calibre d'étudiants moins expérimentés auxquels ils pourraient enseigner. Ces experts sont comparés à des sujets qui viennent tout juste de terminer leurs études secondaires.

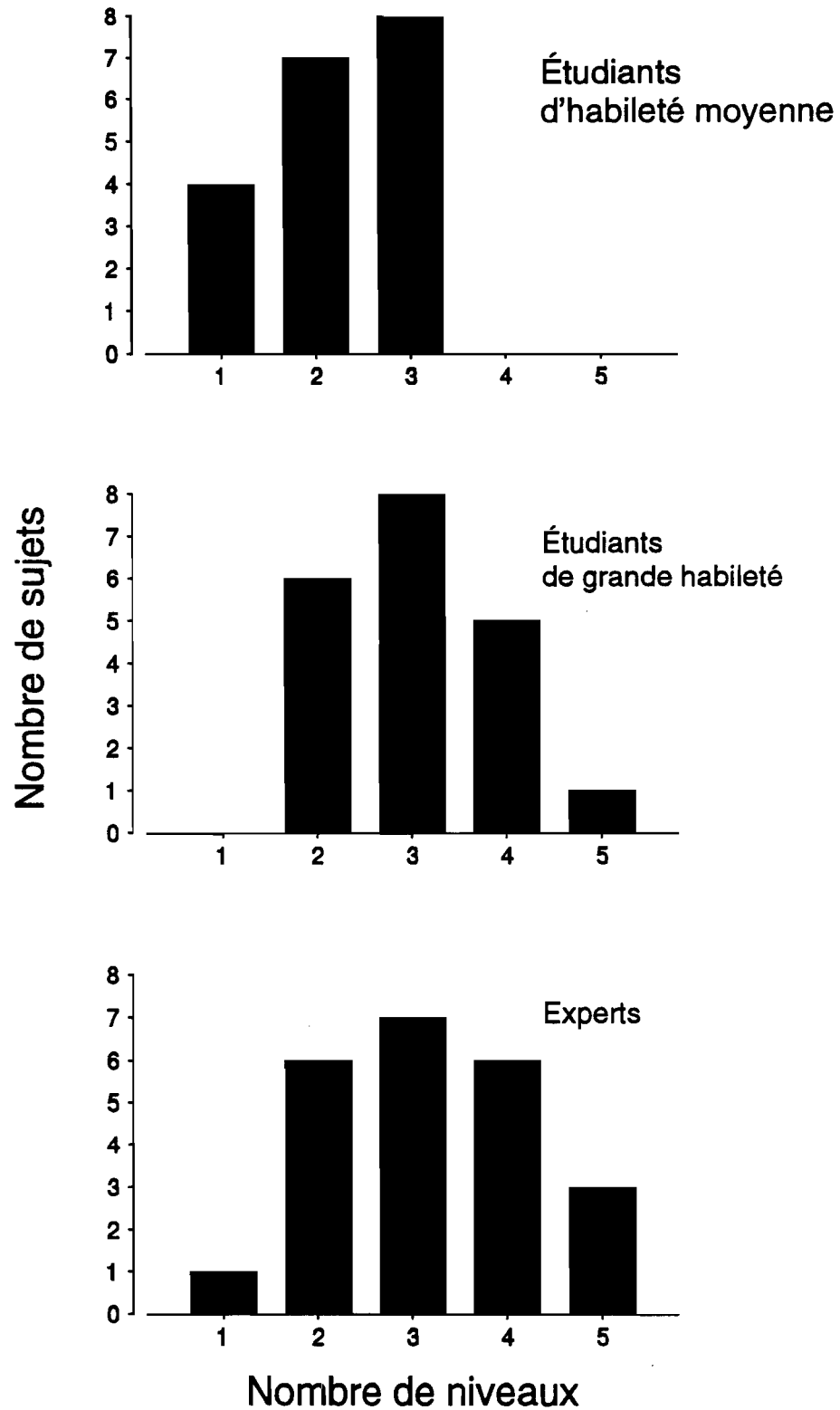


Figure 2: Niveaux hiérarchiques utilisés par les groupes de sujets lors des trois tâches expérimentales.

Nombre de Groupements

Cette section est divisée en deux parties afin de mettre en relief l'un des résultats obtenus; en plus de faire des groupements comme il était demandé dans les instructions (groupements demandés), certains sujets ont spontanément divisé davantage ces groupements demandés en sous-groupements (groupements spontanés). Nous traiterons donc séparément des caractéristiques de ces deux genres de groupements dans ce qui suit.

Groupements Demandés

Tâche 1 — groupements initiaux. De façon générale le nombre de groupements initiaux (groupements résultant de la première catégorisation) varie de façon similaire chez les experts et les sujets de grande habileté, allant de 3 ou 4 au minimum, à 10 ou 11 respectivement. Dans le groupe d'habileté moyenne, le nombre minimum de groupements est équivalent à celui des deux autres groupes-habileté, mais le nombre maximum de groupements utilisés est plus élevé, soit 17. Ce maximum n'a été utilisé que par un seul sujet (#20), les autres individus d'habileté moyenne employant un nombre maximum de groupements comparable à ceux des autres groupes-habileté.

La figure 3a montre la distribution du nombre moyen de groupements initiaux pour chaque groupe-habileté (HM: 9.0 ± 1.4 , GH: 7.5 ± 0.9 et E: 5.1 ± 0.8). Les sujets d'habileté moyenne ont utilisé un nombre significativement plus élevé de groupements que les experts ($Z=2.1$, $p < 0.05$; Mann-Whitney U; distribution uniforme $p < 0.05$; Kolmogorov-Smirnov Z). Ceci place donc les sujets de grande habileté en position intermédiaire entre les deux autres groupes-habileté pour le nombre de groupements initiaux. Une explication plausible au fait, qu'à la tâche 1 les experts créent moins de groupements de problèmes que les autres groupes-habileté, est que leur plus grande expérience leur permettrait d'avoir une vision plus globale des mathématiques et conséquemment de regrouper plus de problèmes sous un même type.

La moyenne générale (pour tous les sujets) du nombre de groupements initiaux utilisés est de 7.2 ± 0.7 (moy. $\pm$ E.S.M.). Celle-ci est comparable à la moyenne générale de groupements d'études précédentes (Chi, Feltovich & Glaser, 1981; Chi, Glaser & Rees, 1982), quoique un peu plus basse (7.2 comparé à 8.5). Cette différence peut être due au fait que les autres études ne comparaient que deux groupes, des novices et des experts.

En effet, ici nous incluons un troisième groupe de comparaison, les sujets de grande habileté, qui, comme on l'a vu précédemment, ont un nombre moyen de groupements moins élevé que nos sujets d'habileté moyen. Ceci fait donc baisser la moyenne générale. Il se peut également que le domaine de recherche choisi, les mathématiques au lieu de la physique, ait eu une influence.

Chi, Feltovich et Glaser (1981) dans leur étude sur la catégorisation de problèmes de physique indiquent un nombre équivalent de groupements pour leurs deux groupes de comparaisons, sujets novices et experts. Les auteurs ne semblent toutefois pas avoir fait de tests statistiques pour appuyer leur dire. Dans une étude subséquente impliquant une tâche de catégorisation hiérarchique, Chi, Glaser et Rees (1982: étude #4) réfèrent toutefois à certains sujets novices ayant obtenu "C" à leur cours de physique et qui se distinguent particulièrement des autres sujets d'habileté supérieure:

The tree structures of these two novices have three distinct characteristics that none of the other more skilled subjects exhibited. First, the initial groups (circular nodes) have a greater than average number of categories. (Eight categories is the average number derived from Study 2.) The second characteristic is that they either cannot make further discriminations (Novice R.R.), suggesting that their categories are already at the lowest level, or they make such fine discriminations (Novice J.T.) that each problem is a category by itself." (Chi, Glaser & Rees, 1982, p. 49)

Notons que dans leurs descriptions Chi et al. (1981, 1982) utilisent le mot "catégorie" pour référer aux groupements. Ici, le mot "catégorie" est réservé exclusivement aux différents types ou catégories de raisons données par les sujets pour expliquer leurs groupements — voir l'analyse du contenu explicatif relié aux groupements de problèmes.

La première caractéristique décrite par Chi, Glaser et Rees (1982) — un nombre de groupements au-dessus de la moyenne — pourrait assez bien s'appliquer à nos résultats. En effet, nos sujets d'habileté moyenne ont formé plus de groupements de problèmes que les experts. De plus, tout comme notre sujet #20 se distinguait des autres sujets d'habileté moyenne par le nombre de ses groupements (17), seulement certains des novices de l'étude de Chi et al. (1982) possédaient un nombre plus élevé de groupements. Le genre de groupements formés par notre sujet #20 semblent bien correspondre à la description du novice J.T. ci-haut dont les discriminations sont tellement fines que presque chaque problème correspond à un groupement. Toutefois, la ressemblance n'est pas parfaite. Dans les travaux de Chi et al. (1982), les novices employés étaient ceux qui possédaient

les résultats académiques les moins élevés, alors que, dans notre étude, le sujet #20 a reçu des notes académiques intermédiaire (niveau B). De plus, plusieurs autres membres du groupe d'habileté moyenne ont obtenu des résultats encore moins élevés que lui.

Comme nous l'avons indiqué plus haut, Chi, Feltovich et Glaser (1981) ne trouvent pas de différence entre leurs novices et leurs experts quant au nombre de groupements conçus lors de la catégorisation (qui correspond à notre tâche 1). Cette disparité avec nos résultats peut être due au fait que, dans l'étude de Chi et al. (1981), les auteurs n'ont considéré que les moyennes, alors que lorsqu'ils ont ajouté l'étude sur les catégorisation hiérarchiques (Chi, Glaser & Rees, 1982), ils ont adopté une approche plus descriptive.

Tâche 2 — similarités. Comme on peut l'observer dans le tableau 3, le nombre de similarités obtenues est équivalent pour tous les sujets. Toutefois il faut être prudent dans les conclusions à tirer de ces résultats car la nature des similarités décrites par chaque sujets reste encore à être analysée plus en profondeur (voir l'analyse du contenu explicatif). Les ressemblances observées ici ne sont peut-être que superficielles.

Tableau 3

Quantité de similarités trouvées (tâche 2).

Groupe-Habileté	Habileté moyenne ($n = 8$)	Grande habileté ($n = 8$)	Experts ($n = 8$)
Nombre de similarités (moyenne $\pm$ E.S.M.)	3.2 $\pm$ 0.9	5.5 $\pm$ 3.4	3.8 $\pm$ 1.7

Tâche 3 — redivision des groupements. Encore une fois lors de cette tâche, les sujets de tous les groupes-habileté ont effectué un nombre semblable de redivisions à leurs groupements (Figure 3c). Et, comme c'est le cas pour la tâche 2 (similarités), il nous analyser les raisons données pour justifier ces catégorisations (voir section XX) avant d'émettre des conclusions définitives sur ces résultats.

Groupements Spontanés

La différence la plus marquée entre le groupe d'habileté moyenne et les deux autres groupes-habileté réside dans la conception presque généralisée de groupements spontanés

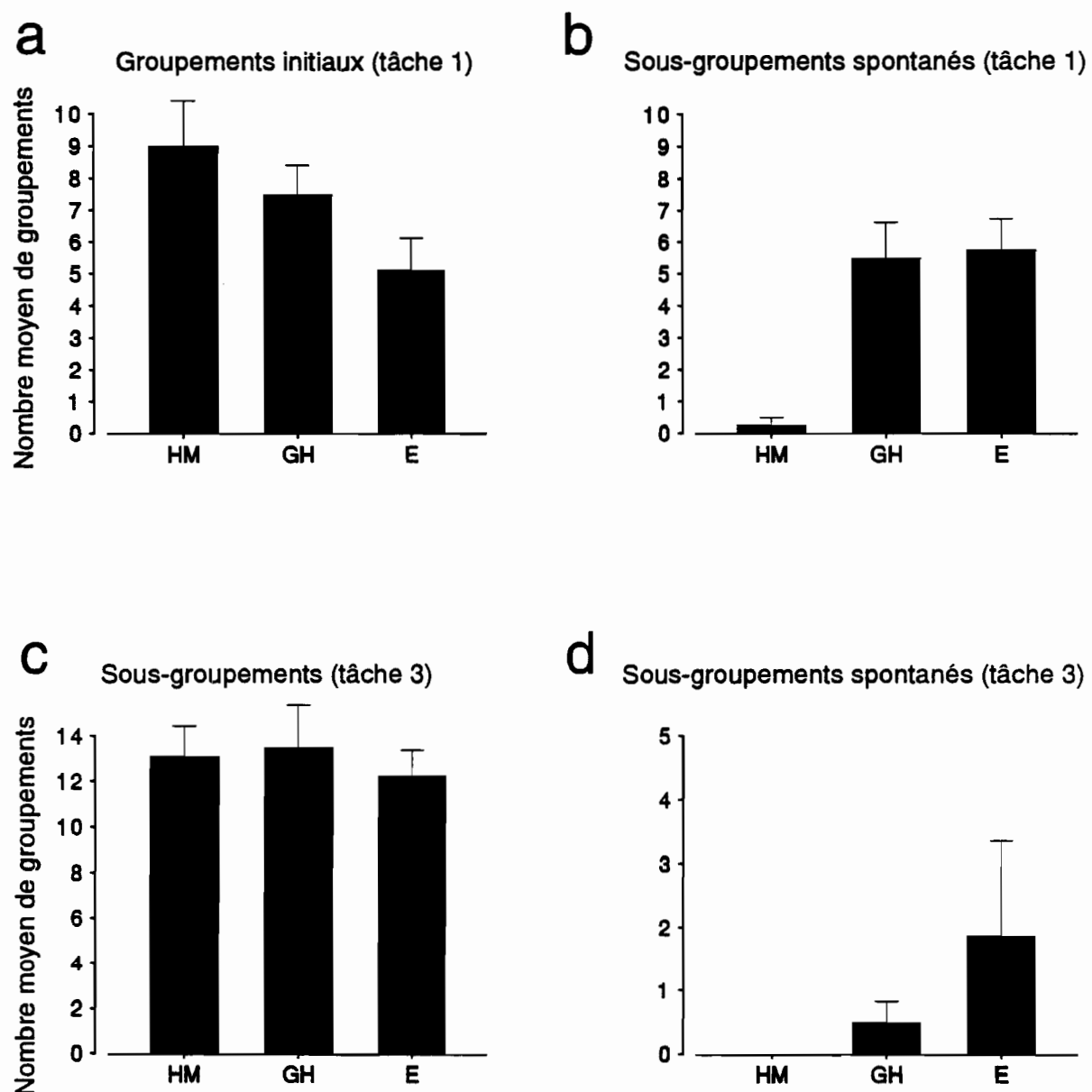


Figure 3: Nombre moyen de groupements aux tâches 1 et 3. HM=habileté moyenne; GH=grande habileté; E=experts. les barres d'erreur représentent E.S.M.

(non demandés par l'expérimentatrice) par les sujets de grande habileté et les experts et l'absence quasi-complète de ces groupements spontanés chez les sujets d'habileté moyenne (figures 3b et 3d). En fait la distribution des sujets d'habileté moyenne, quant au nombre de spontanés, est significativement différente pour l'ensemble des tâches 1 et 3 (HM vs GH, $Z_{(cor)} = -3.1$; HM vs E, $Z_{(cor)} = -3.4$; $p < 0.05$, Mann-Whitney U).

Tâche 1 — groupements initiaux. Lors de la première tâche expérimentale, les experts, de même que tous sauf un sujet de grande habileté, ont ajouté des sous-divisions supplémentaires aux groupements initiaux demandés (nombre moyen de groupements spontanés $\pm$ erreur standard moyenne (E.S.M.) ; E: 5.8 ± 1.0 et GH: 5.5 ± 1.1). Ces résultats (figure 3b) se distinguent significativement de ceux des sujets d'habileté moyenne (HM: 0.25 ± 0.25) où un seul des huit sujets a conçu des sous-groupements spontanés (HM vs GH, $Z = 3.4$; HM vs E, $Z = 3.1$; $p < 0.05$, Mann-Whitney U).

Tâche 3 — redivisions des groupements. Au moment où l'expérimentatrice demande aux sujets de sous-diviser davantage leurs groupements initiaux, on remarque encore une fois une ressemblance entre les deux groupes d'habileté mathématiques plus élevée, chez qui, similairement, deux sujets sur huit ont fait des groupements spontanés ou sous-divisions supplémentaires à celles demandées. Le nombre moyen de groupements spontanés est toutefois plus élevé pour les experts, l'un d'eux ayant conçu 13 sous-groupements spontanés alors que tous les autres sujets impliqués en ont fait 2 (GH) ou 3 (E) (E: 1.9 ± 1.5 ; GH 0.5 ± 0.3 ; nombre moyen $\pm$ E.S.M.; $p < 0.05$). Il n'y a pas de différences significatives pourtant. Aucun des sujets du groupe habileté moyenne n'a fait de groupement spontané à cette tâche (figure 3d).

Conclusion sur les groupements spontanés. La similarité des résultats entre les sujets de grande habileté et les experts, ajouter des sous-divisions alors qu'on ne leur a pas demandé, donne une indication supplémentaire de leur tendance à vouloir organiser le plus possible leurs connaissances. Le fait qu'aucun sujet d'habileté moyenne n'ait fait de groupement spontané lors des tâches expérimentales correspond d'une certaine façon avec la deuxième caractéristique des novices décrits ("groupements demandés, tâche 1") par Chi, Glaser et Rees (1982) où l'un d'eux, obtenant des C en classe, ne pouvait faire de discriminations supplémentaires à ses groupements. Cela suggère, selon les auteurs, que

les groupements en étaient déjà à leur niveau le plus bas. L'absence à peu près complète de groupements spontanés chez ces sujets peut aussi être due au fait qu'ils étaient intimidés et ne voulaient pas déplaire à l'expérimentatrice en faisant quelque chose qui ne leur était pas explicitement demandé.

Degré d'inclusion des Groupements de Problèmes

En nous servant des données de la tâche 1, nous avons examiné, pour chaque sujet, le degré avec lequel leurs quatre groupements les plus importants incluaient la majorité des problèmes (tableau 4).

Tableau 4

Proportion des problèmes inclus dans les groupements les plus importants.

	Nombre de problèmes dans le(s) groupement(s) les plus important(s) (%)			
	1	2	3	4)
Moyens	25	45	62	71
Grande habileté	33	53	67	79
Experts	40	65	82	92
$\chi^2_{(2)}$ corrigée (ANOVA Kruskal-Wallis)	6.5*	6.5*	5.8*	6.3*

* Différences significatives ($p < 0.05$).

Les résultats obtenus sont semblables à ceux de Chi, Feltovich et Glaser (1981), à savoir que les quatre plus importants groupements conçus par chacun des groupes-habileté incluent la majorité des problèmes. On remarque, de plus, que le pourcentage de problèmes inclus dans les groupements les plus importants augmente avec l'habileté mathématique des sujets ($p < 0.05$; ANOVA Kruskal-Wallis; différence significative entre HM et E avec un test M-W U; $Z_{(cor)} = -2.5$; différences non-significative pour HM vs GH et GH vs E): une différence de 10% est observée entre chaque groupe-habileté, avec les sujets d'habileté moyenne obtenant le plus bas pourcentage et les experts le plus haut (tableau 4). Il est à noter qu'une tendance semblable, toutefois moins importante et non

mentionnée par les auteurs, semble se dégager des études de Chi et al. (1981) et Chi et al. (1982), où les quatre plus larges groupements produits par chaque sujet contiennent 80% des problèmes chez les experts contre 74% chez les novices. Ici, le nombre de problèmes dans le(s) groupement(s) le(s) plus important(s) est significativement plus élevé chez les experts que chez les sujets de grande habileté ($p < 0.05$; test de Mann-Whitney U), alors que les sujets de grande habileté se trouvent en position intermédiaire, sans se distinguer de manière significative des deux autres groupes-habileté ($p > 0.1$; test Mann-Whitney U).

Pour déterminer la force de la tendance observée dans nos résultats, nous avons décidé de vérifier si celle-ci se produirait en ne prenant que les trois plus larges groupes-catégories, puis, que les deux plus larges, enfin que le plus important. Nous y avons vu les mêmes différences significatives, avec les sujets de grande habileté un peu plus près de ceux d'habileté moyenne. Il est intéressant de noter que même lorsqu'on ne considère que le groupement principal, celui-ci contient encore la majorité des problèmes chez les experts et les sujets de grande habileté. On peut donc émettre l'hypothèse que plus l'habileté augmente, plus les sujets utilisent des schèmes généraux de classification des problèmes. Il reste à savoir si ces schèmes généraux sont semblables dans leur nature (voir la section sur le contenu explicatif associé à chacun des groupements de problèmes).

Temps de Catégorisation

Tâche 1 — Groupements Initiaux

Nous avons trouvé de légères différences entre les sujets d'habileté moyenne et les deux autres groupes-habileté pour ce qui est du temps pris à catégoriser les problèmes (HM = 11.8 ± 1.8 (moyenne $\pm$ E.S.M.) minutes ou 38 secondes par problème, GH = 16.6 ± 3.1 minutes ou 55 secondes par problème et E = 18.2 ± 3.8 minutes ou 51 secondes par problème). Ces différences ne sont cependant pas significatives. Ceci est en accord avec les résultats obtenus par Chi, Feltovich et Glaser (1981). Le temps supérieur pris par les sujets pour catégoriser les problèmes à mesure que leur habileté mathématique augmente, peut indiquer que les sujets de grande habileté et les experts considèrent de façon plus complète les éléments impliqués dans les problèmes avant de prendre leurs décisions sur les similarités et différences entre ces derniers. Ceci refléterait ainsi une planification plus élaborée des actions à prendre (Shore & Lazar, soumis pour publication).

Tâches 2 et 3 — Similarités et Redivisions

Les mesures du temps pris pour compléter les autres tâches expérimentales ont été invalidées du fait que les catégorisations étaient souvent interrompues par les explications fournies par les sujets sur les groupements de problèmes et les questionnements de l'expérimentatrice.

Description de Groupements Typiques Conçus Par les Trois Groupes-Habilité

Un de nos objectifs vise à déterminer la place des sujets de grande habileté dans la transition du stade de novice à celui d'expert, entre autres pour ce qui est de leur organisation des problèmes. Les résultats décrits précédemment nous donnent un aperçu global des similarités et différences entre les groupes-habilités et suggère de façon générale que les sujets de grande habileté se situent, pour plusieurs des mesures considérées, à un niveau intermédiaire entre les sujets d'habileté moyenne et les experts.

Un examen plus descriptif des caractéristiques des groupements de chaque groupe-habilité nous permet de mettre davantage en valeur les nuances et les particularités propres à chacun des sujets et des groupes de sujets, d'autant plus que l'on en connaît peu sur ce genre de tâche, surtout en relation avec les mathématiques. Des exemples de groupements faits par les différents groupes-habilité illustrent la variabilité qui prend place à l'intérieur de chacun de ces groupes de sujets (figures 4 à 7). Nous avons choisis les groupements de sujets typiques en nous fondant sur les résultats d'études précédentes (Chi, Feltovich & Glaser, 1981; Chi, Glaser & Rees, 1982) et avons établi ainsi les groupements possédant les caractéristiques représentant le mieux les limites de simplicité et de complexité de chacun des types de sujets. Nous examinons d'abord la performance de nos experts et nous en servons comme point de référence pour la description des performance des sujets d'habileté moyenne et de grande habileté.

Groupements Typiques des Experts

Les figures 4 et 5 représentent les groupements de 4 experts différents.

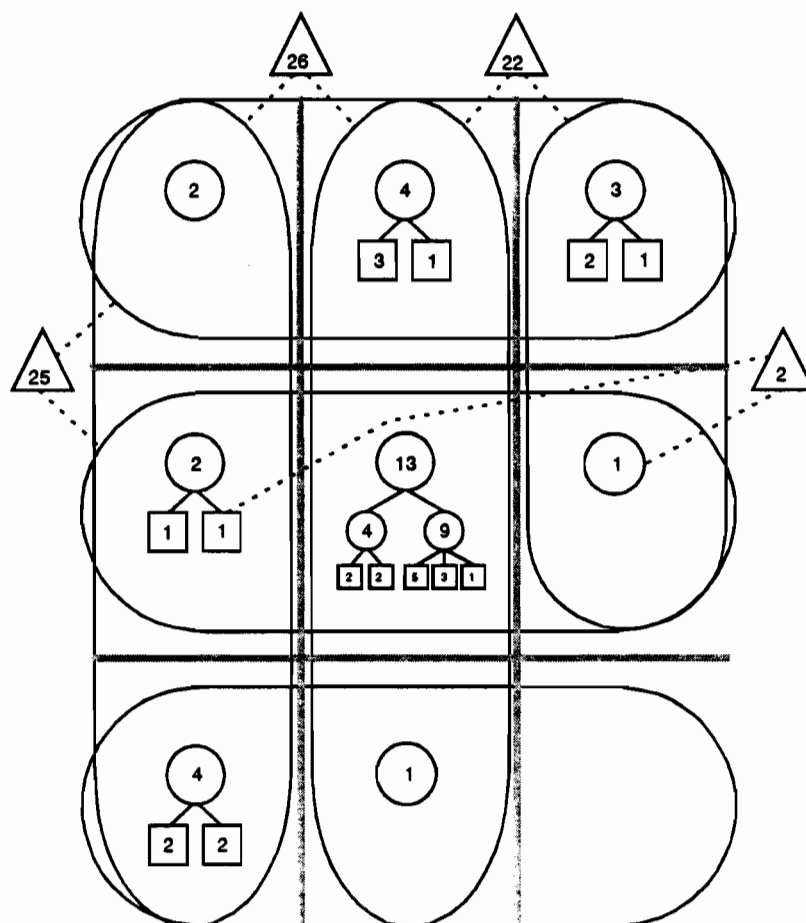
Extrême de complexité. La figure 4 illustre les groupements faits par le sujet #12. La partie (a) nous montre les groupements tels que le sujet nous les a décrits, une matrice formées de rangées et de colonnes ayant des intersections communes. Cette organisation unique des problèmes, diffère de toutes les autres organisations de problèmes fournies par

le reste des sujets de par sa forme, qui met en valeur les relations des problèmes avec les autres de façon particulièrement concise et globale. Ceci reflètent éventuellement la compétence du sujet dans l'exécution de cette tâche mathématique particulière. La partie (b) représente cette même matrice, mais transformée cette fois-ci sous une autre forme par l'expérimentatrice pour permettre une meilleure comparaison avec les groupements des autres sujets. Les groupements des sujets #17 et #21 (figure 5), nous montrent une autre caractéristique exclusive aux experts: ces deux sujets ont placés leurs groupements dans un ordre mettant en évidence la stratégie d'enseignement qu'ils utiliseraient. C'est ce qui est signifié par les flèches entre les groupements. Les groupements du sujet #21 (figure 4) nous font aussi voir des sous-groupements spontanés (non explicitement demandés par l'expérimentatrice) non seulement à la première tâche (deuxième série de cercles), mais aussi à la troisième tâche (hexagones). Comme nous l'avons expliqué précédemment, tous les experts ont ajouté des groupements spontanés aux groupements demandés à la première partie de la tâche expérimentale, toutefois, deux sur huit en ont aussi ajoutés à la troisième étape de la tâche, alors qu'ils devaient subdiviser les groupements initiaux. Les niveaux hiérarchiques utilisés par ces individus sont de 5 pour les sujets #12 et #21 et de 4 pour le sujet #17.

Extrême de simplicité. Parmi les groupements de problèmes effectués par nos experts, certains possèdent des caractéristiques similaires à celles décrites par Chi, Glaser et Rees (1982) lorsqu'ils parlent des deux novices ayant obtenus des notes de "C" dans leurs cours (p. 49). Par exemple, le sujet #19 (figure 5) est le seul du groupe des experts à avoir conçu des groupements qui n'atteignent qu'un niveau hiérarchique. Le nombre de groupements produits par ce dernier s'élève au-dessus de la moyenne générale (10 vs 7.2) et est le double de la moyenne des experts (10 vs 5.1). De plus, tout comme les sujets d'habileté moyenne, il n'utilise que les 3 premiers niveaux hiérarchiques. Malgré cela, il faut prendre note que ce sujet a aussi fait des groupements spontanés. L'analyse du contenu explicatif des groupements nous permettra d'évaluer si ces ressemblances avec les novices ne sont qu'apparentes.

A- Représentation originale

98



B- Représentation transformée

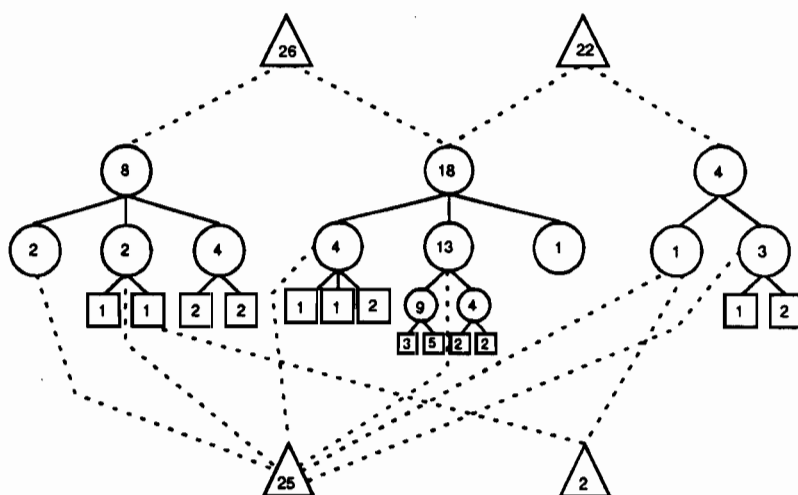


Figure 4: Représentation de la hiérarchie de groupements de l'expert #12.

A Représentation originale telle que décrite par le sujet #12.

B Représentation transformée par l'expérimentatrice pour permettre une meilleure comparaison avec celles des autres sujets. Voir la figure 1 pour une explication des symboles.

Groupements Typiques des Sujets d'Habileté Moyenne

Extrême de simplicité. Nous avons choisi le #20 pour démontrer les caractéristiques plus particulières des sujets d'habileté moyenne et qui conséquemment diffèrent le plus de celles des experts (figure 6). En effet, on y remarque la présence d'un très grand nombre de groupements, soit 17 en tout. De plus, six de ces derniers ne sont qu'à un seul niveau hiérarchique. Enfin, il n'y a aucun groupement spontané.

Extrême de complexité. La figure 6 montre les groupes qui possèdent des caractéristiques habituellement plus fréquentes chez les sujets les plus forts. Par exemple, bien que possédant des groupes à un seul niveau hiérarchique, le sujet #16 a aussi fait des groupements spontanés lors de la première tâche expérimentale. C'est le seul sujet du groupe habileté moyenne à avoir agi ainsi. La situation inverse se produit avec le sujet #10 qui lui n'a fait que trois groupements avec tous les problèmes, mais qui n'a ajouté aucun groupement spontané. Ces sujets novices sont de niveaux de réussite scolaire B, C ou D. Le sujet #10 étant le moins fort, il est un peu contradictoire que ce dernier soit celui qui ait conçu le moins de groupements. En effet, les résultats de Chi, Glaser et Rees (1982), concernant leurs deux novices les moins habiles, suggèrent plutôt le contraire. Cela indique que de faire la somme du nombre de groupements, n'est peut-être pas une mesure très fidèle de l'habileté des sujets bien que, de façon générale il y ait une tendance, chez les experts, à faire moins de groupements.

Groupements Typiques des Sujets de Grande Habileté

Il semble que les caractéristiques des sujets de grande habileté ressemblent à la fois à celles des sujets d'habileté moyenne et à celles des experts.

Extrême de simplicité. Dans la figure 7, nous voyons que le sujet #4 a conçu un nombre considérable de groupements (10). De plus, il est le seul, parmi les sujets de grande habileté, à ne pas avoir fait de groupement spontané. Enfin, le nombre maximum de niveaux hiérarchiques utilisés n'est que de trois, comme chez les sujets d'habileté moyenne.

Extrême de complexité. C'est le sujet #3 qui a été choisi pour démontrer les caractéristiques qui ressemblent le plus à celles des experts. D'abord, ce dernier a utilisé

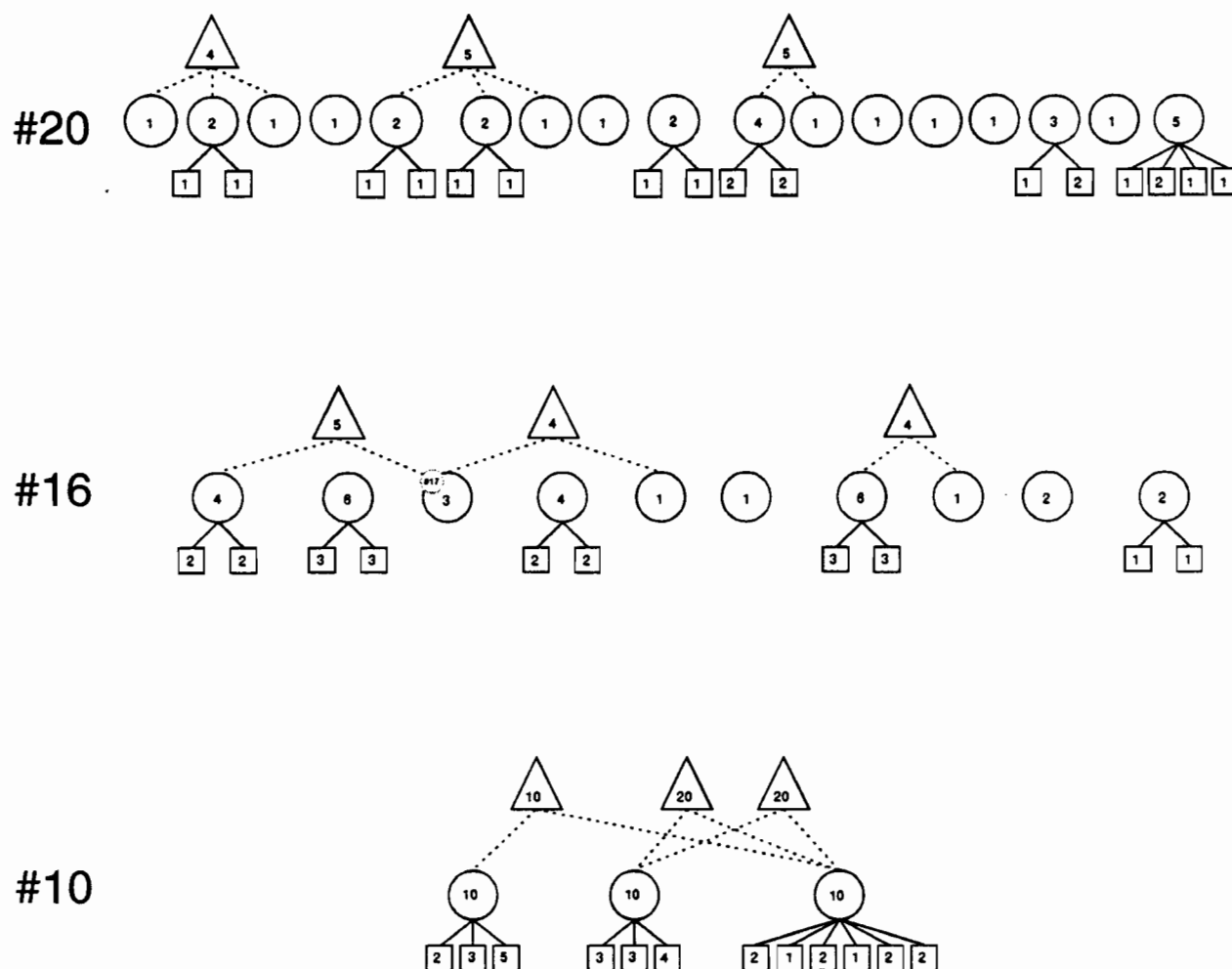
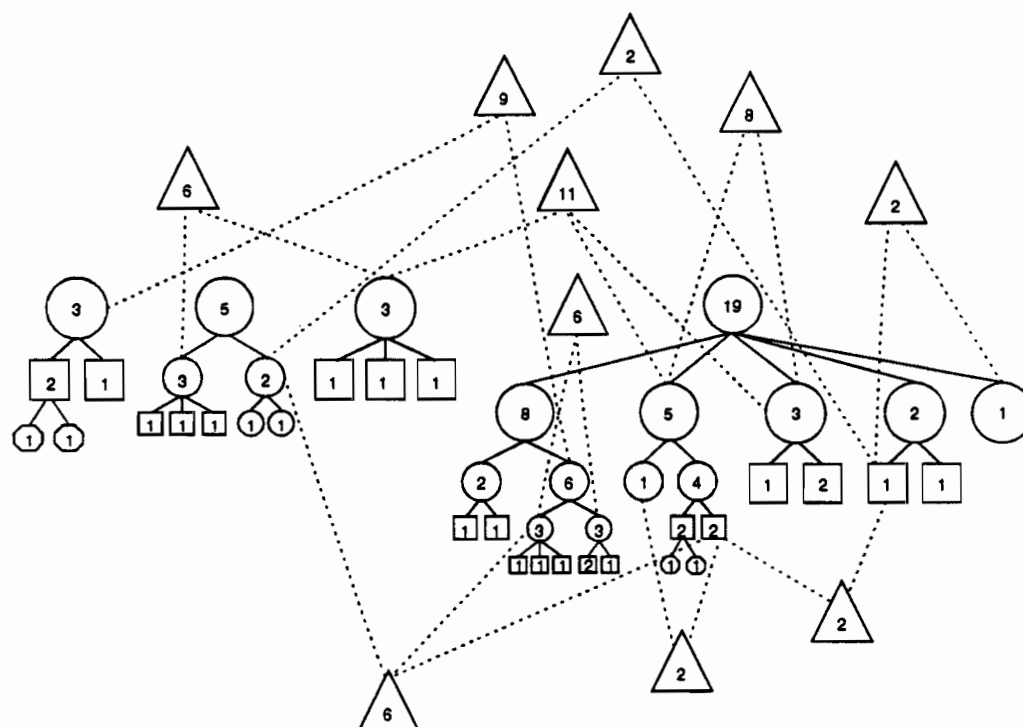
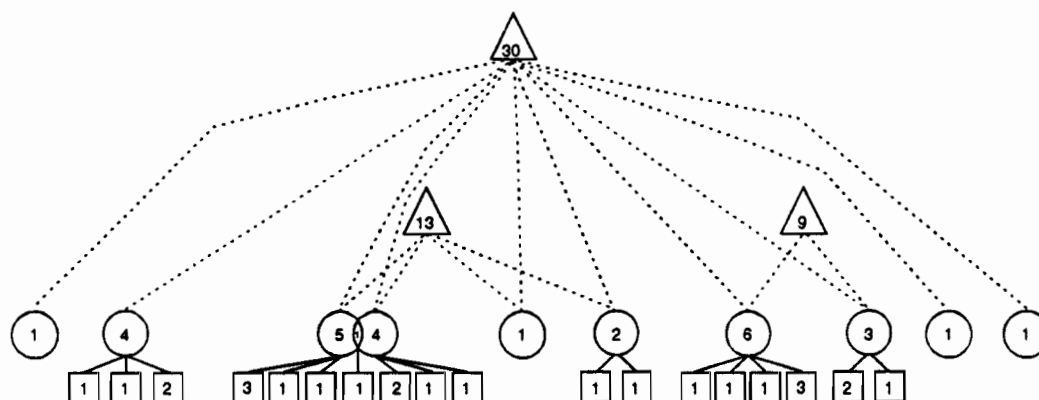


Figure 6: Représentation de la hiérarchie de groupements de trois sujets d'habileté moyenne (nos 10, 16 & 20). Voir la figure 1 pour une explication des symboles.

#3



#4



#1

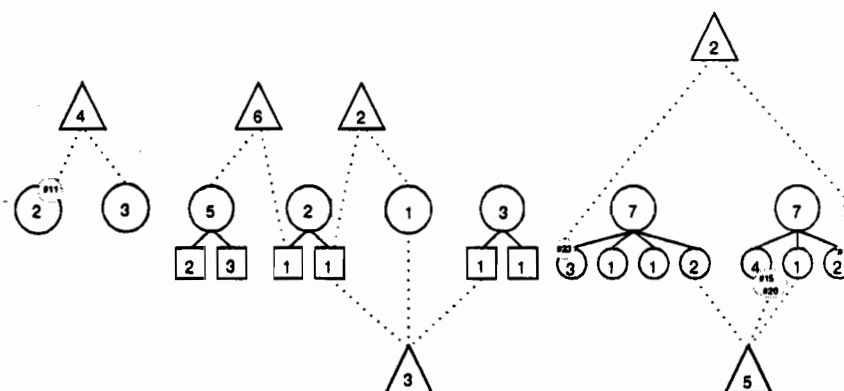


Figure 7: Représentation de la hiérarchie de groupements de trois sujets de grande habileté (nos 1, 3 & 4). Voir la figure 1 pour une explication des symboles.

jusqu'à 5 niveaux hiérarchiques dans ses groupements. Un seul sujet de grande habileté a utilisé ce nombre de niveaux, toutefois cela ressemble quand même aux résultats obtenus par les experts, car seuls 3 de ceux-ci ont fait usage de 5 niveaux. Une autre caractéristique du sujet #3 est qu'il a conçu des groupements spontanés, non seulement à la première tâche expérimentale, mais aussi à la troisième, comme l'a fait un autre des sujets de grande habileté, et 2 sur 8 des sujets experts. Finalement, le sujet #3 est celui qui a fait le nombre le moins élevé de groupements (4 groupements) au sein de son groupe-habileté.

La plupart des autres sujets de grande habileté se situent quelque part entre ces deux extrêmes (sujets #3 et #4), un exemple typique est le #15 qui possède un nombre de groupements dans la moyenne (8), des groupements spontanés à la première tâche seulement, une utilisation limitée (de 2 à 3 niveaux) des niveaux hiérarchiques dans les groupements.

Résumé des Comparaisons des Caractéristiques Externes des Groupements

Les sujets de grande habileté et les experts se distinguent des sujets d'habileté moyenne de plusieurs façons. La première distinction réside dans leur usage quasi-général de groupements spontanés lors de la première tâche et de quelques-uns de plus lors des redivisions (troisième tâche), alors que ce genre de groupements est presque absent chez les sujets d'habileté moyenne. La deuxième distinction a trait au nombre de niveaux hiérarchiques utilisés. Les sujets de grande habileté et les experts emploient jusqu'à 5 niveaux hiérarchiques lors de la description de leurs groupements, alors que les sujets d'habileté moyenne ne se limitent qu'à 3 niveaux hiérarchiques. De plus, en considérant l'ensemble des sujets de grande habileté et des experts, on remarque que seul un expert (1 sur 16 GH et E) a conçu des groupements n'ayant qu'un seul niveau hiérarchique, alors que de tels groupements sont présents chez 50% des sujets d'habileté moyenne.

Quelques caractéristiques semblent différencier les divers groupes-habileté les uns des autres. Les experts (3/8) se distinguent des deux autres groupes-habileté par l'assignation d'un ordre entre les groupements mettant en évidence la chronologie d'enseignement à employer s'ils avaient eu à enseigner les notions mathématiques reliées aux problèmes. Les experts se différencient clairement des sujets d'habileté moyenne à la tâche 1, pour le

nombre moyen de groupements initiaux, alors les sujets de grande habileté ont un emploi intermédiaire du nombre de groupement. Enfin, on remarque un patron de diminution du degré d'inclusion des problèmes par les groupements les plus importants, à mesure que l'habileté des sujets décroît. Les experts semblent donc les plus capables d'utiliser des schèmes globaux lors des catégorisations et encore une fois les sujets de grande habileté semblent être en position intermédiaire aux deux autres groupes-habileté.

La variabilité semble assez grande à l'intérieur d'un même groupe-habileté pour ce qui est de la complexité des groupements. Il semble également y avoir un chevauchement dans le degré de complexité des groupements entre les différents groupes-habileté, les caractéristiques les plus complexes des sujets d'habileté moyenne chevauchant les moins complexes des sujets de grande habileté, puis les caractéristiques les plus complexes de ce dernier groupe-habileté chevauchant celles moins complexes des experts.

En résumé, bien que certaines différences entre les groupes soient plutôt des tendances, comme le temps utilisé pour faire la catégorisation, d'autres sont vraiment bien plus des évidences, comme la diminution du nombre de groupements à mesure que l'habileté mathématique augmente à la tâche 1, la présence de groupes spontanés chez les sujets de grande habileté et les experts, de même que l'utilisation d'une organisation hiérarchique des problèmes plus élaborée chez ces derniers. Il faut aussi noter que les sujets de grande habileté se trouvent en position intermédiaires aux experts et aux sujets d'habileté moyenne pour plusieurs des analyses décrites.

Contenu Explicatif Associé à Chacun des Groupements de Problèmes

Cette deuxième série d'analyses traite des raisons données par les sujets pour expliquer leurs groupements de problèmes. Ces analyses seront beaucoup plus exploratoires que celles traitant des caractéristiques externes des problèmes parce qu'un nouveau système de codification a été créé, ce qui ne permet donc pas une comparaison exacte avec les autres études, et parce que ce nouveau système possède une fidélité inter-juges limitée. Il convient donc d'examiner cette partie des résultats avec prudence.

Comme il a été expliqué dans la méthodologie, nous avons divisé les explications des catégorisations formées par les sujets en segments et assigné un code à chacune, à moins que nous ayons jugé qu'un ensemble de segments faisait partie d'un même tout. Étant

donné que nous avons construit notre système de codification en nous basant sur plusieurs études précédentes, les termes utilisés ici diffèrent souvent de ceux d'autres auteurs (combinaison de données).

Nous avons comparé les groupes de sujets sur la présence ou pas de chacune des raisons données par les sujets pour expliquer les groupements de problèmes. La présence de chaque catégorie de raison était jugée sans égard pour le nombre de mentions reçues par celles-ci pour chacun des groupements de problèmes. Cette mesure a été choisie parce qu'elle est moins influencée par le fait que certains sujets parlent plus que d'autres. Finalement, étant donné que le nombre de groupements formés varie d'un sujet à l'autre, nous avons exprimé le nombre de mention des catégories en pourcentage: la proportion des groupements dont l'explication contient ou pas tel ou tel code (correspondant à chaque catégorie).

L'ordre des codes en abscisse des graphique des figures 8 à 10 est basé sur le résultat de la figure 8. Au lieu de compter la présence ou pas des catégories à chaque groupement de problèmes (comme aux figures 9 et 10), nous avons calculé leur présence en comptant le nombre de sujets ayant utilisé ces catégories de raisons pour expliquer leurs groupements, ce pour chaque groupe-habilité et à chaque tâche. Ceci nous a permis de savoir si telle catégorie est présente ou pas chez tel sujet ou tel groupe de sujets. Ensuite, nous avons comparé les histogrammes des trois groupes-habilités pour chaque code et groupé ceux possédant des patrons semblables les uns à côté des autres, selon l'ordre croissant d'utilisation des catégories par les experts, notre point de comparaison. Cet ordre global des codes correspond bien à un ordre de complexité préalablement établi par l'expérimentatrice en se basant sur les définitions des catégories de raisons données par les sujets.

Présentation des Analyses

L'analyse qui suit sera traitée en allant du particulier au général, examinant les résultats des sujets moyens, des sujets de grande habileté et des experts à chacune des tâches, pour ensuite comparer les groupes-habilité entre eux. Nous examinerons d'abord les résultats d'un point de vue quantitatif (ANOVA) et décrirons ensuite certains aspects qualitatifs de ces résultats, qui à notre avis, méritent d'être soulignés.

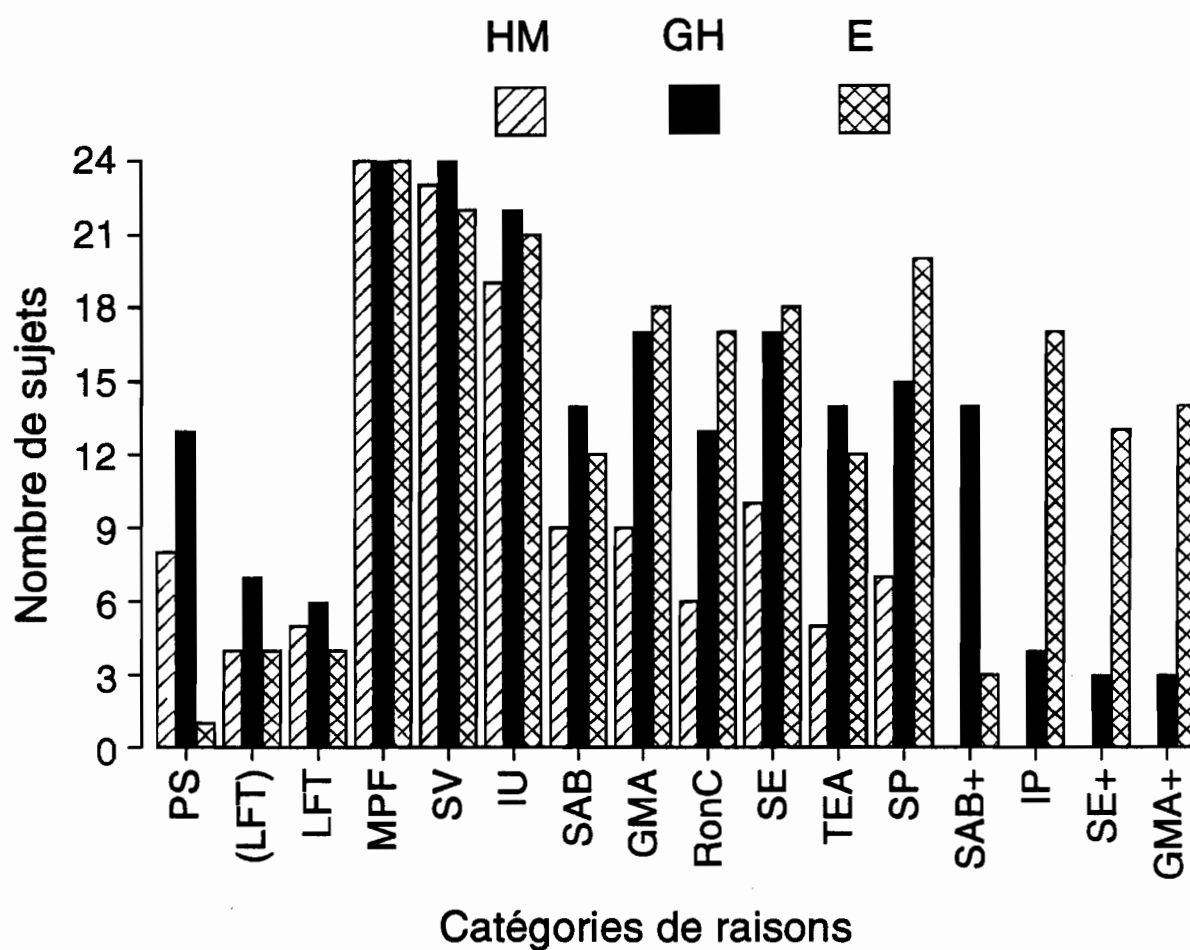


Figure 8: Nombre de sujets de chaque groupe-habileté utilisant chaque catégorie pour les trois tâches combinées (8 sujets x 3 tâches = 24). HM=habileté moyenne; GH=grande habileté; E=Expert. Voir le tableau 5 pour une description des codes représentant les raisons utilisées par les sujets pour expliquer leur groupements.

Pour analyser les différences entre les groupes-habilité, nous avons effectué une analyse de variance de la fréquence de chaque catégorie (a) au sein d'un même groupe-habilité à travers les trois tâches, (b) entre les différents groupes-habilité au sein d'une même tâche et (c) entre les différents groupes-habilité pour l'ensemble des trois tâches expérimentales. Étant donné que les résultats sont exprimés en pourcentages et que ceux-ci forment des distributions plutôt binomiales que normales, nous avons effectué une transformation arcsine (Zar, 1984). Là où l'ANOVA a indiqué des différences significatives, nous avons fait des comparaisons deux à deux avec un test de Tukey.

Comparaisons Entre les Trois Tâches au Sein de Chaque Groupe-Habilité

Une comparaison de la fréquence avec laquelle les différentes catégories sont présentes dans les explications des groupements à travers les trois tâches (figure 9) et pour chaque groupe-habilité, révèle que seulement une minorité ont eu des distributions significativement différentes. Dans aucun des cas les tests de Tukey ne nous fournissent de détails supplémentaires nous permettant de déterminer entre quelles tâches se situent ces différences.

Sujets d'Habilité Moyenne

Différences significatives. Deux codes ont des distributions significativement différentes d'une tâche à l'autre (figure 9). D'abord, la catégorie MPF ($F(2,21)=5.82$, $p < 0.05$), passe de 84% dans la tâche 1, à 57% à la tâche 2 et enfin à 91% dans la tâche 3. Ensuite, la catégorie PS ($F(2,21)=5.08$, $p < 0.05$) suit un patron différent avec 4% dans la tâche 1, 0% dans la tâche 2 et 22% dans la tâche 3. Les plus grands écarts entre les fréquences de présence de la tâche 2 et ceux de la tâche 3 constituent fort probablement l'essence des différences de distribution pour ces deux catégories. L'utilisation accrue de MPF et PS à la tâche 3, alors que les fréquences des codes correspondant aux raisons moins superficielles (SAB, GMA, RonC, SE, TEA, SP) diminuent légèrement, suggère que les sujets d'habilité moyenne ont porté davantage attention aux caractéristiques les plus évidentes des problèmes (MPF) et pseudostructures (PS) lorsqu'on leur demandait de faire des redivisions de leurs groupements initiaux.

Tableau 5
Résumé des codes.

Code	Nom	Description
PS	"PSEUDOSTRUCTURE"	Catégorisations basées sur des pseudostructures ou quantités calculables comme le volume.
(LFT)	"(LEFTOVERS)"	Oubli d'un nom, type de problème, ou pourquoi une carte a été placée là où elle est, mais le groupe a une raison d'existence.
LFT	"LEFTOVERS"	Problèmes placés ensembles parce qu'ils ne semblaient aller nulle part ailleurs.
MPF	"MOST PROMINENT FEATURES"	Catégorisations basées sur les aspects les plus évidents des problèmes.
SV	"SOLUTION METHOD/VAGUE"	Catégorisations basées sur une méthode de solution vague, imprécise ou trop générale.
IU	"INSIGHT/UNDEFINE"	Catégorisations basées sur une vague saisie au sujet de la nature d'un problème ou en comparaison avec d'autres groupes de problèmes.
SAB	"SOLUTION METHOD/ABILITIES NEEDED"	Commentaires sur le type d'habileté ou de connaissances requises pour résoudre les problèmes.
GMA	"GENERAL MATHEMATICAL CONTENT AREA"	Identification du domaine mathématique général duquel les problèmes proviennent.
RonC	"REFLECTION ON CATEGORIZATION"	Le sujet décrit le processus de pensée qui lui sont propres, évalue la relation d'un problème avec d'autres ou reconnaît que ses dires sont sa façon de pensée personnelle.
SE	"SOLUTION METHOD/EVALUATION"	Évaluation subjective de la méthode de solution ou de la difficulté d'un problème ou de sa propre habileté à résoudre un problème.
TEA	"REFERENCE TO TEACHING"	Référence explicite sur la manière par laquelle les sujets ont été enseignés ou ont appris les mathématiques à l'école.
SP	"SOLUTION METHOD/PRECISE"	Identification précise des éléments ou principes mathématiques précis entourant la solution.
SAB+	"SOLUTION METHOD/ABILITIES NEEDED/PLUS"	Une explication détaillée des connaissances ou habiletés requises est donnée. Elle doit être plausible ou valide.
IP	"INSIGHT/PRECISE"	Saisie pénétrante et précise de la nature des problèmes et de leur situation dans les processus d'enseignement et d'apprentissage.
SE+	"SOLUTION METHOD/EVALUATION/PLUS"	Le sujet fournit des commentaires évaluatifs et les explique de plus de façon détaillée, plausible ou valide.
GMA+	"GENERAL MATHEMATICAL CONTENT AREA/PLUS"	Le sujet ajoute à l'identification du domaine mathématique général des explications ou spécifications plausibles ou valides sur ce domaine.

Étant donné le peu de présence de la catégorie PS dans les groupements de la tâche 1, on peut supposer que c'est à la tâche 3 (redivisions des groupements) que les sujets d'habileté moyenne ont essayé le plus fortement de percevoir une structure dans les problèmes à cause de l'utilisation additionnelle de PS en plus de SV. Toutefois, comme on le constate, ils n'y sont pas vraiment arrivés, considérant presque exclusivement l'aspect superficiel des problèmes.

Autres catégories ayant des distributions intéressantes. Une des observations les plus évidente est l'emploi prédominant des catégories MPF, SV et IU sur toutes les autres catégories ce qui montre que les sujets d'habileté moyenne se fondent principalement sur les caractéristiques superficielles des problèmes (MPF) pour construire leurs groupements de problèmes et que leurs efforts pour essayer de cerner la nature des problèmes ou leurs solutions, sont, la plupart du temps, inefficaces.

Chi, Glaser et Rees (1982), dans leur étude sur les catégorisations hiérarchiques de problèmes ont émis l'hypothèse que les raisons données par les experts pour justifier les groupements secondaires (redivisions, tâche 3) correspondent à celles des groupements initiaux (tâche 1) des novices. Le fait que le nombre de raisons basées sur les éléments évidents des problèmes (MPF) soit plus élevé à la tâche 3 qu'à la tâche 1 et que les fréquences de présence des catégories GMA, SE et SAB diminuent lors des redivisions, indique que, lors de la tâche 3, les sujets d'habileté moyenne ont porté davantage attention aux aspects plus évidents des problèmes et utilisé moins de raisonnements impliquant évaluations et comparaisons vagues des processus de solution.

L'usage élevé de la catégorie SV (50% de présence dans les groupements à travers les trois tâches), la fréquence d'utilisation limitée de SAB et SE et le fait que les catégories de raisons montrant une compréhension de la structure mathématique des problèmes (GMA+, SAB+, SE+ et IP) sont presque inutilisées, suggèrent que même si les sujets d'habileté moyenne considèrent la méthode de solution dans leurs groupements, ils n'en ont souvent qu'une idée imprécise et intuitive (seulement trois sujets ont utilisé la catégorie SP qui implique une identification précise des éléments ou principes mathématiques entourant la solution). De plus, même s'ils font des commentaires évaluatifs, ceux-ci sont très généraux ou subjectifs (SAB, SE). À la tâche 2 (trouver des

similarités entre les groupes) toutefois, la remontée des catégories SP et RonC, combinée à leur diminution d'utilisation à la tâche 3 (sous-division des groupements initiaux), et à la baisse d'utilisation des catégories MPF, SV, IU, TEA, suggèrent que cette dernière tâche pousse certains sujets d'habileté moyenne à penser de façon plus détaillée et profonde à la méthode de solution (SP) et à décrire leurs processus de pensée en relation avec les problèmes (RonC).

Il est important de remarquer l'utilisation de la catégorie SP par trois des sujets moyens. Cela démontre que certains peuvent être capables de discuter de la solution d'un problème d'une façon précise et exacte, comme les sujets de grande habileté et les experts. D'autres part, il faut réaliser que ce genre de raison explicative n'a été que peu employé et qu'aucune autre catégorie démontrant une compréhension claire du processus de solution n'a été utilisée (SE+, GMA+, SAB+ et IP).

Sujets de Grande Habileté

Distributions significatives. Pour les sujets de grande habileté mathématique, les distributions des codes MPF ($F(2,21)=3.66$, $p < 0.05$), GMA ($F(2,21)=4.24$, $p < 0.05$) et LFT ($F(2,21)=3.87$, $p < 0.05$), sont significativement différentes à travers les tâches (figure 9). C'est à la tâche 3 que le pourcentage de présence de la catégorie MPF est le plus élevé avec 98%, alors que le moins élevé se situe à la tâche 2 (72%). Les sujets de habileté ont donc très fréquemment utilisé les caractéristiques évidentes des problèmes pour expliquer leurs groupements à toutes les tâches, mais plus particulièrement lors des redivisions.

La deuxième catégorie ayant une distribution significativement différente d'une tâche à l'autre, GMA, est de moins en moins présente de la tâche 1 à la tâche 3, passant de 43% à 10%. Cette catégorie a une certaine connotation générale parce qu'elle fait référence aux domaines mathématiques auxquels appartiennent les problèmes. On peut penser que la diminution constante de sa fréquence d'utilisation d'une tâche à l'autre peut être due au fait que les sujets ayant déjà mentionné dans la première tâche les domaines des problèmes mathématiques, éprouvent de moins en moins le besoin de les répéter à travers les différentes tâches, passant du général au plus particulier.

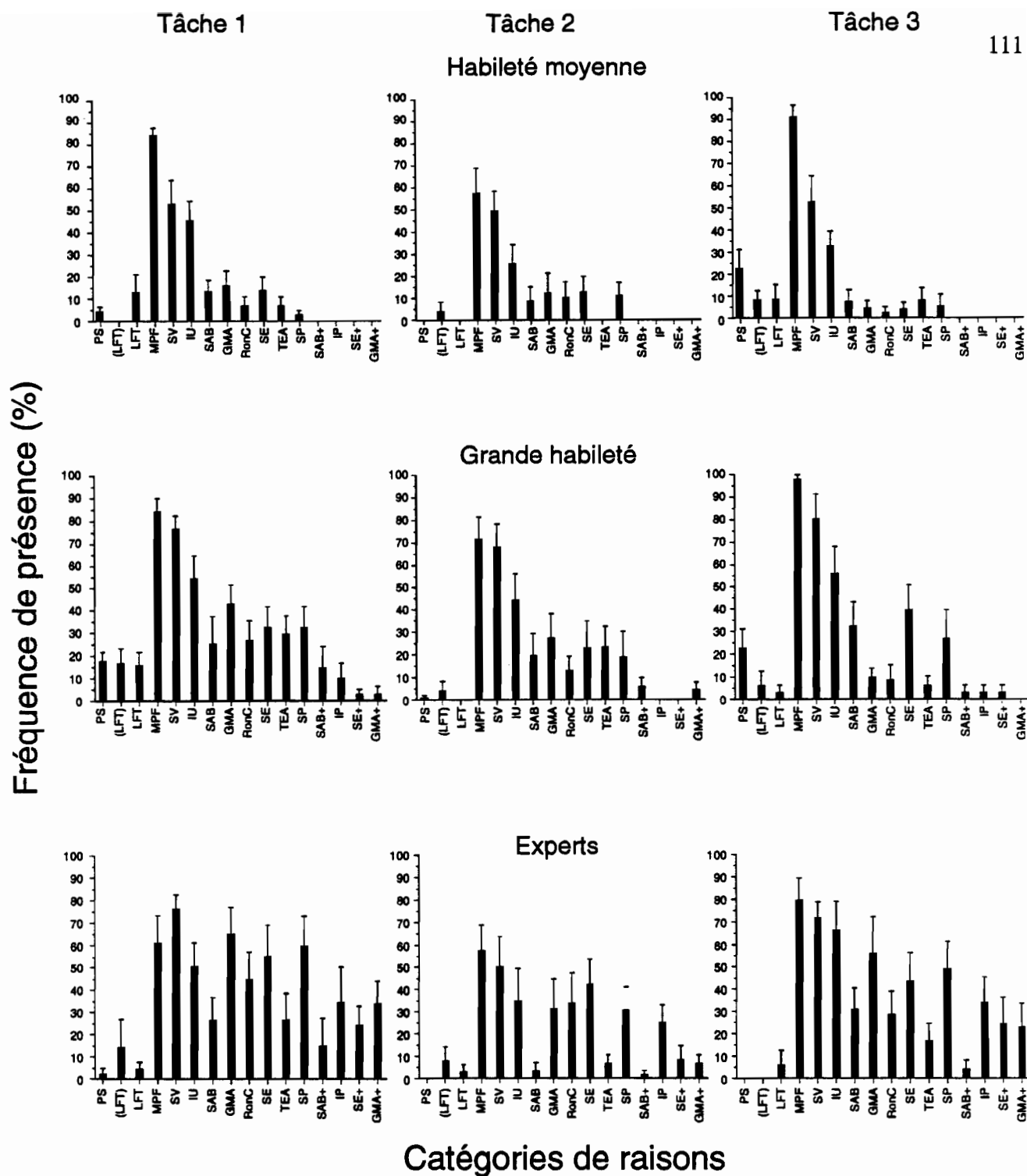


Figure 9: Fréquence à laquelle les catégories de raison apparaissent dans les explications relatives aux groupements de problèmes pour chaque groupe-habileté à chaque tâche. La présence ou non de chaque catégorie dans les explications des groupements est exprimée sous forme de proportion du nombre maximum de groupements pour chaque sujet. Voir le tableau 5 pour une explication des codes en abscisse. Les barres d'erreur représentent E.S.M.

LFT — problèmes placés ensembles parce qu'ils ne semblaient aller nulle part ailleurs — passe de 16% à la tâche 1 à 0% à la tâche 2 et remonte seulement légèrement à la tâche 3 (3%). Une explication plausible de cette distribution est qu'au fur et à mesure que les sujets travaillent avec les mêmes problèmes, ils découvrent des liens entre ces derniers et peuvent ainsi décider où les placer.

Autres catégories ayant des distributions intéressantes. MPF, SV et IU, comme chez les sujets d'habileté moyenne, sont les plus utilisées des catégories à toutes les tâches expérimentales. La catégorie SV obtient encore la deuxième place avec une fréquence de présence moyenne de 76% pour les trois tâches. Ces résultats montrent que les sujets de grande habileté ont fondé en bonne proportion leurs catégorisations sur les caractéristiques superficielles des problèmes (MPF) et les approximations vagues de la nature des problèmes (IU) ou de leur solution (SV), ce, d'une façon semblable aux sujets d'habileté moyenne. Ce qui différencie les sujets de grande habileté de ces derniers, c'est qu'en plus de ces raisons plutôt superficielles pour expliquer les groupements de problèmes, ils utilisent également, de façon importante, des catégories demandant une compréhension plus complexe des problèmes. Par exemple, plusieurs de leurs commentaires touche à la solution d'une façon détaillée, précise et valide, que ce soit en parlant du processus de solution comme tel (SP), des habiletés requises à la solution (SAB+), ou de la difficulté de résolution (SE+). Ils réfèrent également davantage aux domaines mathématiques des problèmes (GMA) et font davantage de commentaires sur l'influence de l'enseignement sur leurs catégorisations des problèmes (TEA).

À la tâche 2, on constate une diminution, variant de 3 à 17%, du taux d'utilisation de la presque totalité des catégories (sauf pour GMA+). Ceci met encore une fois en évidence la nature distincte de la tâche de similarité par rapport aux deux autres tâches, alors qu'elle engendre beaucoup moins de verbalisations que le reste des autres tâches.

Le patron d'utilisation des raisons associées aux groupements de la tâche 1 se distingue de celui de la tâche 3 de plusieurs façons. À la tâche 1, la majorité (11/16) des catégories ont des pourcentages de présence variant entre 16 et 43%, alors que les trois plus utilisées, MPF, SV et IU varient entre 54 et 84 %. Les sujets d'habileté de grande habileté utilisent donc, à cette tâche, les catégories de façon assez équilibrée (14/16 sont

présentes à plus de 17%), expliquant leurs groupements initiaux avec une variété de raisons. À la tâche 3, les sujets de grande habileté se sont concentrés sur l'emploi de sept catégories MPF, SV, IU, SAB, SE, SP et PS, la fréquence de présence des autres catégories diminuant à moins de 10%. Les trois catégories les plus présentes, MPF, SV et IU, dominent encore davantage variant de 56 à 98% alors que les catégories PS, SE et SAB suivent la même tendance à la hausse. La catégorie SP demeure avec une fréquence élevée, mais un peu moins toutefois qu'à la tâche 1. Ces quatre catégories sont donc présentes entre 23 à 40% dans les groupements. Cela indique, en comparaison avec la tâche 1 (groupements initiaux), que la tâche de redivisions des groupements a poussé les sujets de grande habileté à principalement porter attention aux caractéristiques superficielles des groupements de problèmes et à émettre des commentaires vagues sur la solution et la nature du problème. Toutefois, ils se fondent également assez fréquemment sur d'autres raisons de catégorisation impliquant des degrés supérieurs de compréhension de la structure des problèmes (et comme nous le verrons dans la prochaine section, ceci les différencie des sujets moyens). En effet, ils évaluent, de façon imprécise toutefois, les connaissances ou habiletés requises pour solutionner les problèmes (SAB) ainsi que la difficulté des problèmes (SE) et portent leur attention aux méthodes de résolution des problèmes (SP). La présence assez forte de la catégorie PS, nous fait penser que cette étape de redivisions des groupements amènent certains sujets de grande habileté à fonder leurs catégorisations sur les quantités mesurables explicitement décrites dans les problèmes, peut-être dans un effort d'identification du processus de solution des problèmes.

La catégorie (LFT) — oubli d'un nom de type de problème ou pourquoi une carte a été placée à un certain endroit — suit le même patron que LFT (baisse substantielle à la tâche 2 puis légère remontée à la tâche 3). Encore une fois il est possible que les efforts fournis lors des tâches expérimentales ait permis aux sujets de se souvenir des noms de certains types de problèmes ou des raisons pour lesquelles ils avaient groupé les problèmes ensembles, leur permettant ainsi de prendre des décisions concernant le placement de certains problèmes.

Finalement, alors que les quatre catégories SAB+, IP, SE+ et GMA+ ont été complètement inutilisées par les sujets d'habileté moyenne, elles ont été présentes chez les

sujets de grande habileté lors des trois tâches (exception faite de IP et SE+ à la tâche 2 et de GMA+ à la tâche 3), mais de façon limitée toutefois: à la tâche 1, SAB+ obtient 14% et IP 10%, mais pour le reste des tâches aucune de ces quatre catégories n'excède 4%. C'est à la tâche 1 que ces catégories sont les plus présentes, toutes sont utilisées et leur pourcentage de présence sont les plus élevés. La tâche 2 voit deux catégories inutilisées SE+ et IP, alors qu'à la tâche 3 seule GMA+ est absente. Ceci suggère que la tâche 1 est celle qui a le plus permis de mettre en valeur le potentiel des sujets de grande habileté car elle a incité ces sujets à utiliser une plus grande variété de catégories et à une plus grande fréquence. Le fait de trouver des similarités entre des groupements initiaux (tâche 2) semble éloigner l'attention des sujets de grande habileté des détails de solution ou des réflexions sur la nature des problèmes et la porter davantage sur une vision globale des groupements de problèmes.

C'est SAB+ qui, parmi les catégories complexes ignorées des sujets d'habileté moyenne, est la plus utilisée par les sujets de grande habileté, elle est présente chez 5/8 sujets et atteint la plus haute fréquence. Elle est la seule, également, à être présente aux trois tâches expérimentales, son pourcentage de présence diminue toutefois constamment de la tâche 1 à la tâche 3. Pour ce qui est des autres catégories, on peut compter 4 sujets ayant utilisé SE+ et 3 pour GMA+ et IP. Les sujets de grande habileté sont donc capables de faire appel à des processus de pensée complexes qui démontrent une bonne compréhension de la structure des problèmes. Par exemple, donner des explications, valides ou plausibles et détaillées des connaissances ou habileté requises pour résoudre les problèmes (SAB+), posséder des saisies pénétrantes et précises de la nature des problèmes et de leur situation dans les processus d'enseignement et d'apprentissage (IP), fournir des commentaires évaluatifs détaillés sur la méthode de solution d'une façon plausible et valide (SE+) et ajouter à l'identification des domaines mathématiques généraux des explications et spécifications (GMA+). En terminant, il faut se rappeler que même si les sujets d'habileté moyenne n'ont pas utilisé ces quatre catégories, ils ont employé SP (de façon limitée toutefois) qui est également fondé sur la reconnaissance des principes mathématiques.

Experts

Différences significatives. Encore une fois plusieurs catégories voient leur fréquence de présence baisser à la tâche 2 et pour remonter substantiellement à la tâche 3. Celles-ci incluent la catégorie SAB ($F(2,21)=3.68$, $p < 0.05$), dont les distributions sont les seules à être significativement différentes d'une tâche à l'autre (distributions significativement différentes entre les tâches 1 et 2 et les tâches 2 et 3; $p < 0.05$; Tukey). L'utilisation assez forte de cette catégorie aux tâches 1 et 3 suggère que, lors de la classification des problèmes en groupements, les experts ont eu à l'esprit les habiletés requises pour résoudre les problèmes de façon assez comparable aux sujets de grande habileté, excepté pour la baisse beaucoup plus marquée de fréquence d'utilisation à la tâche 2 chez les experts.

Autres catégories dont la distribution est intéressante. Un des aspects frappants des distributions de fréquences des catégories de raisons chez les experts, est que les catégories MPF, SV et IU ne prédominent pas comme chez les autres groupes-habileté. MPF n'est qu'en troisième place à la tâche 1, derrière la catégorie SV en première position et GMA en deuxième. Aux tâches 2 et 3 elle redevient en première position et SV en deuxième. En fait, les catégories MPF, IU, GMA, SV et SP, varient toutes de la même façon d'une tâche expérimentale à l'autre, étant plus élevées aux tâches 1 et 3 et diminuant à la tâche 2. Leurs pourcentages d'utilisation ne descendent jamais au-dessous de 40%. Deux conclusions peuvent être tirées de ces observations. D'abord, (a) tout comme les individus d'habileté moyenne et de grande habileté, les experts se fondent sur des caractéristiques superficielles reliées aux éléments des problèmes (MPF) ou font des allusions vagues concernant la nature des problèmes (IU) et leur solution (SV) lorsqu'ils catégorisent ceux-ci. Toutefois, ce genre de raisons est minoritaire parmi les explications des experts, car (b) ceux-ci utilisent en plus, à toutes les tâches expérimentales, une variété de catégories précises et complexes comme base de catégorisation.

Si nous comparons maintenant les fréquences d'utilisation des catégories de la tâche 1 à la tâche 3 nous remarquons l'utilisation des catégories MPF, IU et SAB a augmenté alors que celle des catégories PS, (LFT), LFT, GMA, RonC, SE, TEA, SP, SAB+ et GMA+ a diminué. SV, IP et SE+ restent à des fréquences à peu près similaires. Ces résultats

nous amènent à penser que lorsque les experts font des redivisions (sous-groupements à partir des groupements initiaux formés à la tâche 1), ils continuent à faire des catégorisations fondées sur les caractéristiques plus fondamentales des problèmes, par exemple, avoir des saisies pénétrantes sur la nature des problèmes et leur situation dans les processus d'enseignement et d'apprentissage (IP) ou fournir des commentaires évaluatifs détaillés et valides sur la méthode de solution (SE+). Toutefois, leur attention aux aspects les plus évidents des problèmes (MPF) augmente de façon considérable. Ceci va dans le même sens que l'hypothèse de Chi, Glaser et Rees (1982) proposant que les catégories se rapportant aux sous-groupements des experts correspondent aux catégories se rapportant aux groupes initiaux des novices. Toutefois, comme nous avons pu le constater cette correspondance n'est pas parfaite, car les experts continuent de référer aux similarités structurales de base des problèmes. Les deux catégories traitant plus directement de la méthode de solution sont légèrement à la baisse, SV — méthode de solution vague, imprécise ou trop générale — et SP — identification précise des éléments ou principes mathématiques entourant la solution. Il est à remarquer que la catégorie PS (pseudostructures) n'a été que très légèrement utilisée à la tâche 1 par les experts, qui ne semblent pas se faire leurrer par ce pseudo-aspect des problèmes.

La diminution (significative) de fréquence observée à la tâche 2 pour la catégorie SAB n'est pas unique. En fait, toutes les catégories des experts ont vu leur pourcentage de présence diminuer lors de la recherche des similarités entre les groupements (tâche 2). Cela indique l'effet inhibiteur qu'a eu la tâche 2 sur les verbalisations des sujets. Même si toutes les catégories ont diminué en fréquence de présence, certaines ont diminué plus que d'autres. MPF, SV et IU demeurent élevées, de même que GMA, RonC, SE, SP et IP. Les experts ont donc utilisé, pour expliquer leurs groupements de problèmes, des raisons fondées sur des caractéristiques superficielles (MPF, SV et IU), des éléments intermédiaires impliquant une compréhension modérée (GMA, RonC, SE) et des éléments complexes impliquant une compréhension plus profonde des problèmes (SP, IP) ce, dans des proportions à peu près équivalentes.

Résumé

Tâche 2. Un des résultats les plus clairs lorsque l'on compare les tâches entre elles pour les trois groupes-habilités est l'effet inhibiteur que semble avoir la tâche 2 sur la fréquence de présence d'une majorité de catégories (HM: 9/16; GH: 15/16; E: 16/16), principalement, la catégorie MPF des sujets d'habileté moyenne, les catégories MPF et LFT des sujets de grande habileté et SAB pour les experts. Nous avons expliqué dans le chapitre précédent que les tâches 1 et 3 sont très similaires du fait que dans les deux les sujets doivent prendre un ou des groupements de problèmes et les diviser en sous-groupements. L'action de diviser les groupements implique que le sujet doit porter son attention sur les particularités de chaque problème. La tâche 2 prend une direction tout-à-fait opposée en forçant les sujets à voir les problèmes et groupements de problèmes de façon globale au lieu de chercher ce qui les distingue. Cette dissimilitude dans la nature des deux tâches peut sans doute expliquer en partie les changements dans l'utilisation des raisons données pour expliquer les groupements. La diminution presque généralisée de la fréquence des codes à la tâche 2 peut être aussi expliquée en partie par le nombre moins élevé de commentaires engendrés de façon générale chez les sujets; en fait, seulement 28% à 35% du nombre de segments codés de la tâche 1 sont utilisés à la tâche 2. De plus, comme les problèmes choisis pour notre étude étaient de base et qu'ils provenaient de domaines assez bien définis, il est possible que le nombre similarités possibles aient été plutôt limitées.

Tâches 1 vs 3. Une comparaison des tâches 1 et 3 nous montre que, comparativement à la tâche 1, les sujets d'habileté moyenne ont porté davantage attention à des caractéristiques superficielles et pseudostructures en voulant faire les redivisions de leurs groupements initiaux. Les différences importantes de distribution de fréquence de la catégorie PS entre les tâches 1 et 2 et celle de la tâche 3 semblent indiquer, chez les sujets d'habileté moyenne, des tentatives pour percevoir la structure des problèmes.

La tâche 3 a amené les sujets de grande habileté à porter davantage attention aux caractéristiques superficielles des problèmes, tout en continuant de porter attention aux méthodes de résolution des problèmes (SP). La diminution graduelle de la fréquence d'utilisation de la catégorie GMA* de la tâche 1 à la tâche 3 indique peut-être une

attention moins forte pour les aspects généraux des problèmes. Cependant, contrairement à la diminution graduelle d'utilisation observée pour la catégorie GMA chez les sujets d'habileté moyenne et les sujets de grande habileté, les experts l'utilisent davantage ce qui montre que ceux-ci continuent de garder à l'esprit l'aspect général des problèmes quand ils font des redivisions. De plus, lors de la tâche 3, les experts continuent à se fonder sur les caractéristiques les plus essentielles des problèmes: méthode de solution (SP), nature des problèmes (IP), explication détaillée du domaine des problèmes (GMA+) et de leur difficulté (SE+), toutefois leur attention aux caractéristiques de surface augmente considérablement (MPF). Ce dernier résultat va en partie dans le sens de l'hypothèse de Chi, Glaser et Rees (1982), à savoir que les raisons associées aux groupements de second niveau des experts correspondent à celles des groupements initiaux des novices, parce que les experts se servent davantage des caractéristiques superficielles des groupements pour les catégoriser. La correspondance n'est pas parfaite toutefois, étant donné leur emploi également important de catégories fondées sur la structure des problèmes. En résumé, lorsque nous comparons les tâches 1 et 3 pour tous les groupes-habileté nous remarquons que chacun garde la tendance générale observée aux autres tâches (utilisation unique des caractéristiques superficielles; utilisation de toutes les catégories, mais les plus complexes de façon limitée; utilisation de toutes les catégories), mais qu'ils portent une attention supplémentaire aux caractéristiques de surface des problèmes.

Comparaison entre les trois groupes-habileté à chacune des tâches

Tâche 1

Distributions significatives. Une ANOVA comparant le taux de présence des différents types de raisons données par chacun des trois groupes-habileté pour expliquer les groupements à la tâche 1 (figures 9 et 10), indique, pour 8/16 catégories, des distributions significativement différentes.

Des comparaisons deux à deux entre les catégories montrent des différences significatives entre les sujets d'habileté moyenne et les experts pour les catégories GMA+ ($p < 0.05$; Tukey) et SP ($p < 0.05$; Tukey), de même qu'entre les sujets de grande habileté pour la catégorie GMA+ ($p < 0.05$; Tukey). La fréquence du code GMA est significativement plus faible chez les sujets d'habileté moyenne et de grande habileté que

chez les experts ($p < 0.05$; Tukey). L'utilisation de GMA+ par les experts indique que ceux-ci ne font pas que nommer le domaine mathématique des problèmes, mais donne une explication détaillée de ce dernier. Les sujets de grande habileté sont donc similaires aux sujets d'habileté moyenne en ce qu'ils utilisent peu GMA+ à cette tâche. Toutefois, on doit garder à l'esprit le fait que les sujets d'habileté moyenne n'ont pas utilisé GMA+, car cela peut indiquer que ces derniers ne sont pas capables d'utiliser ce genre de raison explicative pour leurs groupements. L'examen des autres tâches nous éclairera sur ce point.

Tableau 6

Résumé des résultats d'analyse de variance (Kruskal-Wallis).

Code	PS	(LFT)	LFT	MPF	SV	IU	SAB	GMA	RONC	SE	TEA	SP	SAB+	IP	SE+	GMA+
$E_{(2,21)}$	3.7							7.5	4.7	3.6		12.4		4.3	8.7	15.4

Résultats significatifs à $p=0.05$.

Pour ce qui est de la distribution de la catégorie SP, on apprend qu'elle est significativement plus faible chez les sujets d'habileté moyenne que chez les experts (3% contre 60% respectivement). Ceci nous montre que les sujets les moins habiles réfèrent moins aux éléments ou principes mathématiques précis entourant la solution. Les sujets de grande habileté semblent se situer à mi-chemin entre les experts et les sujets d'habileté moyenne pour ce qui est de l'utilisation de la catégorie SP.

La catégorie PS est utilisée de façon comparable par les experts et les sujets d'habileté moyenne (2.5 vs 4%). Les sujets de grande habileté, quant à eux, ont utilisé beaucoup plus de commentaires (17%) fondés sur les aspects mesurables de l'énoncé des problèmes (PS). Cela indique peut-être que plusieurs de leurs tentatives pour traiter de la structure des problèmes n'ont pas réussi. Toutefois, ils réussissent quelques fois à atteindre cet objectif, ce que reflète l'utilisation de catégories telles que SP, SAB+, IP et SE+, qui nécessitent une bonne compréhension des problèmes. Il est à noter que les sujets d'habileté moyenne utilisent très peu PS et les catégories impliquant une bonne compréhension des problèmes (seule SP est utilisée à 3.3%).

Si on regarde maintenant les autres catégories ayant des distributions significativement différente à la tâche 1, on remarque que pour GMA, RonC et SE les sujets de grande habileté ont des distributions intermédiaires aux sujets d'habileté moyenne et aux experts. Leur fréquence d'utilisation des catégories SE+ et IP est beaucoup plus similaire à celle des sujets d'habileté moyenne, qui, il faut noter, n'utilisent pas du tout ces catégories. L'examen de la figure 9 nous permet de visualiser le fait que les sujets de grande habileté se retrouvent de façon constante entre les sujets d'habileté moyenne et les experts pour ce qui est de la présence des codes, là où les distributions sont différentes significativement (excepté pour le code PS où la fréquence est plus élevée que chez les autres sujets).

Autres catégories dont la distribution est intéressante. Les sujets d'habileté moyenne ont été les seuls à ne pas utiliser certaines catégories à la tâche 1. Excepté pour la catégorie (LFT) les raisons absentes des protocoles des sujets moins habiles sont parmi celles qui demandent le plus d'habileté cognitives; GMA+, SE+, SAB+ et IP.

Les trois catégories les plus présentes dans les groupements sont les mêmes pour les sujets moyens et ceux de grandes habileté. La catégorie MPF (autour de 85% pour les deux groupes-habileté) d'abord, puis SV (53% -M et 77%-GH) et IU (46%-M et 55%-GH). Chez les sujets de grande-habileté le pourcentage de présence de la catégorie SV est similaire au pourcentage obtenu par les experts pour la même catégorie, 76-77%. La catégorie SV est celle qui est la plus présente dans les groupements des experts, suivies de GMA, 65% et de MPF et SP au même rang (61% et 60%). Une observation globale des graphiques correspondant aux performances des trois groupes-habileté à la tâche 1 nous montre que plus l'habileté grandit, moins il y a de différences de fréquence entre les catégories les plus utilisées et les autres. Également, plus l'habileté grandit, plus le nombre de catégories atteignant de fortes fréquences dans les groupements est élevé.

Le tableau 7 nous montre que les experts se distinguent des deux autres groupes-habileté en utilisant fréquemment d'autres raisons pour expliquer leurs groupements, SE, GMA et SP, ces dernières demandent davantage d'habileté mathématique que celles employées par les deux autres groupes-habileté: évaluation de la difficulté de la tâche (SE), mention du domaine mathématique des problèmes (GMA) et surtout, l'identification précise des éléments ou principes mathématiques nécessaires à la solution (SP). Lorsque

l'on compare les pourcentages de présence au-dessus de 20%, on réalise qu'une variété de raisons sont présentes chez les sujets de grande habileté et que celles-ci sont similaires à celles utilisées par les experts, la plupart à des fréquences un peu moindres toutefois. Les experts emploient en plus, à ce niveau de fréquence, GMA+ et SE+ qui reflètent des explications détaillées du domaine mathématique d'où proviennent les problèmes et des évaluations élaborées des solutions. Les sujets d'habileté moyenne, quant à eux, se limitent le plus souvent à l'emploi de raisons vagues ou superficielles.

Tableau 7

Types de raisons atteignant les pourcentages de présence les plus élevées dans les groupements de la tâche 1.

<u>Pourcentage de présence</u>	Groupes-habileté		
	Habileté moyenne	Grande habileté	Experts
50% et plus	MPF, SV	MPF, SV, IU	MPF, SV, IU, SE, SP, GMA
20%-49%	IU	SAB, GMA, RonC, SE, TEA, SP	SAB, RonC, TEA, IP, GMA+, SE+

Tâche 2

Différences significatives. À la tâche 2, on ne constate que deux distributions significativement différentes entre les groupes-habiletés (figure 9): pour les catégories de raisons TEA ($F(2,21)=3.80$, $p < 0.05$) et IP ($F(2,21)=3.80$, $p < 0.05$). Les différences entre les sujets de grande habileté et les experts pour IP sont également significatives ($p < 0.05$; Tukey). La catégorie TEA a été utilisée principalement par les sujets de grande habileté (23% des groupements), un peu par les experts (7% des groupements) et pas du tout par les sujets d'habileté moyenne. Cela suggère que l'enseignement reçu est une source de référence importante pour les sujets de grande habileté lorsqu'ils cherchent à trouver les similitudes entre les groupements de problèmes

et que celui-ci joue un rôle actif dans l'organisation des connaissances de ce groupe de sujets. La façon dont on leur présente les matières scolaires semble donc influencer la manière avec laquelle ces sujets perçoivent un domaine. Les sujets d'habileté moyenne, quant à eux, n'y réfère pas du tout à la tâche 2 suggérant que la manière dont on leur a enseigné les mathématiques n'est pas un point de référence pour déterminer les similitudes entre les groupements. Leur organisation des connaissances ne leur permet peut-être pas de voir clairement d'où provient les différentes informations reçues.

Seuls les experts ont utilisé IP (fréquence de 25%) à cette tâche. Pour déterminer les similarités entre les groupements, les experts se sont donc fondés en bonne partie sur des saisies pénétrantes démontrant une compréhension claire de la nature des problèmes et où ces derniers se placent dans les processus d'enseignement et d'apprentissage. Cette caractéristique les démarque de façon significative à cette tâche, des sujets de grande habileté. L'absence, à la tâche 2, de la catégorie IP des protocoles des sujets d'habileté moyenne et de grande habileté, nous fait penser que la nature des problèmes et leur place dans le processus d'apprentissage n'est pas un élément déterminant lorsque ces sujets tentent de trouver les aspects communs de groupements de problèmes. Il reste à savoir si cet état de fait est dû à un manque d'habileté à utiliser les processus cognitifs impliqués dans l'usage de la catégorie IP ou à un manque d'expérience et de connaissances les empêchant de prendre du recul et de se former une perspective générale et personnelle sur l'ensemble des problèmes. La comparaison des fréquences de présence de cette catégorie aux trois tâches et pour les différents groupes-habileté nous aidera à fournir quelques réponses à ce sujet.

Autres catégories ayant des distributions intéressantes. La colonne centrale de la figure 9, représentant les différents groupes-habileté à la tâche 2, nous montre que les sujets de grande habileté se retrouvent, pour plusieurs aspects, en position intermédiaire entre les experts et les sujets d'habileté moyenne. D'abord pour ce qui est du nombre de raisons utilisées pour décrire les groupements. À cette tâche, plus les sujets étaient habiles mathématiquement, plus ils ont utilisé une variété de raisons données pour décrire leurs groupements. Chez les sujets d'habileté moyenne 7 catégories de raisons sont absentes LFT, PS, TEA, GMA+, SE+, SAB+ et IP (GMA+, SE+, SAB+ et IP étaient aussi

absentes à tâche 1). Trois catégories LFT, SE+ et IP sont laissées de côté par les sujets de grande habileté et une seule par les experts, PS. On remarque que toutes les catégories inutilisées par les sujets de grande habileté et les experts le sont aussi chez les sujets moyens.

Tableau 8

Types de raisons atteignant les pourcentages de présence les plus élevées dans les groupements de la tâche 2.

<u>Pourcentage de présence</u>	Groupes-habileté		
	Habileté moyenne	Grande habileté	Experts
50% et plus	MPF, SV	MPF, SV	MPF, SV
20%-49%	IU	SAB, GMA, SE, TEA, SP, IU	RonC, IP, GMA, SE, IU, SP

En cherchant à trouver des similarités entre les groupements, les trois groupes de sujets utilisent tous de façon prédominante les caractéristiques évidentes des problèmes (MPF) ainsi que les aspects vagues de la solution (SV) (tableau 8). Tous utilisent également certains aspects vagues reliés à la nature des problèmes (IU). Pour les sujets d'habileté moyenne, de façon générale, les explications des ressemblances entre groupements sont presque uniquement fondées sur ce genre de raisons plutôt vagues et superficielles. Les sujets de grande habileté prennent en plus en considération quatre autres aspects des problèmes, le domaine mathématique d'où ils proviennent (GMA), la façon dont ces problèmes leur ont été enseigné (TEA), la difficulté des problèmes considérés (en général, SE) et les connaissances ou habiletés requises pour résoudre les problèmes (en général, SAB). Ils se fondent également de façon fréquente sur les éléments ou principes mathématiques nécessaires à la solution (SP). Les experts considèrent tous les aspects mentionnés précédemment pour les deux autres groupes-habileté, sauf TEA et SAB. L'évaluation de l'influence de l'enseignement sur leurs catégorisations (TEA) et des connaissances et habiletés requises pour résoudre les problèmes pour trouver les

similarités entre groupements est donc bien particulier aux sujets de grande habileté à la tâche 2. Ce qui différencie les experts des deux autres groupes-habilité est leur emploi, en plus des autres raisons précédemment mentionnées, de certaines réflexions personnelles sur les catégorisations (RonC) et des saisies pénétrantes montrant une compréhension claire de la nature des problèmes et où ces derniers se placent dans les processus d'enseignement et d'apprentissage. Tout ces groupes-habilité emploient d'autres types de catégories pour décrire les similarités entre groupements, mais celles que nous venons de mentionner représentent l'essentiel des explications fournies par chaque groupes-habilité. Ces descriptions nous permettent de réaliser que la nature des catégories employées par les sujets de grande habileté ressemble à la fois à celles des sujets d'habileté moyenne — par leur emploi supérieur des catégories MPF, SV et IU et celles des experts — par leur diversité et leur traitement d'aspects plus structuraux des problèmes.

Les sujets de grande habileté se trouvent également en position intermédiaire entre les experts et les sujets d'habileté moyenne quant à la fréquence d'utilisation de plusieurs catégories, GMA, RonC, SE, SP et GMA+. Ces raisons obtiennent, chez les experts, des pourcentages de présence supérieurs à 20% pour la plupart (excepté pour IP qui est inutilisé dans cette tâche par les sujets de grande habileté et GMA+ qui ne revient qu'à 7% dans les groupements chez les sujets experts). Ceci indique que pour presque toutes les raisons qui décrivent le mieux les groupements des experts, les sujets de grande habileté suivent un patron correspondant, mais à un degré plus bas. Chez les sujets d'habileté moyenne un seul code se situe à une fréquence intermédiaire à ceux des sujets de grande habileté et des experts, SAB. Les experts quant-à-eux, sont en position intermédiaire pour quatre catégories, SV, IU, TEA et SAB+. Pour sept codes, deux des trois groupes-habilité obtiennent une fréquence d'utilisation équivalente: PS, (LFT), LFT, MPF, SV, IP et SE+.

Tâche 3

Distributions significatives. La tâche 3 met en évidence des résultats très semblables à la tâche 1; on observe des différences significatives de distributions pour les mêmes raisons.

Tableau 9

Résumé des résultats d'analyse de variance (Kruskal-Wallis).

Code	PS	(LFT)	LFT	MPF	SV	IU	SAB	GMA	RONC	SE	TEA	SP	SAB+	IP	SE+	GMA+
$E_{(2,21)}$	3.6							9.2	3.8	5.2		5.3		10.1	4.2	6.4

Résultats significatifs à $p=0.05$.

Pour ce qui est de six des huit types de raisons ayant des distributions significativement différentes, GMA, RonC, SE, SE+, IP et SP, les sujets de grande habileté ont des fréquences de présence intermédiaires aux sujets d'habileté moyenne et aux experts. Les fréquences de GMA, RonC, SE+ et IP, chez les sujets de grande habileté, sont assez faibles (3 à 10%), près de celles que l'on retrouve chez les sujets d'habileté moyenne qui toutefois, n'ont pas du tout employé les codes IP et SE+. Du côté de SE et SP, les fréquences sont plus élevées (40 et 27% respectivement) et plus semblables à ce que l'on voit chez les experts.

On ne retrouve aucun GMA+ chez les sujets d'habileté moyenne et de grande habileté à la tâche 3. Avec des comparaisons deux à deux, on observe des différences significatives pour IP entre les experts et les sujets d'habileté moyenne ($p < 0.05$; Tukey). La présence importante de la catégorie IP chez les experts indique qu'ils sont capables d'avoir des saisies pénétrantes et définis qui démontrent une compréhension claire de la nature des problèmes et où ils se situent dans le processus d'apprentissage et d'enseignement. Cela peut aussi refléter une conscience et connaissance des bases de leurs propres systèmes de catégorisation qui leur permet de donner un aperçu général de ce système. L'utilisation de IP par les sujets de grande habileté nous montre que ces derniers peuvent également avoir de tels saisies pénétrantes; toutefois le faible taux de présence (3% de présence dans les groupements, par 3/8 sujets) suggère que ce ne sont peut-être pas tous les sujets de grande habileté qui peuvent atteindre ce niveau de compréhension.

Autres patrons de distribution intéressants. En plus des six catégories pour lesquelles les sujets de grande habileté se situent à un niveau intermédiaire entre les experts et les sujets d'habileté moyenne quant à la fréquence des codes, ils le sont aussi pour trois

autres, (LFT), IU et SAB+, dont les distributions ne sont pas significativement différentes. Pour le code LFT ils sont aussi en position intermédiaire, mais ce sont les sujets d'habileté moyenne, au lieu des experts, qui obtiennent les fréquences les plus élevées. Les sujets de grande habileté sont donc en position intermédiaire pour 10 des 16 types de raisons possibles.

Les quatre codes GMA+, SE+, SAB+ et IP sont encore une fois absents des protocoles des sujets moyens. Ces codes impliquent tous une compréhension parfaite des problèmes. GMA+ est également absent des protocoles des sujets de grande habileté. Chez les experts, ce sont PS et (LFT), deux catégories fondées sur des aspects superficiels des problèmes qui ne sont pas utilisées.

Les experts utilisent à un degré de présence de 20% ou plus 11/16 raisons différentes pour expliquer leurs groupements lors des redivisions de problèmes, les sujets de grande habileté 7/16 et les sujets d'habileté moyenne 4. Les membres des trois groupes-habilités ont fourni des explications basées sur des caractéristiques évidentes des problèmes dans cette tâche plus que dans toutes autres (pourcentage de présence plus élevé de MPF). Le pourcentage de commentaires vagues sur la nature des problèmes (IU) est également plus élevé chez les experts et les sujets de grande habileté à la tâche 3 que dans les tâches 1 et 2, alors que chez les sujets moyens il est à peu près équivalent.

Lors de la redivision des groupements initiaux, les sujets de grande habileté se sont donc concentrés sur l'emploi de sept catégories MPF, SV, IU, SAB, SE, SP et PS en augmentant leur fréquence d'utilisation et diminuant celle des autres catégories. Tout comme les sujets moyens, les distributions plus élevées sont celles des catégories MPF, SV et IU, ce qui montre que les sujets de grande habileté ont principalement porté attention aux caractéristiques superficielles des groupements de problèmes lors de la redivision de leurs groupements initiaux. L'utilisation élevée de la catégorie PS à la tâche 3, par les sujets de grande habileté et les sujets d'habileté moyenne, nous fait conclure que cette étape de redivisions des groupements amènent ces sujets à davantage fonder leurs catégorisations sur les quantités mesurables explicitement décrites dans les problèmes, peut-être dans un effort pour traiter du processus de solution des problèmes. Ce qui différencie les sujets de grande habileté des moins habiles encore une fois, c'est qu'ils se fondent également sur d'autres raisons de catégorisation impliquant des degrés supérieurs

de compréhension de la structure des problèmes. Les sujets de grande habileté évaluent, de façon imprécise toutefois, les connaissances ou habiletés requises pour solutionner les problèmes (SAB) ainsi que la difficulté des problèmes (SE) et portent leur attention aux méthodes de résolution des problèmes (SP). Les experts se distinguent, dans cette tâche, des sujets de grande habileté et d'habileté moyenne par leur emploi fréquent de raisons fondées sur l'explication de certaines de réflexions personnelles sur leurs groupements (RonC), sur les domaines mathématiques généraux des problèmes (GMA) et des descriptions de ces domaines mathématiques (GMA+), des évaluations subjectives de la méthode de solution en fournissant des explications démontrant une compréhension claire du pourquoi de ces évaluations (SE+) et sur des saisies pénétrantes et définis montrant une compréhension claire de la nature des problèmes et où ces derniers se situent dans les processus d'enseignement et d'apprentissage (IP).

Tableau 10

Types de raisons atteignant les pourcentages de présence les plus élevées dans les groupements de la tâche 3.

<u>Pourcentage de présence</u>	Groupes-habileté		
	Habileté moyenne	Grande habileté	Experts
50% et plus	MPF, SV	MPF, SV, IU	MPF, SV, IU, GMA, SP
20%-49%	PS, IU	PS, SAB, SE, SP	SAB, RonC, SE, IP, SE+, GMA+

Le fait que les fréquence de présence des codes MPF, IU et SAB soient élevé à la tâche 3, alors que les codes à la baisse chez les sujets de grande habileté et moyens sont parmi ceux qui demandent le plus de réflexions — GMA+, SAB+ et SP, plus IP (pour les sujets de grande habileté seulement) — ou de capacités d'évaluation — TEA (pour les sujets de grande habileté) — peut signifier que rediviser les groupements et fournir de nouvelles explications amènent ces sujets à porter leur attention sur des éléments moins

fondamentaux et plus superficiels des problèmes, délaissant davantage les réflexions sur la méthode de solution. Cette tendance est également présente chez les experts, mais avec moins de force.

Résumé

En général la tâche 1 est celle où les raisons données par les sujets pour expliquer leurs groupements étaient en plus grand nombre. C'est aussi la tâche où la fréquence des codes était la plus élevée pour les sujets de grande habileté et les experts. Ces deux observations peuvent sans doute s'expliquer par la nouveauté de la tâche; tout restait à dire sur les problèmes qui étaient présentés.

Il est intéressant de comparer la fréquence des codes aux tâches 1 et 3 étant donné que celles-ci sont de nature très similaire: toutes les deux impliquent la sous-division de groupements en sous-groupements. Dans les trois groupes-habileté, le code MPF est plus fréquent à la tâche 3 qu'à la tâche 1, alors que le code SV reste dans les mêmes proportions. On remarque une plus faible utilisation des catégories GMA et RonC dans les trois groupes à la tâche 3 comparé à la tâche 1. La diminution de l'utilisation de GMA peut être assez bien expliquée par le fait que le domaine mathématique général des groupements initiaux et des groupements subséquents risque d'avoir déjà été mentionné, étant donné que chaque groupements a déjà été divisé et peut-être même sous-divisé à la tâche 1. La demande explicite par l'expérimentatrice de faire des groupements (tâche 3) s'ajoutant au choix de plus en plus restreint de bases de catégorisations (étant donné que cela a déjà été fait à une, deux ou trois reprises) peuvent avoir provoqué une diminution du nombre de réflexions sur les groupements des sujets (RonC). Finalement, la baisse de fréquence des catégories LFT et (LFT)—(GH seulement) pour les sujets d'habileté moyenne et de grande habileté, suggère qu'avec le temps ces sujets améliorent leur capacité à trouver une appartenance à chaque problème ou groupements de problèmes et de se rappeler les noms de domaines mathématiques qu'ils avaient oubliés aux tâches précédentes.

Les experts utilisent la catégorie PS à la tâche 1 de façon limitée, puis ne l'utilisent plus du tout aux autres tâches. Ceci peut indiquer que certains experts se sont laissés leurrer par la pseudostructure des problèmes à la première tâche (une minorité d'experts),

mais que déjà aux deuxième et troisième tâches, ils se sont dirigés vers des caractéristiques plus essentielles des problèmes et n'ont plus utilisé la catégorie PS. Les sujets d'habileté moyenne n'ont pas beaucoup utilisé la catégorie PS aux tâches 1 et 2, mais davantage à la tâche 3. Le fait qu'ils n'ont à peu près pas employé de raisons démontrant une bonne compréhension des problèmes et qu'ils se concentrent sur des catégories de raisons telles que MPF, SV et IU, nous font penser à une interprétation très différente de celle des experts. Les sujets d'habileté moyenne auraient généralement de la difficulté à saisir la structure des problèmes, et si certains ont tenté d'arriver à cet objectif, ils n'ont pu, pour la plupart, que découvrir la pseudostructure des problèmes après avoir travaillé sur ces derniers un certain temps (tâche 3). Le fait que les sujets de grande habileté utilisent davantage PS à la tâche 3 qu'à la tâche 1, combiné à leur concentration plus forte sur les catégories MPF et SV et à leur utilisation moins fréquente de la catégorie SP, nous fait penser que ces sujets à la tâche 3 ont eu tendance à se fonder sur les pseudostructures et autres caractéristiques superficielles des problèmes à la tâche de redivision des groupements. Toutefois ils utilisent également des types de raisons démontrant une bonne compréhension de la structure interne des problèmes.

Les quatre catégories GMA+, SE+, SAB+ et IP sont absentes des trois tâches pour les sujets d'habileté moyenne ce qui indique qu'ils ne saisissent pas tous les aspects pertinents reliés au problème et sa solution, même si quelques fois ils peuvent identifier certains éléments de la solution (utilisation limitée de SP). La catégorie IP est la seule catégorie dont la distribution est significativement différente entre les groupes-habileté pour les trois tâches expérimentales. Des comparaisons deux à deux ont révélé des différences significatives entre les sujets de grande habileté et les experts à la tâche 2 et à la tâche 3, entre les sujets d'habileté moyenne et les experts ($p < 0.05$; Tukey). Les distributions des experts et des sujets d'habileté moyenne sont clairement différentes, car ces derniers n'ont pas du tout utilisé cette catégorie. Les pourcentages de présence des catégories IP et SE+ sont très faibles chez les sujets de grande habileté (IP: 10%: tâche 1 et 3%; tâche 3; SE+: 3% tâches 1 et 2), comme c'est le cas chez les sujets d'habileté moyenne (0%). Toutefois, le fait que les catégories SE+ et IP aient été présentes dans deux des trois tâches chez les sujets de grande habileté — montrant ainsi leur habileté à utiliser ces catégories révélant une bonne compréhension de la nature des problèmes et des

difficultés qu'implique leur résolution — et pas du tout chez les sujets d'habileté moyenne, place les sujets de grande habileté dans une position intermédiaire aux deux autres groupes-habileté quant à l'utilisation de ces quatre types de raisons plus complexes. On peut penser que l'absence des catégories GMA+, SE+, SAB+ et IP dans les explications des sujets d'habileté moyenne reflète un manque d'habileté à utiliser certains processus cognitifs complexes ou encore, des connaissances de bases insuffisantes.

La distribution de la catégorie TEA est significativement différente entre les groupes-habileté à la tâche 2 seulement. Il est intéressant de remarquer que le fait de rechercher les similitudes contribue à une diminution de la présence de la catégorie TEA chez les experts, tandis que de rediviser les groupes à la tâche 3 les amènent à utiliser davantage cette même catégorie, alors que chez les sujets de grande habileté on observe une diminution graduelle de l'utilisation de cette catégorie de la tâche 1 à la tâche 3. Il est possible que la diminution de présence de TEA à la tâche 2 soit dû au fait que les experts se fondent davantage sur leurs propres visions des choses pour trouver les similitudes, en rattachant les problèmes à des domaines mathématiques plus près de leur expérience professionnelle et donc plus vastes que ceux qu'on leur avait enseigné au niveau secondaire ou qu'ils enseigneraient à ce niveau scolaire. Aux tâches 1 et 3 les références à l'enseignement sont plus nombreuses chez les experts, peut-être parce que diviser les problèmes les amène à davantage penser aux distinctions entre problèmes et à la manière de présenter ces distinctions, donc à l'enseignement reçu et à la manière d'enseigner les mathématiques. Les sujets de grande habileté, quant à eux, font plusieurs références à l'enseignement aux tâches 1 et 2, mais très peu à la tâche 3. Peut-être que le fait de rediviser les groupements de problèmes pousse ces sujets à porter davantage leur attention sur les aspects spécifiques des problèmes plutôt que globaux, d'où la diminution de TEA et de la catégorie GMA et l'augmentation des raisons fondées sur les aspects superficiels des problèmes, MPF et PS par exemple. Le fait d'avoir à choisir des groupements pour chaque problème (tâche 1) ou de trouver des similarités entre groupements (tâche 2) fait appel à des processus plus globaux, d'où l'augmentation de TEA (et de GMA aussi). Une chose est sûre, c'est que les élèves de grande habileté font clairement davantage de référence à l'enseignement que leurs pairs moins habiles qui emploient les références à l'enseignement que dans 8% (maximum) des raisons fournies pour expliquer leurs

groupements. Peut-être que la structure des mathématiques fournie par l'enseignement n'a pas été pleinement intégrée lors de l'apprentissage des sujets moyens.

Résumé des Résultats des deux Analyses Précédentes

La figure 9 nous permet de résumer les principales caractéristiques observées de chaque groupe-habilité en relation avec les autres. Il y a trois graphiques par groupe-habilité et ils correspondent aux résultats des trois tâches expérimentales.

La comparaison des résultats aux trois tâches nous fait réaliser la nature distinctive de la tâche 2 (trouver des similarités entre les groupements) où, chez tous les groupes-habilités, on observe un effet inhibiteur sur l'emploi des catégories de raisons. Cette inhibition se fait sentir à la fois sur le nombre de catégories utilisées, car davantage de catégories sont absentes des protocoles, et sur les pourcentages de présence, car les catégories utilisées le sont moins fréquemment. En revanche, les résultats aux tâches 1 et 3 semblent posséder plusieurs caractéristiques communes, par exemple, le nombre de raisons utilisées est presque similaire, les fréquences d'utilisation des raisons sont élevées et les mêmes raisons obtiennent des distributions significativement différentes lorsque l'on compare les trois groupes-habilité. La tâche 1 semble toutefois avoir amené les sujets à utiliser plus fréquemment une plus grande variété de catégories. Une explication plausible serait que la tâche 1 était la première fois que les sujets travaillaient avec les problèmes et les divisaient.

Une comparaison globale des résultats montre une certaine gradation dans les patrons des fréquences d'utilisation des catégories, des sujets d'habileté moyenne aux experts, en passant par les sujets de grande habileté (figure 9). Les sujets de grande habileté semblent se situer à un niveau intermédiaire entre les experts et les sujets d'habileté moyenne et avoir adopté des caractéristiques de ces deux groupes-habilité extrêmes. Tous les groupes-habilité utilisent des caractéristiques superficielles pour catégoriser leurs problèmes, par exemple, MPF, SV et IU, mais plus les sujets sont habiles mathématiquement plus ils utilisent en plus une variété de raisons pour expliquer leurs groupements de problèmes, et plus ces raisons sont fondées sur les caractéristiques reliées à la structure des problèmes. Lorsque l'habileté mathématique augmente on remarque donc de moins grands écarts entre la fréquence d'utilisation des différentes catégories de

raisons. Les catégories montrant une certaine compréhension des problèmes (SAB, GMA, RonC, SE, TEA) sont de plus en plus présentes, de même que celles démontrant une bonne compréhension de la structure des problèmes (SP, SAB+, IP, SE+, GMA+). Ces dernières, fondées sur la structure des problèmes, sont présentes chez les sujets de grande habileté, ce qui les distingue des sujets d'habileté moyenne, mais, encore une fois, pas au même degré que les experts.

Les sujets d'habileté moyenne utilisent surtout les caractéristiques superficielles des problèmes et des approximations vagues de la solution et de la nature des problèmes comme base pour regrouper ces derniers. Même s'ils considèrent la méthode de solution dans leurs groupements, ils en ont le plus souvent qu'une idée imprécise et intuitive. Ces résultats sont similaires à ceux présentés par plusieurs études majeures (Chartoff, 1977; Chi, Feltovich & Glaser 1981; Chi, Glaser & Rees; Schoenfeld & Hermann, 1982; Silver, 1979), comme étant caractéristiques des sujets novices : une dépendance sur les caractéristiques de surface des problèmes lors des catégorisations et des organisations moins complexes de problèmes que les experts (Chi et al. 1982), même si pour ce dernier aspect, peu de résultats sont disponibles. Nos sujets d'habileté moyenne se comparent donc assez bien avec les novices décrits plus haut, à part pour le fait qu'ils sont du niveau secondaire alors que, dans la plupart des études, les novices sont des étudiants universitaires du baccalauréat. Toutefois, le degré d'expertise des sujets étant relatif à la difficulté du matériel des tâches expérimentales, nous pouvons dire qu'ils sont comparables. En effet, nous avons présentés des problèmes mathématiques de niveau secondaire à nos sujets d'habileté moyenne (qui venaient de compléter ce niveau), alors que les novices universitaires des études mentionnées plus haut ont travaillé sur des problèmes de mathématiques plus avancés.

Seulement 3/8 des sujets d'habileté moyenne ont utilisé la catégorie SP, ce qui indique que certains sont capables de référer à des raisons impliquant une habileté mathématique plus complexe, mais il semble qu'ils soient une minorité. La plupart des catégories de raisons complexes n'ont pas été utilisées, ce contrairement aux sujets de grande habileté qui ont utilisé toutes les catégories. Les plus complexes sont toutefois utilisées de façon limitée. À travers les tâches, les catégories les plus utilisées sont encore une fois MPF, SV et IU, mais plusieurs autres catégories sont utilisées à fréquence de plus de 20%.

Cependant, chez les experts, les catégories MPF, SV et IU ne prédominent pas autant sur les autres catégories. Ils utilisent toute la variété de raisons et les plus complexes sont utilisées plus fréquemment que chez les autres sujets.

Comparaisons entre les différents groupes-habilité pour l'ensemble des tâches 1,2 et 3

Différences significatives. Les distributions comparant la présence des raisons pour l'ensemble des trois tâches (figure 10) entre les trois groupes-habilité, sont significativement différentes pour 11/16 catégories.

Tableau 11

Résumé des résultats d'analyse de variance (Kruskal-Wallis).

Code	PS	(LFT)	LFT	MPF	SV	IU	SAB	GMA	RONC	SE	TEA	SP	SAB+	IP	SE+	GMA+
$E_{(2,21)}$	10.1			4.5	4.3			7.8	6.2	4.0	4.4	14.8		12.0	6.3	32.9

Résultats significatifs à $p=0.05$.

Des comparaisons deux à deux indiquent des différences significatives entre les sujets moyens et les experts et entre les sujets de grande habileté et les experts pour la catégorie GMA+ ($F = (3,58) = 5.54$, $p < 0,05$; Tukey). Les experts diffèrent donc des deux autres groupes-habilité par leur emploi de raisons basées sur le domaine mathématique général des problèmes et incluant des explications sur ce domaine. Les différences significatives entre les sujets moyens et les experts pour les catégories SP ($(3,58) = 6.52$, $p < 0.05$) et IP ($(3,58) = 4.72$, $p < 0.05$), nous montrent encore que les sujets de grande habileté se trouvent en position intermédiaire entre les experts et les sujets d'habileté moyenne pour l'emploi de raisons fondées sur l'identification précise des éléments ou principes mathématiques nécessaires à la solution et sur des saisies pénétrantes et définies montrant une compréhension claire de la nature des problèmes et où ces derniers se situent dans les processus d'enseignement et d'apprentissage. Ce sont les experts qui dominent pour leur utilisation de ce genre de raisons pour expliquer les groupements.

La comparaison des fréquences de présence des catégories pour les différents groupes-habilité nous permet de noter que pour 9/11 des cas où les distributions sont significatives, les sujets d'habileté moyenne ont obtenus les plus faibles fréquences d'utilisation, soit toutes les catégories sauf MPF et PS. Toutes ces catégories à faible

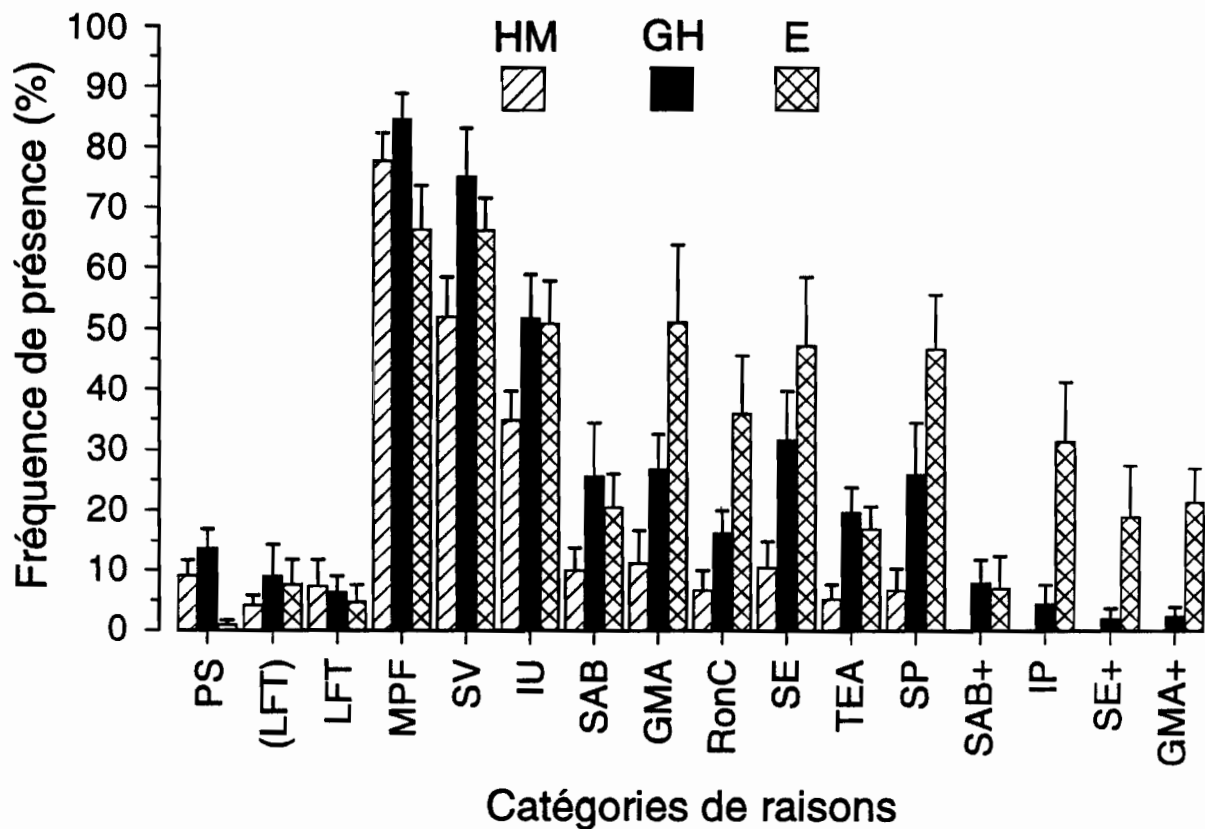


Figure 10: Fréquence à laquelle les catégories de raison apparaissent dans les explications relatives aux groupements de problèmes pour l'ensemble des trois tâches. La présence ou non de chaque catégorie dans les explications des groupements est exprimée sous forme de proportion du nombre maximum de groupements pour chaque sujet. HM=habileté moyenne; GH=grande habileté; E=Expert. Voir le tableau 5 pour une explication des codes en abscisse. Les barres d'erreur représentent E.S.M.

fréquence demandent des habiletés cognitives complexes, alors que MPF et PS sont basées sur les critères les plus évidents. Les sujets de grande habileté, quant à eux, se trouvent une fois de plus en position intermédiaire à celle des deux autres groupes-habileté pour l'emploi de sept catégories, GMA, GMA+, RonC, SE, SE+, SP et IP. Ils dominent pour la catégorie TEA et devancent légèrement les experts pour la catégorie SAB+. La figure 10 nous permet de visualiser cette relation, plus précisément à partir de la raison explicative GMA et pour les autres raisons vers la droite du graphique. Nous observons également que l'emploi de toutes ces catégories de raisons implique un minimum de compréhension de la part des sujets, si ce n'est pas une compréhension parfaite de la structure des problèmes (SP, SAB+, IP, SE+ et GMA+).

Parmi les catégories ayant des distributions significativement différentes et dont l'écart entre experts et sujets d'habileté moyenne est le plus fort, trois ne furent aucunement utilisées par ces derniers: GMA+, SE+ et IP* (* = $p < 0.05$). Pour ce qui est des quatre autres, GMA, RonC, SE et SP, les pourcentages de présence dans les groupements varient de 7 à 11% chez les sujets d'habileté moyenne, de 16 à 31% chez les sujets de grande habileté et de 36 à 51% chez les experts. L'utilisation de toutes ces catégories impliquent, de par leurs définitions, des habiletés métacognitives et d'évaluation, de synthèse et la capacité à appliquer des connaissances préalablement acquises. Les sujets d'habileté moyenne quant-à-eux, possèdent une capacité limitée à employer des processus métacognitifs tels que l'évaluation et la comparaison. Ceci est reflété par leur usage des raisons SE, GMA ou encore SAB (non significatif). En examinant l'ensemble des résultats nous constatons donc, que plus l'habileté mathématique et l'expérience augmente, plus ces processus métacognitifs sont utilisés de façon efficace et productive. Il est possible de fournir au moins deux explications du peu de présence, chez les sujets d'habileté moyenne, des catégories impliquant davantage d'habiletés métacognitives. D'abord, ces derniers ne savent peut-être pas comment les utiliser de manière efficace, ensuite, leurs connaissances de base limitées ou mal organisées peuvent les empêcher de se servir efficacement de ces habiletés métacognitives (Chi, Hutchinson & Robin, 1989; Schneider, Körkel & Weinert, 1989). Les fréquences d'utilisation intermédiaires obtenues par les sujets de grande habileté pour la plupart de ces catégories, nous montrent que ceux-ci possèdent ces habiletés et qu'ils savent mieux utiliser leurs capacités

métacognitives, d'évaluation, de synthèse et d'application des connaissances nouvellement acquises que les sujets d'habileté moyenne. Cette dernière caractéristique, nous fait attribuer l'utilisation moins fréquente que chez les experts, de ces habiletés métacognitives, à des connaissances de base plus limitées et moins bien organisées que ces derniers. La présence accrue dans les groupements des catégories impliquant des processus métacognitifs complexes à mesure que l'habileté mathématique des sujets augmente, montrent des évidences supplémentaires du lien important existant entre des connaissances bien organisées et fournies et l'utilisation d'habiletés métacognitives complexes et efficaces.

Le fait que les sujets de grande habileté et les sujets moyens diffèrent quant à l'utilisation de la catégorie SV mérite attention. En effet, comme la connaissance de la méthode de résolution est souvent conçue comme un des éléments les plus utilisés par les experts, les approximations, vagues mais présentes, faites plus souvent par les sujets de grande habileté indiquent une certaine ressemblance avec les experts, de même que leur utilisation de la catégorie SP (M:6%, GH:26% et E:47%) qui est caractéristique des experts. Nous avons déjà discuté des différences d'utilisation de la catégorie TEA par les sujets moyens et de grande habileté dans la tâche 2. Le fait que l'usage de cette catégorie demeure significativement différent lorsque les trois tâches sont combinées renforce l'idée que les sujets de grande habileté semblent retirer davantage de la manière dont on leur a enseigné les mathématiques que les sujets d'habileté moyenne, car ils sont capables de davantage utiliser la structure ainsi acquise et de l'appliquer lors de l'organisation de leur problèmes en groupements. Les experts semblent globalement utiliser TEA en proportion comparable à celle des sujets de grande habileté.

Nous avons précédemment mentionné que, pour les codes MPF* et PS*, ce sont les pourcentages de présence des sujets de grande habileté et des experts qui sont les plus élevés. Fait surprenant, ce sont les sujets de grande habileté qui possèdent le plus haut taux de présence pour ces deux catégories, avec les sujets d'habileté moyenne en deuxième place. Ceci met en relief la place importante qu'ont pris les caractéristiques évidentes des problèmes lors de l'explication des groupements des sujets de grande habileté et d'habileté moyenne. Toutefois, comme nous l'avons signalé précédemment, cette ressemblance est relative, étant donné que, comme les experts et à l'inverse des

sujets d'habileté moyenne, les sujets de grande habileté utilisent une variété de catégories pour expliquer leurs groupements.

Autres catégories ayant des distributions intéressantes. Parmi les catégories dont les distributions ne sont pas significativement différentes (toutes tâches combinées) — LFT, (LFT), SAB et SAB+ — seule la distribution de SAB s'est révélée différente dans un cas: la comparaison des trois tâches chez les experts. L'absence de différence entre les groupes-habileté quant à l'utilisation de la catégorie SAB, montre que chacun tente d'évaluer les méthodes de solution, selon leurs propres critères bien entendu. En effet, si tous les groupes de sujets font des commentaires évaluatifs, les experts et les sujets de grande habileté semblent davantage se fonder sur des critères pesés et objectifs plutôt que seulement subjectifs. Même si la distribution de SAB+ ne semble pas significativement différente entre les groupes-habiletés, le fait que les sujets d'habileté moyenne ne l'emploient pas du tout indique leur difficulté à donner des explications valides et détaillées des connaissances et habiletés requises à la solution. Finalement, l'usage similaire des catégories de LFT et (LFT) par tous les sujets indique que dans chaque groupe-habileté il y a eu un nombre comparable d'oubli de nom ou de raison de catégorisation. Ceci montre que de tels oublis font partie du processus normal de catégorisation de problèmes et qu'ils ne sont pas des facteurs déterminant la performance des différents groupes-habileté.

Le fait que les experts soient les seuls à utiliser la catégorie GMA dans au moins 50% de leurs groupements est particulièrement intéressant du fait que cette catégorie traite des domaines mathématiques généraux touchés par les problèmes. Comme GMA ne représente que 26% des catégories employées par les sujets de grande habileté et 11% de celles utilisées par ceux d'habileté moyenne, on peut émettre l'hypothèse que les experts relient davantage les problèmes aux domaines auxquels ils appartiennent. Le fait que les catégories MPF, SV et IU soient parmi les plus utilisées par tous les groupes-habileté indiquent la présence de beaucoup de commentaires vagues ou impliquant des éléments superficiels des problèmes dans les explications fournies par les sujets. Ceci converge avec d'autres résultats indiquant que des sujets de toutes les habiletés font des

commentaires basés sur des critères plus évidents (Chi, Feltovich & Glaser, 1981; Chi, Glaser & Rees, 1982).

Tableau 12

Types de raisons atteignant les pourcentages de présence les plus élevées dans les groupements des tâches 1-3.

<u>Pourcentage de présence</u>	Groupes-habileté		
	Habileté moyenne	Grande habileté	Experts
50 % et plus	MPF, SV	MPF, SV, IU	MPF, SV, IU, GMA
20 %-49 %	IU	SAB, GMA, SE, SP, TEA	SAB, RonC, SE, SP, IP, GMA +

Parmi les raisons de catégorisation les plus fréquentes (plus de 50%), deux sont communes aux trois groupes-habileté, MPF et SV, qui se fondent les caractéristiques superficielles des problèmes ou éléments vagues de leur solution. Tous utilisent également certains aspects vagues reliés à la nature des problèmes (IU). Pour les sujets d'habileté moyenne, de façon générale, les explications des groupements sont presque uniquement fondées sur ce genre de raisons plutôt vagues et superficielles. Les sujets de grande habileté prennent aussi en considération cinq autres aspects des problèmes lors de leurs explications des groupements, le domaine mathématique d'où ils proviennent (GMA), la façon dont ces problèmes leur ont été enseigné (TEA), la difficulté des problèmes considérés (SE), les connaissances ou habiletés requises pour résoudre les problèmes (SAB) et les éléments ou principes mathématiques nécessaires à la solution (SP). Les experts considèrent tous les aspects mentionnés précédemment pour les deux autres groupes-habileté, sauf TEA. L'évaluation de l'influence de l'enseignement sur leurs catégorisations (TEA) est employée de façon bien particulière par les sujets de grande habileté lorsque l'on considère l'ensemble des trois tâches. Ce qui différencie les experts des deux autres groupes-habileté est leur emploi, en plus des autres raisons précédemment

mentionnées, de certaines réflexions personnelles sur les catégorisations (RonC), des saisies pénétrantes montrant une compréhension claire de la nature des problèmes et où ces derniers se placent dans les processus d'enseignement et d'apprentissage (IP) et de catégorisations basées sur le domaine mathématique des problèmes ainsi que l'explication de ce domaine (GMA, GMA+). Les raisons que nous venons de mentionner représentent l'essentiel des explications fournies par chaque groupes-habilité. Ceci nous permet de réaliser que globalement, c'est-à-dire lorsque l'on considère les trois tâches combinées, on observe une gradation, à mesure que l'habileté grandit, de l'emploi presque unique de raisons superficielles pour expliquer les problèmes vers l'emploi d'une variété de catégories qui demandent des habiletés et une compréhension de plus en plus complexes.

Nombre de Sujets de Chaque Groupe-Habilité ayant Utilisé Chaque Catégorie

En observant le graphique décrivant le nombre de sujets de chaque groupe-habilité utilisant chaque catégorie (figure 8), il est surprenant de voir que ce sont les sujets du groupe de grande habileté qui ont été les plus nombreux à employer 13 des 16 catégories.

Une comparaison de la figure 8 avec la figure 10, illustrant les taux de présence des catégories dans les groupements pour les trois tâches combinées, montre une assez bonne correspondance entre le taux de présence des catégories dans les groupements et le nombre de sujets de chacun des groupes-habilité à avoir utilisé ces catégories. Pour la catégorie de raison PS, la figure 10 indique très peu de différences entre les sujets d'habileté moyenne et ceux de grande habileté. L'examen du nombre de sujets ayant employé les pseudostructures dans chacun de ces groupes-habilité, nous indique que le nombre de sujets de grande habileté ayant employé de telles raisons est bien plus élevé que le nombre de sujets d'habileté moyenne les ayant employées. La comparaison des deux graphiques pour les catégories GMA et SE nous indique que les sujets de grande habileté ressemblent plus aux experts que nous le laissait supposer la figure 10, car le nombre de sujets de grande habileté ayant fait référence au domaine mathématique des problème ou aux aspects évaluatifs de la solution (SE), est presque semblable à celui des experts. Finalement, c'est pour l'utilisation de la catégorie SAB+ que nous voyons le moins de correspondance entre les deux figures. Alors que l'analyse des taux de présence nous fait arriver à des résultats analogues pour les sujets de grande habileté et les experts

quant à l'utilisation de SAB+, l'analyse du nombre de sujets de chaque groupe-habilité ayant en fait utilisé cette catégorie aux trois tâches nous révèle que les explications détaillées des connaissances ou habileté requises à la solution des problèmes ont été fournies par la majorité des sujets de grande habileté en faible proportion, mais par une minorité d'experts de façon très élaborée. Ces spécifications ont certainement leur valeur et l'analyse du nombre de sujets de chaque groupe-habilité à avoir utilisé les catégories devrait, dans certain cas, être pris en considération.

Influence de la Forme Externe des Problèmes

En présentant nos problèmes sous différentes formes (symbolique, graphique, écrite), nous voulions tester si celles-ci influençaient les bases selon lesquelles les sujets regroupent les problèmes, toutefois, l'examen des résultats obtenus ne nous permet pas de déterminer l'influence de ces différentes formes. En effet, il semble que les définitions choisies n'aient pas tenu compte de toute la variété des réponses possibles, ce qui a amené à des difficultés d'interprétation des réponses données. Les deux exemples qui suivent illustrent ces difficultés. D'abord, quand quelqu'un qualifiait un problème comme en étant un d'inégalité, cela n'impliquait pas nécessairement qu'une équation d'inégalité était présente dans l'énoncé du problème, malheureusement, notre définition des problèmes de forme symbolique n'a tenu compte que de cette dernière situation. Ensuite, bien que notre définition des problèmes graphiques soit plus complète que celle des problèmes d'inégalité par le fait qu'elle spécifie que pour être qualifiée de graphique le problème doit nécessiter l'utilisation d'un graphe pour être résolu, des difficultés d'interprétation demeurent présentes. En effet, lorsque les sujets caractérisaient leurs groupements comme étant des problèmes de graphes, cela ne voulait pas nécessairement dire qu'ils comprenaient la nécessité d'utiliser le graphe pour résoudre le problème. De plus, des problèmes sous une autre forme peuvent aussi nécessiter l'utilisation de graphes pour être résolus (par exemple, les problèmes de la théorie des ensembles). Toutes ces difficultés d'interprétation nous ont amené à la décision de ne pas analyser davantage ces résultats. Pour répondre à la question de l'influence de la forme des problèmes sur les catégorisations, il faudrait, à notre avis, prévoir des études pilotes pour permettre de

concevoir des définitions précises et complètes, accompagnées de règles d'interprétation des différents résultats possibles.

Présence de Stratégies Alternatives de Solution

Nous avons vu dans la revue de littérature que la plupart des sujets, quelque soit leur habileté, utilisent plusieurs stratégies lorsqu'ils résolvent des problèmes (Kaizer & Shore, sous presse). Toutefois, il n'est pas clair à quel stade ces stratégies alternatives sont considérées. Dans cette section, nous cherchons à déterminer si, lors de la catégorisation des problèmes — l'une des premières étapes du processus de résolution de problèmes — nos sujets ont considéré différentes stratégies alternatives de solution.

Le fait que nous n'ayons pas demandé aux sujets de catégoriser les problèmes selon leur solution, ajouté au fait que ces individus ne devaient pas résoudre les problèmes, a permis de rendre les sujets libres de s'attarder à n'importe lequel des aspects des problèmes qu'ils considéraient importants pour regrouper ces derniers. Cela nous a également permis d'évaluer avec plus de validité où se dirige l'attention des sujets dans les premières minutes d'une résolution de problème. Des résultats obtenus, nous constatons que, dès les premiers moments d'une résolution, alors qu'ils catégorisent les problèmes, les sujets sont capables de s'attarder à la solution des problèmes. Pour les sujets d'habileté moyenne, les tentatives restent la plupart du temps vagues, alors que chez les experts, la solution est presque toujours décrite de façon valide et précise. Les sujets de grande habileté sont intermédiaires aux deux autres groupes de sujets sur ce plan.

Si nous avons montré que les sujets s'attardent à la solution, au moment de la catégorisation des problèmes, il n'a pas vraiment été possible d'établir avec certitude si des stratégies alternatives de solution ont été considérées. En effet, nos directives — grouper selon la structure mathématique — ne dirigeaient pas nécessairement les sujets vers la solution des problèmes. De plus, même si les sujets prenaient une telle direction, ils ne nous indiquaient que les raisons finales les ayant conduit à telle ou telle catégorisation. Quelques indices nous amènent toutefois à penser que les sujets plus habiles considèrent des stratégies alternatives lors de ce stade initial de résolution. Par exemple, plus ces derniers étaient habiles et expérimentés, plus ils prenaient en considération les différents aspects reliés aux problèmes et plus ils étaient capables de

différencier les caractéristiques pertinentes à la solution. Nous croyons que cette habileté à extraire une variété d'informations pertinentes reliées à la nature et solution des problèmes contribue de façon importante à l'usage flexible de solutions alternatives observé chez les sujets plus habiles en mathématiques (Kaizer & Shore, sous presse), leur permettant de discerner les solutions possibles et de les évaluer.

Selon Kaizer (1988), l'utilisation plus grande de stratégies d'essais et erreurs par les sujets moins compétents suggère qu'ils sont moins capables de retrouver l'information dans leur mémoire et d'utiliser un algorithme complexe. Nos analyses de la structure hiérarchique des groupements et de la nature des raisons employées pour expliquer ces derniers, montrent que les sujets d'habileté moyenne possèdent des connaissances (déclaratives et de procédures) moins élaborées et moins organisées que celles des sujets de grande habileté. Ceci pourrait expliquer leur difficulté à emmagasiner et retrouver par la suite l'information et le fait qu'ils aient moins à l'esprit les faits pertinents à la solution. Les connaissances des sujets de grande habileté, parce qu'elles sont plus développées et mieux organisées, seraient plus accessibles et permettraient aux sujets de les utiliser plus efficacement. Il est raisonnable de penser que cette capacité à emmagasiner et accéder facilement aux différentes connaissances possédées va de pair avec l'utilisation de stratégies de solution variées et appropriées. En effet, la connaissance de stratégies et leur application sont de l'information également emmagasinée dans la mémoire.

Finalement, pour vraiment examiner l'usage de stratégies alternatives de solution au stade des catégorisations, il aurait fallu, selon nous, utiliser une procédure d'expérimentation différente. D'abord, demander aux sujets de grouper les problèmes selon la manière dont ils résoudre les problèmes (Chi, Feltovich & Glaser, 1981; Chi, Glaser & Rees, 1982; Schoenfeld & Hermann, 1982) pour s'assurer que les stratégies de résolution soient au centre de leur attention et, ensuite, employer la technique de pensée à haute voix, pour permettre aux sujets de mentionner toutes les stratégies de résolution qui leur viennent à esprit.

Liens entre Certaines Caractéristiques Externes des Groupements et Les Raisons
qui leur sont Associées

Raisons Associées aux Groupements les Plus Importants

Dans l'analyse des caractéristiques externes, nous avons montré que le pourcentage de problèmes inclus dans les groupements les plus importants de chaque sujet, augmente avec l'habileté mathématique de ces derniers et que ce résultat s'applique aussi bien si l'on considère "le" groupement le plus important, que les quatre plus importants. La comparaison des raisons données pour expliquer les groupements incluant le plus de problèmes avec celles associées à l'ensemble des groupements utilisés par chaque sujet ne révèle, pour chacun des groupes-habilité, aucune différence majeure. Le même résultat est obtenu en comparant, entre les divers groupes-habilité, les raisons associées aux quatre groupements les plus importants. Dans ce dernier cas toutefois, on remarque que plus l'habileté augmente, plus le taux de présence des catégories LFT, SAB, GMA, RonC, SE, SP, IP, SE+ et GMA+ dans ces groupements augmente, ce qui correspond à la tendance générale observée lors de la comparaison de tous les groupements des sujets, sauf pour les fréquences moins élevées ici et la présence de LFT.

L'examen des groupements les plus importants nous fournit quelques indices de la présence de schèmes généraux de catégorisation à mesure que l'habileté augmente, si on considère ces groupements du point de vue de la variété des raisons employées pour les décrire. En effet, si on compare l'usage des différentes catégories employées (compilation de la présence ou pas de chaque catégorie dans chacun du(des) groupement(s) plus important(s) pour chacun des sujets, puis compilation pour l'ensemble des sujets d'un même groupe-habilité), avec ceux des trois autres groupements importants, on remarque différents patrons d'utilisation selon l'habileté des sujets. Pour les experts on note une diminution constante du nombre de catégories utilisées pour décrire les groupements incluant le plus de problèmes, en partant du plus important et allant vers le quatrième plus important, ce qui indique que ces groupements sont regroupés selon une plus grande variété de raisons. Cette considération d'une variété d'aspects touchant aux problèmes démontre que les experts possèdent une compréhension plus complète et globale des problèmes et de leur domaine d'appartenance, mettant de côté les différences et ne se

concentrant que sur les aspects similaires les plus pertinents. De façon générale également, pour chacun de leurs groupements les plus importants (1er, 2ème, 3ème et 4ème), ils ont utilisés une plus grande variété de catégories que les deux autres groupes-habileté. Les sujets de grande habileté, de leur côté, suivent à peu près le même patron que les experts, mais en utilisant un nombre un peu moins de catégories diverses et montrant des résultats à peu près équivalents pour les troisième et quatrième groupements plus importants. Tous les groupements importants des sujets d'habileté moyenne sont associées à un nombre équivalents de raisons, nombre beaucoup plus faible que ceux des sujets de grande habileté et des experts. Pour les experts et les sujets de grande habileté, le groupement incluant le plus de problèmes se distingue donc des autres par la quantité plus importante de raisons qui lui sont associées.

Nombre de Groupements et Raisons données

Nous avons décrit plus tôt les groupements les plus typiques de chaque groupe-habileté en nous concentrant sur leurs caractéristiques externes et choisissant pour chacun, des protocoles illustrant les extrêmes de simplicité et de complexité de ces caractéristiques. Nous voulons maintenant relier nos observations avec celles concernant les raisons associées à ces groupements.

Extrême de complexité. Bien que nos résultats indiquent que plus les sujets démontrent des habiletés mathématiques, moins ils ont tendance à créer de groupements de problèmes, il y a quand même, dans chaque groupe-habileté, un certain nombre de sujets ayant formé un minimum de groupements (3 ou 4). La faible quantité de groupements formés par ces sujets a donc été interprétée, lors de l'analyse des groupements typiques, comme un signe de complexité des groupements. Toutefois, en comparant l'usage des catégories basées sur les éléments superficiels des problèmes avec celles basées sur des éléments de complexité intermédiaire et celles basées sur des éléments à forte complexité pour un des sujets de chaque groupe-habileté, ayant un minimum de groupements, nous remarquons que, dans le cas du sujet d'habileté moyenne (#10) n'ayant utilisé que trois groupements, il y a une absence complète des catégories impliquant une compréhension supérieure, alors que dans le groupement typique des sujets de grande habileté (#3) et dans ceux des experts (#12 et 17), ce genre de catégories est utilisé et la fréquence d'utilisation la plus élevée se retrouve chez les experts.

Extrême de simplicité. Quelques sujets, choisis dans les trois groupes-habileté, illustrent des caractéristiques extrêmes de simplicité, entre autres, à cause du grand nombre de groupements de problèmes formés. Si nous examinons l'utilisation des raisons associées à ces groupements, nous observons que tous ces sujets ont utilisé celles impliquant une excellente compréhension des problèmes, mais que cette utilisation avait tendance à augmenter avec l'habileté mathématique des sujets. Les catégories les plus superficielles étaient également présentes chez tous groupes-habileté, en fortes proportions chez ceux d'habileté moyenne et de grande habileté et dans un peu moins de la moitié des groupements des experts.

Il semble que plus les sujets de grande habileté et les experts conçoivent un nombre limité de groupements, plus ils utilisent, pour décrire leurs groupements, des raisons basées sur des éléments de complexité intermédiaire et de forte complexité. Chez les sujets d'habileté moyenne, l'utilisation des raisons basées sur les éléments superficielles et celles de complexité intermédiaire est la même, quelque soit le nombre de groupements conçus. L'utilisation des raisons basées sur les éléments les plus complexes est un peu moindre pour le sujet ayant fait le moins de groupements (#10).

Si on examine enfin tous les sujets de chacun des groupes-habileté sur le plan de la diversité des raisons utilisées pour décrire les groupements, on constate, chez les sujets d'habileté moyenne, que le nombre moyen de catégories de raisons utilisées pour décrire leurs groupements à la tâche 1 est de 2.6, alors que chez les sujets de grande habileté et les experts les nombres moyens sont de 4.9 et 6.0 respectivement. Pour les experts et les sujets de grande habileté, on observe de plus que ceux ayant utilisés le plus de raisons différentes pour expliquer leurs groupements sont aussi ceux qui ont créé le moins de groupements (3-4), alors que ce n'est pas le cas chez les sujets d'habileté moyenne. De plus, chez ces derniers, on ne trouve pas de différences importantes entre les sujets quant à l'emploi de catégories diverses de raisons (les limites minimums et maximums sont de 2.1 et 3.0).

Conclusion. Il semble donc que le nombre de groupements, lorsque examiné de façon isolée, n'est pas un bon indicateur de l'habileté des sujets. Toutefois, lorsque l'on joint à l'examen de ce dernier une analyse des raisons données pour justifier les groupements, on observe que les sujets démontrant le plus d'habileté mathématiques semblent être ceux (a)

qui utilisent une plus grande variété de raisons pour décrire leurs groupements, (b) dont les raisons sont basées sur une compréhension des éléments complexes et (c) qui emploient en plus un minimum de groupements (3 à 5).

Niveaux Hiérarchiques et Raisons Données

Nous avons également examiné, parmi les sujets choisis pour la section des groupements les plus typiques de chaque groupe-habilité, si le nombre de niveaux hiérarchiques utilisés par ces sujets semblait être lié au degré de complexité des raisons employées pour expliquer les groupements. Cet examen ne révèle pas de différences entre les sujets d'un même groupe habileté. Entre les sujets des différents groupes-habilité, certaines différences au niveau de l'emploi des catégories basées sur des éléments plus complexes semblent présentes, dans le cas des comparaisons des groupements typiques à trois niveaux hiérarchiques. Ainsi, les experts utiliseraient le plus ces catégories impliquant des processus complexes, alors que les sujets d'habileté moyenne les emploieraient le moins, mais cette tendance n'est pas absolue. Une analyse de l'ensemble des groupements de tous les sujets de cette étude apporterait sans doute davantage de lumière sur ces résultats, surtout pour la comparaison des groupements à 4 et 5 niveaux hiérarchiques ou peu de comparaison étaient possibles en examinant seulement les groupements typiques.

La diversité des catégories employées par les sujets semble, encore une fois, être liée à l'emploi d'un plus grand nombre de niveaux hiérarchique. Par exemple, chez les experts, le sujet #12 utilise 11 raisons différentes pour décrire ses groupements (5 niveaux hiérarchiques) les sujets #17 et #21, 5 et 5.6 raisons différentes (4 et 5 niveaux) et le sujet #19, 3.5 (3 niveaux hiérarchiques). Chez les sujets de grande habileté, le sujet #3 (5 niveaux) décrit ses groupements avec 8.5 catégories diverses, alors que les sujets #4 et #15 (3 niveaux), n'utilisent que 4,4 et 2,6 catégories de raisons différentes. Les sujets d'habileté moyenne utilisent tous 3 niveaux hiérarchiques et le nombre moyen de raisons différentes utilisé pour décrire les groupements sont comparables, 3 (#10), 2.1 (#16) et 2.1 (#20).

CHAPITRE 4

CONCLUSION

Implications Théoriques

Catégorisation et Organisation des Connaissances

Au cours de cette étude nous avons plusieurs fois mentionné la nature distinctive de la tâche 2 et les ressemblances au niveau des tâches 1 et 3. L'examen des résultats obtenus à la tâche 2 par les différents groupes-habileté amènent à plusieurs conclusions intéressantes. D'abord, il semble que de demander aux sujets d'habileté moyenne de chercher les ressemblances entre groupements les force à créer des liens entre ceux-ci et les aide à mieux organiser leurs connaissances. On peut penser que cela compense pour l'insuffisance de certaines stratégies métacognitives insuffisantes telles que la capacité à comparer, évaluer, synthétiser et être conscient de ce que l'on ne connaît pas. Ce genre d'exercice — trouver des similarités entre groupements de problèmes — semble donc être une suggestion valable pour les enseignants qui cherchent à aider leurs étudiants à solidifier et organiser leurs bases de connaissances.

Du côté des sujets de grande habileté et des experts, le fait d'essayer de trouver des similarités entre groupements de problèmes semble servir à éloigner leur attention des détails de solution des problèmes pour leur permettre de se concentrer sur les aspects plus généraux des groupements de problèmes. Contrairement aux sujets de grande habileté toutefois, les experts se fondent, pour trouver des similarités, sur une connaissance des bases de leur propre système de catégorisation et sur une saisie claire de la nature et la place des problèmes dans le processus d'enseignement et d'apprentissage. Cette saisie personnelle des experts peut sans doute partiellement expliquer leur emploi moins élevé de références à l'enseignement à cette tâche: ils rattachent sans doute les problèmes à des domaines mathématiques plus près de leur expérience professionnelle et plus globaux que ceux qu'on leur aurait enseigné au niveau secondaire ou qu'ils enseigneraient à ce niveau scolaire.

Les résultats des tâches 1 et 3 se ressemblent à plusieurs points de vue. Il semble toutefois que la tâche 1 soit celle qui permet le mieux de mettre en valeur le plein

potentiel des sujets, en leur faisant utiliser davantage de raisons pour expliquer leurs groupements de problèmes et dans des proportions plus similaires. Ce genre de tâche — regrouper les problèmes selon leur structure mathématique — est donc une source de données importantes pour la compréhension de l'organisation des connaissances.

La redivision des groupements initiaux de problèmes (tâche 3) fournit des données complémentaires sur l'organisation hiérarchique de ces groupements et l'évolution des explications qui leur sont associées, à mesure que croît cette organisation hiérarchique. Contrairement à ce que l'on voit chez les sujets d'habileté moyenne, il est clair que les experts tiennent compte de la structure des problèmes dès la division initiale des problèmes. Cette facilité à accéder à l'information dont ils ont besoin, indique que l'organisation des connaissances des experts est plus complexe et efficace que celles des sujets manquant d'habileté et d'entraînement. De plus, comme la structure est à la base de leur système de catégorisation initial, il est normal que les divisions subséquentes des groupements de problèmes implique des caractéristiques plus superficielles. La tâche 3 aide donc les experts à raffiner davantage l'organisation de leurs groupements de problèmes, mais il semble qu'elle ne les pousse pas à s'attarder davantage à la structure des problèmes.

Différences Dans l'Organisation des Connaissances des Trois Groupes-Habileté

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, la relation entre catégorisation et représentation n'est pas encore claire. Les résultats présentés ici semblent indiquer que la catégorisation correspond à l'une des premières représentations que les sujets conçoivent dans leur esprit lors d'une résolution de problèmes. En effet, nous avons trouvé des différences entre les groupes-habileté pour ce qui est de leur catégorisation des problèmes, alors que les sujets n'avaient pas solutionné ceux-ci. Toutefois, notre étude ne nous a pas permis d'établir laquelle des théories principales (McDermott & Larkin, 1981; Chi, Feltovich & Glaser, 1981) était la plus appropriée: nos résultats appuient à la fois ces deux théories. Par exemple, le fait que nos experts aient pris plus de temps à catégoriser les problèmes appuierait la théorie de McDermott et Larkin (1981), selon laquelle les solutionneurs de problèmes doivent progresser à travers quatre stades de représentations (représentation littérale, naïve, scientifique et algébrique) avant d'établir leur

catégorisation définitive des problèmes. D'un autre côté, la considération par les sujets plus habiles, d'une plus grande variété de raisons pour expliquer leurs groupements, irait plutôt dans le sens de la théorie de Chi, Feltovich et Glaser (1981). Ces auteurs suggèrent que la représentation est construite dans le contexte des connaissances disponibles pour le type de problème étudié et que, dès le début du processus de catégorisation, une catégorisation provisoire est formée permettant la recherche des connaissances y étant associées. Pour mieux identifier quelle théorie serait la plus adéquate, l'emploi de la technique de pensée à haute voix, pour la durée de la catégorisation des problèmes de même que lors des explications des groupements, pourrait être très utile. En effet, cela nous aiderait à déterminer si les sujets passent ou non à travers une série de stades avant d'arriver à leur catégorisation finale, ou encore, de la présence ou pas d'une catégorisation provisoire au tout début du processus de catégorisation.

Nous avons vu dans la revue de littérature que, dans les premiers stades de l'analyse d'un problème, la personne qui résout essaie de comprendre le problème en se construisant une première représentation interne du problème (Mayer, 1983; Lesh, 1985). Nos résultats indiquent l'importance de cette représentation. En effet, plus les sujets étaient habiles et expérimentés, plus leur représentation des problèmes était complète et de qualité. Selon plusieurs auteurs (Chi, Glaser & Rees 1982; Glaser, 1984), la qualité et la complexité des représentations déterminent l'efficacité et la justesse des pensées futures et conséquemment, ont un impact majeur sur la capacité des individus à résoudre des problèmes. Enfin, le degré de présence de ces caractéristiques est déterminé par les connaissances disponibles chez la personne qui résout, de même que par la façon dont ces connaissances sont organisées. Notre étude corrobore ce point de vue, car nos résultats montrent que les sujets de grande habileté et les experts qui possèdent les représentations les plus complètes, sont ceux dont l'organisation des connaissances est parmi les plus complexes. Selon Sternberg (1981a, 1985), l'organisation des connaissances amène également un automatisme des habiletés intellectuelles reliées aux éléments connus des problèmes et permet ainsi à l'individu de se préoccuper d'autres aspects moins familiers des problèmes. La métacognition de son côté, semble jouer un rôle déterminant dans la construction de schèmes ou structures de connaissances permettant des performances optimales. L'utilisation supérieure des catégories impliquant des processus métacognitifs,

trouvée chez nos sujets à mesure que l'habileté mathématique augmente, appuierait cette dernière hypothèse. De plus, l'utilisation des mécanismes métacognitifs si tôt dans le processus de résolution de problème, s'ajoutant aux résultats de nombreuses études (Coleman & Shore, 1991) indiquant leur présence lors de la résolution elle-même, suggèrent que ces mécanismes sont actifs à travers tous les stades de résolution de problèmes.

Nous avons constaté que nos trois groupes-habileté se sont fondés en proportions importantes sur les caractéristiques évidentes des problèmes. Les sujets d'habileté moyenne ont principalement organisé leurs connaissances autour des objets explicitement décrits dans l'énoncé du problèmes. Les sujets de grande habileté ont montré qu'ils sont en plus capables de faire appel à des processus de pensée complexes, ce qui démontrent une bonne compréhension de la nature des problèmes et de bonnes habiletés métacognitives (par exemple: mécanismes d'évaluation et d'élaboration). Il découle de ces résultats que les bases de connaissances des sujets de grande habileté sont mieux organisées et plus complexes que celles des sujets d'habileté moyenne et qu'ils savent davantage aller chercher l'information dont ils ont besoin pour résoudre les problèmes. Chez les experts, la proportion de raisons basées sur les caractéristiques superficielles des problèmes est minoritaire, car ils utilisent lors de toutes les tâches expérimentales une variété de catégories précises et complexes comme base de catégorisation. Conséquemment, nous pouvons déduire que les connaissances de bases des experts sont plus complexes que celles des deux autres groupes-habileté: elles comprennent beaucoup plus d'éléments et ont une organisation ramifiée; la considération d'un élément d'un problème amène à la considération de plusieurs autres aspects. La présence de sous-groupements spontanés chez les sujets de grande habileté et les experts peut refléter à la fois une tendance à organiser spontanément les problèmes de la façon la plus détaillée possible et une organisation interne plus complexe. Ce qui semble distinguer les sujets plus habiles et expérimentés des autres est leur capacité à évaluer les caractéristiques pertinentes et à aller chercher les informations nécessaires à la solution des problèmes. Cette habileté à évaluer est influencée à la fois par les connaissances possédées et l'habileté à extraire ces connaissances.

Selon Glaser (1984), parce que les connaissances des experts sont organisées autour des principes et abstractions et qu'elles incluent des connaissances au sujet de l'application de ce qu'ils connaissent, ces connaissances contiennent des schèmes reliés de façon très serrée. Celles des novices toutefois, même si elles contiennent sans doute une quantité suffisante d'informations se rapportant au problème étudié, n'incluent pas ou très peu de connaissances des principes reliés aux problèmes et à leur application. Pour Chi, Glaser et Rees (1982), cet état de faits découle de connaissances de bases inadéquates et n'est pas dû à des capacités limitées à traiter l'information, telles que la difficulté à utiliser des processus heuristiques. Leur manque d'habileté provient plutôt de leur difficulté à inférer des connaissances supplémentaires à partir d'éléments explicitement décrits dans l'énoncé du problème.

La diversité des raisons employées pour décrire les groupements semble être l'un des meilleurs indicateurs de l'habileté des sujets à la tâche 3. Cette emploi de raisons variées correspond de plus à une utilisation moins élevée de groupements par les sujets plus habiles et à leur emploi de plus de niveaux hiérarchiques. En fait, les caractéristiques les plus représentatives des sujets les plus habiles semblent être une utilisation combinée (a) d'une variété de raisons pour expliquer leurs groupements, (b) de raisons principalement fondées sur une compréhension des éléments complexes des problèmes et (c), d'un nombre minimum de groupements de problèmes. Nous pouvons penser que cette capacité à percevoir et évaluer différents éléments reliés aux problèmes permet aux sujets possédant le plus d'habileté et d'expérience d'avoir une plus grande flexibilité lors de la recherche d'une solution appropriée.

Le nombre moins élevé de références à l'enseignement reçu, faites par les sujets d'habileté moyenne, nous laisse croire que l'organisation de leurs connaissances de bases ne leur permet peut-être pas d'exploiter efficacement l'information reçue. Comme ces sujets ont reçu une formation équivalente à celle des sujets de grande habileté, et que ces derniers semblent avoir retenu beaucoup mieux l'information fournie tout en étant capables de l'exploiter, on peut penser que les sujets d'habileté moyenne ont de la difficulté au niveau de l'intégration de l'information. Deux explications semblent plausibles. D'abord, on peut supposer que les sujets moins habiles manquent de stratégies métacognitives nécessaires pour intégrer l'information de façon appropriée. Cependant, il est également

possible que leurs stratégies cognitives soient adéquates, mais que ce soit leurs connaissances ou l'organisation ou la structure de leurs connaissances qui soient insuffisantes ou incomplètes, empêchant les sujets de trouver l'information désirée ou d'établir des similarités à un niveau global (Chi et Glaser, 1985).

La vision globale des mathématiques, chez les sujets de grande habileté, semble être fortement influencée par l'enseignement reçu à l'école, ce qui laisse supposer la place importante de celui-ci dans l'organisation des connaissances chez ces sujets et son influence sur la conception qu'ils se font d'un domaine. Ceci pourrait s'expliquer par le fait que les sujets de grande habileté ne possèdent pas autant de connaissances de base que les experts et, par conséquent, n'ont pas suffisamment de recul pour se construire une représentation plus personnelle des problèmes.

De nos résultats, il apparaît que plus les sujets sont habiles mathématiquement, plus la considération du problème est complète et équilibrée. Nous notons également que le taux de présence des catégories plus complexes dans les groupements s'accroît avec l'habileté, ce qui permet de dire que, plus l'habileté grandit, plus la considération des problèmes est dynamique. En effet, ces catégories plus complexes impliquent toutes l'utilisation de processus métacognitifs, qu'ils soient évaluatifs, comparatifs ou autres et les sujets situent les problèmes dans leur contexte plus global. Grâce à une forte activité métacognitive les nouvelles connaissances peuvent donc mieux s'intégrer aux connaissances existantes. Ainsi, les experts se caractérisent particulièrement par leurs efforts continuels pour situer les problèmes: par rapport au domaine mathématique auquel ceux-ci appartiennent et par rapport à leur propre organisation des connaissances. Ceci révèle une activité métacognitive certaine et peut expliquer en partie la tendance, à mesure que l'habileté augmente, à regrouper les problèmes en moins de catégories. Finalement, il semble que le manque de connaissances de base et d'expérience rendent plus difficile l'utilisation de certains processus cognitifs et empêchent les sujets moins habiles d'avoir une perspective plus globale.

La comparaison des données des trois groupes-habileté montre une certaine progression dans l'utilisation de quelques-unes des catégories basées sur des éléments plus complexes, ce qui semble refléter un patron d'acquisition d'habileté complexes. D'après nos résultats c'est l'habileté à discerner les principes menant à la solution qui serait d'abord acquise.

Cette acquisition ajoutée à l'expérience croissante des sujets en mathématiques, permettraient ensuite à ceux-ci d'organiser leurs connaissances en prenant de plus en plus une perspective générale et personnelle.

Selon Rabinowitz et Glaser (1985), la connaissance explique en partie la variabilité dans l'usage de stratégies générales, grâce aux représentations mentales qu'elle permet. La connaissance, non seulement permet l'utilisation de telles stratégies, mais pourrait également affecter la quantité d'efforts que l'on doit fournir pour les utiliser. Par exemple, si on présente un problème à un novice dans un domaine, celui-ci doit consciemment et adroitement élaborer une représentation du problème avant d'être capable d'utiliser certaines stratégies comme le questionnement personnel pour résoudre son problème. En revanche, l'expert étudie le problème et génère des représentations mentales très détaillées du problème. Cet expert n'a pas vraiment besoin de recourir des stratégies telles que le questionnement personnel avant de résoudre le problème. Les performances compétentes semblent donc être le résultat d'une combinaison entre l'accessibilité des connaissances et la disponibilité des habiletés cognitives générales. Comme nous l'avons vu dans introduction, plusieurs études font valoir que la connaissance peut être un cadre pertinent à l'étude des performances excellentes. Toutefois, la manière dont l'usage et le développement interactif des stratégies cognitives générales et des processus basés sur la connaissance expliquent la performance des individus doués reste encore à être résolue (Glaser, 1984; Sternberg, 1985). Par exemple, à quel point une compétence exceptionnelle dépend-elle de la rapidité avec laquelle les structures de connaissances fournissent des informations et génèrent des représentations? Selon Rabinowitz et Glaser (1985):

research needs to be conducted on the difference between gifted and average people in the acquisition of knowledge and related cognitive skills, in the accessibility of information, in the representations of problem situations, and on how such differences determine the properties of outstanding performances. Such research could contribute a great deal, not only to our understanding of gifted people and to methods of nurturing their talents, but also to educational practices for raising the general level of cognitive competence and intellectual skill (pp. 94-95)

Place de la Douance Dans la Transition du Stade de Novice à Celui d'Expert

Une de nos questions de recherche visait à établir le degré de ressemblance entre les sujets de grande habileté, les sujets d'habileté moyenne et les experts, quant à la nature et l'organisation des catégorisations. Comme nous l'avons vu dans notre revue de littérature, plusieurs études (Coleman & Shore, 1991; Austin & Shore, 1993) mettent en lumière les similarités entre experts et sujets de grande habileté. Nous avons nous-mêmes obtenus, dans cette étude, des résultats indiquant que les sujets de grande habileté sont clairement près des experts, en particulier pour ce qui est du niveau de complexité de l'organisation hiérarchique des groupements. Certains autres de nos résultats cependant, nous révèlent que, sur plusieurs aspects, la performance des sujets de grande habileté se situe quelque part entre celle de leur pairs d'habileté moyenne et celle du groupe d'experts et que, par conséquent, ils peuvent être aussi bien qualifiés de novices que d'experts.

Cette performance intermédiaire des sujets de grande habileté nous fait voir que, bien qu'ils soient novices comme les sujets d'habileté moyenne (en ce sens qu'ils n'ont eu qu'une expérience limitée avec ce genre de problèmes mathématiques), ils ne leur sont pas équivalents à plusieurs points de vues: leurs groupements tendent à être plus complexes, les raisons données pour expliquer les groupements sont plus variées, plus nombreuses et, de façon générale, davantage basées sur des aspects moins superficiels de problèmes. Cela implique donc que, même si leur degré d'exposition au matériel mathématique est le même que celui de leurs pairs d'habileté moins élevée, les sujets de grande habileté bénéficient de processus de pensée plus sophistiqués et, en cela, ressemblent davantage aux experts.

Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 2, nous avons différencié les sujets de grande habileté en mathématiques de ceux possédant tout simplement un bon rendement académique dans cette matière en utilisant comme critères de sélection ceux développés par Krutestkii (1976), en plus du rendement académique. Bien que ces critères de sélections ne soient pas parfaits, nous croyons qu'ils permettent dans une certaine mesure de généraliser nos résultats à ceux des recherches sur la douance et que, de ce fait, nos étudiants de grande habileté peuvent se comparer aux sujets doués. Par conséquent, l'examen de nos résultats nous permet de suggérer qu'une approche utile pour définir la

douance est à la fois en terme des caractéristiques des experts et en terme des caractéristiques des novices, à condition que des modèles adéquats de la performance des novices et des experts et de la transition d'un stade à l'autre soient développés. Comme le mentionne Salthouse (1991), "it seems that inconsistencies among researchers in regard to the level of competence that qualifies one as expert, as well as inconsistencies in regard to the region of competence distribution from which individuals are drawn to be compared with experts, may be hampering progress in understanding expertise" (pp. 287-288). Ce manque de repères clairs sur ce qui constitue et amène à l'expertise empêche probablement aussi les recherches sur la douance de progresser.

Problèmes de Définitions

Même si nous avons établi que les sujets doués devraient être considérés à la fois comme novices et experts, nous nous heurtons à plusieurs problèmes de définitions lorsque nous essayons de considérer la nature de ces deux stades.

Un des problèmes relatif à la définition des termes experts et novices touche au matériel utilisé et au degré d'habileté ou connaissances des sujets comparés. Par exemple, les étudiants gradués, considérés comme experts dans notre étude à cause du niveau de difficulté peu élevé de nos problèmes, seraient probablement considérés comme novices lorsque mis en face de problèmes beaucoup plus difficiles ou lorsque comparés à des mathématiciens professionnels de renommée internationale. Que penser des enseignants du secondaire? Ne pourraient-ils pas être également qualifiés de novices par rapport à des physiciens et mathématiciens de carrière? Une fois l'aspect relatif des comparaisons, éliminé il devient possible de se concentrer sur l'étude du développement de l'expertise et de la transition du stade de novice à celui d'expert. Ainsi, on peut se demander à quel point, dans le développement de l'expertise, nos étudiants gradués deviennent-ils vraiment des experts?

Définitions des novices. Dans plusieurs des études dont nous avons discutées, la conception du novice, sans être exposée explicitement, semble assez comparable: des sujets venant de commencer dans un domaine, donc ayant une expérience limitée. Toutefois, en examinant plus en profondeur la littérature sur le sujet, on s'aperçoit que cette conception n'est pas universelle. Par exemple, pour certains (Dreyfus & Dreyfus,

1986), les novices sont ceux qui n'ont aucune expérience dans le domaine; chez d'autres (Patel & Groen, 1991; Schoenfeld & Hermann, 1982), les novices possèdent déjà une certaine expérience dans un domaine. Ce dernier modèle converge davantage avec notre définition des novices. Une distinction entre les termes néophytes et novices serait souhaitable. Ainsi, les néophytes correspondraient aux individus complètement nouveaux à un domaine (Pelletier, Shore, Kanevsky & Rejskind, en préparation; Shore, 1992).

Les éléments de définition du novice que nous venons de présenter, peuvent être à la fois appliqué à notre groupe d'habileté moyenne et notre groupe de sujets doués, ou de grande habileté. En effet, l'expérience de ces groupes-habileté avec les mathématiques présentés dans notre tâche expérimentale est comparable. Toutefois, les résultats obtenus pour ces deux groupes d'élèves sont la plupart du temps différents (pas toujours significativement) et la position intermédiaire des sujets doués nous force à nous poser certaines questions quant à la nature du statut de novice. Quelles caractéristiques sont les plus fondamentales à notre descriptions des novices? Doit-on d'abord définir un novice par son niveau d'expérience et de connaissance ou par son habileté ou performance? Comment réconcilier les deux aspects? Y a-t-il différentes sortes de novices?

Définition de l'expertise. Les distinctions entre les termes expérience et compétence semblent apporter quelques éléments de réponse à ces questions. Pour étudier la nature de l'expertise en résolution de problèmes, il faut, selon plusieurs auteurs (Clément, 1982, 1991; Schoenfeld, 1982; Sternberg, 1981a, 1985; Keating, 1990), donner à l'expert un problème pour lequel il n'a pas de schème de solution. Son comportement sera alors très différent de celui adopté lorsqu'il travaille sur des problèmes de routine ou familiers. Il semble que lorsque les experts doivent comprendre des problème typiques de leur domaine, ils les assimilent à leurs schèmes bien développés. Toutefois lorsqu'ils font face à un problème non typique, ils doivent se construire une compréhension, partie par partie, du problème, employant beaucoup plus de stratégies générales, en plus des connaissances particulières s'appliquant aux problèmes (Clément, 1982, 1991). Cette vision des choses est très proche de celle de Hatano & Inagaki (1986) qui différencient l'expertise de routine de celle qui s'adapte.

Selon Schoenfeld (1982) le mathématicien ne "Pense" [les auteurs utilisent une lettre majuscule] probablement pas quand il effectue une telle opération, on assiste alors à une compétence relative à un domaine. Pour ces auteurs, cela ne joue aucun rôle quant à l'habileté à résoudre des problèmes et ils mettent en garde de ne pas confondre compétence (la possession d'un grand nombre de schèmes pour exécuter des classes génériques de tâches dans un domaine) avec l'expertise. Selon eux, la plupart des modèles expertise qui ont été étudiés sont en fait des modèles de compétence. Bien que l'interprétation et l'utilisation de modèles de traitement de l'information soit valable, il ne faut pas se limiter à des modèles purement cognitifs. Ainsi, pour définir l'expertise, on doit tenir compte de tous les comportements métacognitifs, qu'ils soient des stratégies de contrôle ("monitoring") ou d'évaluation, des intuitions ou des systèmes de croyance conscients et inconscients, car ceux-ci déterminent de quelle manière un individu approche les problèmes. Le rôle de la métacognition est considéré par plusieurs (Silver, 1981; Lester, 1982; Chi, 1989; Keating, 1990; Sternberg, 1985) comme fondamental à une compréhension de l'expertise. Ces auteurs soulignent l'importance d'une approche intégrée de l'expertise. Par exemple, selon Lester (1982), le succès d'une résolution de problème en mathématique dépend d'au moins cinq facteurs reliés au solutionneur de problèmes: (a) la connaissance et l'expérience mathématique, (b) l'habileté à utiliser une variété d'outils génériques (par exemple, reconnaître les informations pertinentes, dessiner des diagrammes), (c) l'habileté à utiliser une variété de méthodes heuristiques utiles à la résolution de problèmes mathématiques, (d) connaissance de sa propre cognition, avant, pendant et après un épisode de résolution de problème et (e) l'habileté à maintenir des contrôles exécutifs sur les procédures employées durant la résolution de problème. Étant donné que les facteurs (d) et (e) impliquent des comportements métacognitifs, il est important, selon l'auteur, que plus d'attention soit donné à la métacognition: "To date, mathematics educators and cognitive psychologists interested in problem solving have largely ignored metacognitive behaviors" (p. 59).

Selon Keating (1990), il devient de plus en plus apparent qu'une stratégie visant à isoler les composantes de l'expertise est moins instructive qu'une stratégie plus développementale, visant à explorer comment les différentes activités cognitives qui sous-tendent l'expression de l'expertise, s'intègrent dans le temps. En effet, on a récemment

mis en évidence la non-indépendance fondamentale des activités cognitives de leur contenu et de leur contexte. Par exemple, dans une version améliorée de son modèle componentiel de l'intelligence, Sternberg (1988) spécifie que son modèle interagit avec deux autres niveaux cognitifs, celui des composantes métacognitives et celui des facteurs socioculturels. Le but de la théorie est d'expliquer de quelle manière ces différents niveaux opèrent et interagissent pour produire les comportements cognitifs observés. Cette découverte d'une activité cognitive intégrée à son environnement amène à une réorientation de la recherche et de la pratique. Selon Keating un aspect important est l'étude du développement cognitif:

If cognitive activity is generally integrated, then observing how that integration occurs over the course of development offers the chief route to understanding it. [...] We might investigate (a) the role of automaticity; (b) the organization and content of declarative and procedural knowledge; and (c) the function of self regulating cognitive activities like metacognitive strategies, control processes, and motivational and affective factors (Keating, 1990, pp. 252-253)

Selon Perkins (1988), l'expertise réelle d'un domaine va de pair avec une compréhension véritable de ce dernier. Toutefois, tels qu'ils sont utilisés dans la vie de tous les jours, les termes "expertise" et "compréhension" ne sont pas toujours synonymes. En effet, les résultats principaux de la recherche classique sur l'expertise peuvent être décrit en gros comme suit: un vaste répertoire de schèmes, ceux-ci sont très spécialisés pour la discipline étudiée, ils sont stimulés par des processus de reconnaissance ressemblant à ceux de la perception, ils fonctionnent de manière très efficace alors que les routines pour traiter des cas particuliers sont graduellement extraites des principes plus généraux pour être rendues opérationnelles, enfin, ces schèmes reflètent la structure profonde des problèmes de leur discipline. Selon Perkins (1988) toutefois, plusieurs phénomènes ne sont pas pris en ligne de compte dans de telles structures de connaissances. Par exemple, la spécificité de ces structures de connaissance locales ne correspond pas très bien avec la flexibilité souvent démontrée par ceux qui maîtrisent un domaine. Le caractère automatique contredit également la capacité de certains maîtres à examiner leurs processus d'inférences et évaluer leurs connaissances d'un domaine. De plus, selon Perkins (1988) la reconnaissance presque réflexe des schèmes ne va pas nécessairement de pair avec la compréhension et celle-ci nécessite davantage que la simple

considération de la structure profonde des problèmes, comme des explications logiques et empiriques d'un domaine et l'habileté à appliquer les connaissances acquises.

For one, it seems that mastery involves what might be called "layered" knowledge structures. That is, a master in a domain does not just enjoy the benefits of a rich repertoire of particular knowledge, but also has empowering metacognitive and metaconceptual knowledge of the domain. Likewise, a novice may suffer from metacognitive and metaconceptual misconceptions. [...] For another, there are indications that mastery in a domain involves what might be called "gestalt" knowledge structures. That is, a master has access to highly integrative representations that provide gestalt overviews of key domain concepts and systems. Functionally, this means that the master can think about domain problems in a more holistic way, not missing the forest for the trees. [...]

Finally, another characteristic of the inner nature of mastery is "reflective" knowledge structures. That is, masters in a domain have an explicit reflective awareness of how the domain works and how they work in the domain. This goes beyond the layered knowledge structures discussed earlier, because such knowledge can still be tacit. One can, for instance, have an unreflective repertoire of problem solving heuristics. But reflective knowledge of that repertoire adds another sort of leverage, for then one can evaluate and edit that repertoire directly (Perkins, 1988; pp. 9-10)

Ces structures de connaissances "Gestalt" et "de réflexion" semblent correspondre à l'emploi fréquent de la catégorie IP par les experts dans notre étude. Selon notre définition, cela implique que les experts ont une compréhension claire de la nature des problèmes et où ces problèmes se situent dans le processus d'apprentissage et d'enseignement. Cela peut également indiquer pour ces individus, une conscience et connaissance des bases de leur propre système de catégorisation et une habileté à donner un aperçu général de ce système.

En résumé, le problème est d'identifier quelles sortes de structures de connaissances sous-tendent la maîtrise d'un domaine, sans se préoccuper des mécanismes quantitatifs qui opèrent sur ces structures de connaissances (Perkins, 1988). La maîtrise d'un domaine se doit d'impliquer plusieurs types de structures de connaissances de nature plutôt générale et englobante, en plus du répertoire schématique vaste et très spécifique qui joue un rôle clef dans la performance des experts. Le besoin de telles structures de connaissances est d'autant plus grand lorsque l'on considère non seulement la performance dans des domaines typiques, mais aussi la compréhension qu'en a le maître —comment cette compréhension se manifeste— et quelles sortes de structures de connaissances seraient

nécessaires pour servir de médiateur de cette compréhension. De plus, pour comprendre la nature de la maîtrise d'un domaine, on doit non seulement examiner le phénomène typique de l'expertise, mais aussi la compréhension.

Ce que nous apprend la douance. Ericsson et Smith (1991), dans une revue des travaux effectués sur les gens ayant des performances hors de l'ordinaire, montrent que plusieurs des études portant sur les caractéristiques héréditaires menant à de telles performances ont été peu concluantes, ce qui suggère par conséquent qu'une approche plus appropriée serait celle de l'expertise, qui ne tient compte que des caractéristiques acquises et ainsi permet de meilleures études empiriques. Il est dommage que les auteurs créent ainsi une dichotomie, comme on vient de le voir et conformément aux résultats de notre étude, il semble que ce genre de dichotomie ne soit pas très productive. Certains experts doivent sûrement une partie de leur expertise à des caractéristiques dites héréditaires et certaines caractéristiques dites héréditaires ne le sont pas à 100% : des individus peuvent être nés avec une capacité attentionnelle plus élevée, mais il y a place à améliorer nos capacités par l'entraînement. La notion de douance doit sans doute être relativisée. En même temps, comme l'explique Perkins (1988), il faudrait que la notion d'expertise soit plus inclusive, moins restreinte aux aspects mécaniques du traitement de l'information.

Les problèmes rencontrés pour déterminer la nature de ce qu'est un novice ou un expert ont des répercussions directes sur le choix d'une définition de la douance. En effet, les similarités trouvées entre nos sujets de grande habileté, les novices et les experts mettent en évidence les nombreux aspects de la douance qui pourraient peut-être s'acquérir avec un entraînement. Comme l'explique Lester (1982) toutefois, il y a des limites à ce qui peut être appris et il est possible que certaines caractéristiques qui semblent être du domaine de l'apprentissage ne le soit pas totalement:

Perhaps the most serious limitation of studying only skillful behavior is that at least some of the processes used by skillful problem solvers may be qualitatively different from those used by less-skillful individuals. It may not be possible for unskilled problem solvers to acquire some of these processes due to such factors as developmental differences, cognitive style differences, or lack of experience in mathematics. Also the fact that good problem solvers behave in certain ways does not imply that novice or poor problem solvers can be taught to behave in those ways. Finally it must be kept in mind that behaviors that distinguish good from poor problem solvers are probably not sufficient for successful problem solving.

Thus, even if novices can be taught the processes used by experts, it does not follow that these novices will become experts. (p. 60)

Qu'un novice puisse ou non devenir expert dépend sans doute du type de novice dont il est question; c'est-à-dire de la définition que l'on se donne du terme novice.

Le paradigme cognitif s'est révélé très utile en aidant à identifier les composantes cognitives de la douance et comprendre les mécanismes des processus cognitifs qu'elle implique. Toutefois, ce modèle comprend un certain nombre de défis pratiques. L'un d'eux est la nécessité de trouver des bases communes à l'utilisation des termes novices et experts pour permettre de meilleures comparaisons des résultats émergeant des différentes études. L'étude de l'expertise peut être utile pour comprendre la douance, mais nos résultats montrent que l'étude de la douance peut également être utile pour comprendre de l'expertise. L'étude détaillée des processus de pensée d'étudiants du secondaire très habiles et motivés peut aider à définir le terme novice et désigner une population appropriée d'étudiants qui pourraient être étudiés de façon profitable dans la recherche développementale sur l'expertise. L'étude des caractéristiques reliées à la performance intermédiaire des étudiants de grande habileté pourrait être spécialement fructueuse pour aider à comprendre les mécanismes impliqués dans la transition de novice à expert et comprendre comment les différences d'habileté affectent la transition d'un stade à un autre.

Implications pour l'Éducation

Silver (1985) insiste sur l'importance de trouver des moyens pour enseigner aux étudiants comment acquérir une meilleure représentation initiale des problèmes et comment raffiner cette représentation par la suite. En fait, plusieurs recherches démontrent que l'enseignement peut permettre de développer certaines habiletés. Par exemple, différents genres d'entraînements ont été employés avec succès pour améliorer la perception de la structure de problèmes ou de textes: (a) entraînement en techniques de résolution de problèmes mettant l'emphasis sur des stratégies générales de résolution de problèmes mathématiques et sur l'utilisation d'une approche systématique et organisées à la résolution de problème (Schoenfeld & Hermann, 1982), (b) entraînement sur la manière de discriminer entre les structures de textes et d'utiliser les structures de leur manuel scolaire (Cook & Mayer, 1989) et (c) utilisation de diagrammes pour aider les étudiants à

organiser l'information et générer des représentations structurales des problèmes (Berger & Wilde, 1987).

Schoenfeld et Hermann (1982) ont démontré qu'en enseignant intensivement à des élèves (niveau collégial) la résolution de problèmes mathématiques non routiniers, durant un mois, les élèves peuvent apprendre à utiliser certaines stratégies de résolution de problème et qu'il semble y avoir un transfert de ces stratégies à des problèmes non reliés à ceux utilisés lors de l'instruction.

Au niveau de l'enseignement, l'emploi de cartes de concepts comme stratégie d'instruction semblent permettre des améliorations de performance lors de résolutions de problèmes de physique requérant plusieurs étapes (Austin & Shore, 1993), de même que pour l'acquisition de textes (Hall, Dansereau & Skaggs, 1989). Finalement, dans une étude de Rosenheck, Levin et Levin (1989), des étudiants ayant reçu une instruction basée sur des techniques mnémoniques pour apprendre des concepts de botanique, ont fait preuve d'un meilleur rappel et d'une meilleure utilisation de ces concepts dans des tâches de résolution de problèmes, que des étudiants ayant étudié en style libre ou ayant étudié avec une figure basée sur une taxonomie standard.

La possession, par les sujets de grande habileté, de caractéristiques ressemblant à la fois à celles des novices et des experts, a des implications intéressantes pour l'éducation. En effet, ces individus sont de même niveau scolaire que les autres moins doués ce qui permet de comparer plus clairement les sujets de différents rendements ou habiletés, sans que l'influence de l'expérience entre en ligne de compte. Ainsi, les données fournies par les travaux portant sur les individus réussissant les résolutions de problèmes aident à évaluer les différents types d'instructions utilisés. Elles suggèrent également des avenues intéressantes sur le genre d'instructions à donner aux élèves quand on leur demande de résoudre des problèmes. Par exemple, certaines recherches soviétiques (Aroschuk, 1957-1969 dans Silver, 1981) suggèrent que d'enseigner des modèles de problèmes et la demande aux élèves d'identifier le "type" de problème avant de le résoudre, peut ne pas toujours être utile aux solutionneurs de problèmes, amenant parfois la conséquence fâcheuse que les étudiants ne portent plus leur attention que sur les caractéristiques de l'énoncé du problème, délaissant la structure mathématique du problème.

Gliner (1988) propose que l'on demande aux étudiants de penser à un problème similaire à celui qu'ils doivent résoudre:

We may first suggest that they consider general categories, such as algebra, arithmetic, or perhaps geometric processes in the solution. Within these categories, students may consider general methods that they have used for previous problems, such as quadratic forms (algebra) or finding the least common multiple of a number (arithmetic). It may also be helpful to remind students that the context of a problem will not necessarily suggest a solution method. This may be difficult, since textbook problems are often organized in terms of similar context or common units of measurement. (p. 11)

Ce dernier conseil est particulièrement à propos si l'on considère que dans notre étude, les sujets de toutes habiletés ont regroupé les problèmes en se basant, au moins en partie, sur les caractéristiques de surface.

Les résultats de notre étude suggèrent également l'importance de présenter aux élèves différents aspects des problèmes qui peuvent être considérés pour le choix de la solution des problèmes. En effet, la considération d'une variété de raisons pour décrire leurs groupements de problèmes est un des facteurs les plus représentatifs de l'habileté et l'expérience des sujets.

L'analyse de nos résultats a mis en évidence le rôle de la métacognition pour le développement de structures de connaissances complexes et organisées de façon efficace. Selon Silver (1981), deux facteurs métacognitifs influencent de façon particulière l'emmagasinage et le rappel de l'information: le choix des stratégies employées et le système de valeurs et de croyances des individus. Des exemples de stratégies ayant le plus de chances d'influencer l'emmagasinage et le rappel d'information sont les décisions d'employer une stratégie d'élaboration, d'examiner un cas particulier de problème ou de dessiner des diagrammes. Prenons de façon plus particulière le cas de l'élaboration. Ce facteur cognitif semble jouer un rôle dans l'intégration des nouvelles informations dans la mémoire et influence l'organisation des connaissances. "It refers not only to the processes involved in relating new material to previous knowledge either directly or by analogy, but refers also to the creation of logical relationships among components of the material and drawing inferences or implications" (Weinstein, Underwood, Wicker & Cubberly, 1979). Il semble que l'utilisation des mécanismes d'élaboration durant l'apprentissage favorise l'emmagasinage à long terme de l'information et pourrait expliquer plusieurs différences

développementales concernant la tendance ou l'habileté des sujets à élaborer (Reder, 1980; Rowher, 1976). Finalement, selon Silver (1981), "the identification and careful description of other elaboration behaviors of highly capable students should increase our understanding of mathematics problem solving and mathematics learning in general" (p. 20).

Pour ce qui est du système de croyances, "a person's belief about schooling, learning and problem solving in general and beliefs about mathematics and mathematics problem solving in particular can act as powerful guides in the encoding and retrieval of mathematical material" (p. 21). Par exemple, (a) la conviction qu'il y a une structure mathématique sous-jacente et que cette structure est plus importante que les détails de surface amènera une personne à approcher l'étude de matériel mathématique différemment d'une personne qui n'a pas cette conviction. De même, les croyances (b) qu'il y a plus d'une façon de résoudre un problème et (c) que deux méthodes différentes de résolution de problème devraient chacune résulter en la même solution correcte et (d) la croyance qu'il existe une façon plus claire ou concise de présenter un problème ou une solution. De plus, il ne faudrait pas oublier de considérer le système de croyance de l'enseignant et son influence sur la résolution de problèmes mathématiques.

L'un de nos résultats montre que les sujets de grande habileté font beaucoup plus de références à l'enseignement reçu que les sujets d'habileté moyenne et semblent davantage capables d'appliquer ces nouvelles connaissances. Cette déficience, chez les sujets d'habileté moyenne est sans doute en partie due à un manque d'organisation des connaissances. Pour Glaser (1984), le processus d'acquisition des connaissances peut être conçu comme le développement successif de structures qui sont testées, modifiées ou remplacées de façon à faciliter l'apprentissage et la pensée. Ces structures ou schèmes sont donc des cibles de choix pour l'enseignement, car elles permettent l'apprentissage en facilitant le rappel d'informations de la mémoire et aidant les personnes en processus d'apprentissage à tirer des conclusions sur la base de leurs connaissances courantes. L'auteur suggère que, lorsque confrontés à des gens qui manquent d'une organisation adéquate des connaissances, les enseignants devraient leur fournir une structure de connaissance de base comme point de départ. Ceci pourrait être accompli en fournissant des schèmes organisationnels évidents ou en enseignant des modèles temporaires servant

d'échafaudages pour l'information nouvelle. De même, au point de vue pédagogique, on devrait exploiter davantage les techniques d'interrogation et de confrontation. Les enseignants experts le font de façon efficace en employant des analyses de cas, méthodes de découverte et différentes formes de dialogue socratique lorsque leurs élèves recherchent des renseignements. Il semble que de telles méthodes soient des outils puissants pour enseigner la réflexion dans le contexte d'un domaine spécifique, à condition d'être employées de manière adéquate (Collins & Stevens, 1982).

Selon Riley, Greeno et Heller (1983), l'acquisition de structures de connaissances permettant d'améliorer la capacité à se représenter l'information des problèmes, a une influence majeure sur la performance des enfants lors de résolutions de problèmes. Ils proposent que la connaissance des schèmes de problèmes est reliée à l'acquisition de procédures efficaces de calcul et de résolution de problèmes plus sophistiquées. Ces données amènent à la présupposition que la résolution de problème, la compréhension et l'apprentissage sont basés sur la connaissance, en ce sens les gens essaient continuellement d'apprendre et de penser en termes de ce qu'ils savent déjà (Glaser, 1984). Si cela est le cas, une des meilleures approches pour améliorer la réussite des individus semble être d'enseigner des habiletés telles que la résolution de problème et corriger des erreurs de compréhension, dans le contexte des connaissances avec lesquelles les individus sont les plus familiers.

Deux domaines de recherches en éducation peuvent nous aider à découvrir les chemins qui mènent à l'expertise: les évaluations fondées sur le curriculum et les évaluations dynamiques (Keating, 1990). En effet, les éducateurs ont besoin de savoir quoi faire dans un cadre instructionnel et ces genres de conseils ne sont pas disponibles à partir d'indices grossiers d'habileté, d'aptitude ou de réussite que les individus obtiennent dans les évaluations courantes. Il nous faut réunir nos connaissances croissantes des mécanismes d'acquisition de l'expertise et nos efforts pour utiliser l'évaluation comme guide de nos décisions sur l'instruction, afin que les évaluations psychoéducatives soient à la fois bien solides théoriquement dans les sciences cognitives, et plus précises au point de vue de l'enseignement. Pour être efficace, ce genre d'évaluation doit être dynamique plutôt que statique (Campione, 1989). "Dynamic assessment involves understanding not just what competence children can display when working alone, but what they are capable of doing

with escalating levels of assistance" (Keating, 1990, p. 261). Cette extension possible des habiletés est ce que Vygotsky (1979) a identifié sous le nom de "zone of proximal development (ZPD)". Il est évident que l'enseignement à l'intérieur de la ZPD doit être encouragé, par opposition à l'enseignement de ce que les enfants savent déjà ou de ce qu'ils ne peuvent pas encore comprendre.

L'évaluation dynamique peut servir de base pour rapprocher l'évaluation de l'enseignement, mais cela requiert que leurs natures se modifient. En effet, une évaluation basée sur des modèles courants de l'acquisition de l'expertise, mise à jour fréquemment, et qui possède assez de flexibilité pour spécifier les limites de performance, devra être contrebalancée par une pédagogie suffisamment adaptable pour s'ajuster avec la diversité développementale qu'une telle évaluation révélera.

Selon Resnick (1989), il semble que les étudiants forts en mathématiques utilisent des principes mathématiques implicites et leur connaissance de situations impliquant des quantités, pour construire des explications et des justifications pour les règles mathématiques, même lorsque de telles explications ne sont pas demandées par les enseignants. Dans plusieurs autres domaines, il semble que les individus qui réussissent bien tendent à traiter l'apprentissage comme un processus d'interprétation, de justification et de construction de signification. On peut citer en exemple les bons écrivains (Flower & Hayes, 1980), les bons raisonneurs en sciences politique et économie (Voss, Greene, Post & Penner, 1983) et les bons solutionneurs de problèmes en science (Chi, Glaser & Rees, 1982). Un exemple plus détaillé, les bons lecteurs sont plus conscients de leur propre niveau de compréhension que les faibles et font davantage d'élaboration et de questionnement pour arriver à une interprétation correcte (sensible) de ce qu'ils lisent. (Brown, Bransford, Ferrara & Campione, 1983). Resnick (1989) suggère que l'on devrait considérer la possibilité d'enseigner les mathématiques comme une discipline non structurée. En effet, la façon la plus habituelle d'enseigner les mathématiques amène plusieurs enfants à considérer ceux-ci comme une collection de règles pour manipuler des symboles mathématiques, plus, quelques trucs pour solutionner des problèmes écrits stéréotypés. L'enseignement devrait avoir comme but de développer l'habileté, non seulement à appliquer les mathématiques, mais aussi à penser mathématiquement. Il

tendrait à développer les capacités et dispositions à trouver des relations entre les entités mathématiques, de même qu'entre les énoncés mathématiques et les situations impliquant des quantités, relations et patrons. L'ensemble du travail récent sur la cognition suggère que "becoming a good mathematical problem solver — becoming a good thinker in any domain — may be as much a matter of acquiring the habits and dispositions of interpretation and sense-making as of acquiring any particular set of skills, strategies and knowledge" (Resnick, 1989; p. 58).

Directions Futures

Selon Chipman (1985), il faut acquérir une bonne compréhension de la façon dont les connaissances sont organisées dans la mémoire pour être capables de guider les recherches sur la manière dont les connaissances sont les plus efficacement acquises et utilisées. Par exemple, le travail de Rissland (1985) adresse cet aspect de l'acquisition des connaissances. Après analyse de la structure globale des connaissances mathématiques en tant que domaine théorique, elle émet et présente des hypothèses concernant l'organisation fondamentale de la connaissance mathématique. Selon Chipman, il reste encore à tester la validité psychologique de ces hypothèses pour savoir si elle a correctement caractérisé les connaissances possédées par un expert mathématicien. Toutefois, les méthodes utilisées par Chi, Feltovich et Glaser (1981) pour les connaissances de physique (mécanique) illustrent bien le genre de méthodes qui pourraient être utilisées pour fournir une base empirique à de telles descriptions des connaissances des experts. Comme notre recherche a utilisé ces mêmes méthodes pour les mathématiques, il pourrait être intéressant et pertinent de comparer nos résultats avec ceux de Rissland et essayer de voir les correspondances. C'est la combinaison de ces deux genres de recherche, l'une plutôt descriptive et l'autre empirique qui pourra nous fournir une compréhension plus forte de l'organisation des connaissances des experts.

Une fois que nous aurons bien caractérisé ce qui constitue des structures de connaissances matures nous pourrions nous demander quelle est la façon la plus efficace d'acquérir cette connaissance ou de l'enseigner. En effet, bien qu'il existe quelques données anecdotiques indiquant que les étudiants trouvent utile d'être informés de la structure des connaissances (Rissland, 1985), il reste à démontrer de façon plus empirique

si ce genre d'information apporte quelque chose de plus à ces étudiants et à découvrir les circonstances qui permettent à ce type d'informations d'être utiles.

Selon Chipman (1985), les questions traitant de l'utilité de l'information structurale sont des cas particuliers de questions instructionnelles plus générales. Étant donné une structure définie, quelle serait la manière la plus efficace de présenter les informations aux étudiants? En particulier, il importe de comprendre comment les individus acquièrent de hauts niveaux d'organisation conceptuelle, tels que ceux démontrés dans les connaissances en physique des experts. Est-ce que ces hauts niveaux d'organisation conceptuelle peuvent être enseignés ou doivent-ils émerger de l'expérience considérable avec des concepts de bas niveaux? Y-a-t-il des façons de faciliter leur apparition en structurant l'expérience des étudiants (Chipman, 1985)? Finalement, toutes ces questions sont reliées à une autre: quelle est la relation entre la connaissance de notre propre connaissance et la connaissance elle-même? En fournissant aux élèves les caractéristiques de haut niveau des structures de connaissances, on altère peut-être la relation entre ces deux types de connaissances. En effet, quelques-unes des innovations instructionnelles proposées fourniraient aux étudiants des informations à propos des caractéristiques de la connaissance d'un domaine qui ne sont ordinairement possédées que par quelques experts perspicaces.

Whether knowledge is the result of careful instructional design or of an individual effort to acquire it, there are important questions about the later accessibility of that knowledge, about the flexibility of access to that knowledge, and about its usability in a context other than the one in which it was acquired. What characteristics of the final state of knowledge or of the process of acquisition predict the flexible utility of knowledge? Answering these questions will require a more imaginative and multidimensional approach to the assessment of knowledge than has been typical in the past. However, analyses of knowledge structure should provide a stronger foundation for assessments than has been available in the past (Chipman, 1985; p. 23).

Nos résultats mettent en évidence une organisation des connaissances supérieure à mesure que l'habileté augmente. Bien qu'il ne semble pas y avoir de doute sur l'importance de la possession d'une base de connaissance élaborée et bien organisée pour l'atteinte d'une bonne performance, le rôle exact de ces connaissances et leur organisation doit être étudié davantage. En effet, à peu près tous les auteurs s'accordent à dire que la métacognition joue un rôle aussi déterminant que les connaissances vis-à-vis de cette performance. D'un côté, il semble que de bonnes connaissances de base peuvent

compenser pour un manque d'aptitude (Sneider, Körkel & Wernert, 1989) et qu'un minimum de connaissances soit nécessaires pour celles-ci soient bien organisées et pour permettre l'usage de certains processus métacognitifs (Chi, Hutchinson & Robin, 1989). D'un autre côté, il semble que la connaissance seule ne suffise pas à l'atteinte de l'expertise. Le rôle de la métacognition reste encore à éclaircir. Est-ce la métacognition qui permet à l'individu de se construire un ensemble de connaissances fortes et bien organisées? Ou plutôt, ne serait-ce pas le fait de posséder une organisation des connaissances qui fournirait les bases nécessaires au développement maximal des capacités métacognitives?

Une des directions des recherches futures sur la douance devrait être la compréhension des mécanismes et du fonctionnement intellectuel chez les individus doués et talentueux (Horowitz & O'Brien, 1985). Ceci inclut l'investigation de l'acquisition des connaissances, leur emmagasinage et leur rappel, aussi bien que l'identification des problèmes et leur solution. L'évolution de ces mécanismes de traitement de l'information devraient être examinés à l'échelle d'une vie entière (Horowitz & O'Brien, 1985; Keating, 1990) selon le plan suivant: (a) identifier le plus tôt possible des performances hautement compétente dans différents domaines de comportements, (b) observer, à travers le temps, l'évolution des mécanismes et fonctions impliquées dans les comportements et (c) décrire les conditions environnementales pertinentes au développement de ces comportements (Horowitz & O'Brien, 1986).

En dépit des nombreux développements théoriques et méthodologiques dans le domaine de la résolution de problème, plusieurs recherches restent encore à faire, particulièrement en ce qui a trait aux différences experts/novices. Par exemple, les changements qui se produisent lors de la transition de l'état de novice à celui d'expert ne sont pas encore bien connus. Il reste à étudier davantage les différentes étapes qui caractérisent cette transition, au niveau des processus cognitifs impliqués. Par exemple, selon Silver (1985), "It is quite reasonable and theoretically useful to study the beginning and ending points of a presumed continuum of expertise in a knowledge domain, but we would be wise to remember the following points: (1) there may be discontinuities along the path from novices to experts [...]". Il est évident que les comportements de résolution de problème des experts sont très efficaces et souvent élégants, mais, selon Silver, ces comportements

raffinés et matures dissimulent les approximations successives qui ont précédé l'atteinte de cette maturité. "(2) we must not act as if 'novices' and 'experts' were terms denoting equivalence classes of interchangeable elements [...]". Deux experts comparés l'un à l'autre ne sont pas nécessairement équivalents, de même pour les novices. Silver distingue les experts des "EXPERTS" (ceux qui se mériteront distinctions et honneurs), de même que les novices des "NOVICES". En effet, certains novices deviendront un jour des experts ou des "EXPERTS", d'autres deviendront raisonnablement compétents et habiles dans un certain domaine et enfin certains ne deviendront rien de plus que des novices avec beaucoup d'expérience. Il devient important d'examiner comment différents experts approchent et résolvent des problèmes difficiles dans leur domaine. De plus, l'on doit être prudent, car un expert dans un des champs mathématiques n'est pas nécessairement un expert dans un autre des champs mathématiques. Enfin, "(3) we need to characterize carefully the domain of expertise that we are studying and avoid extrapolating too far beyond the boundaries of the domain" (Silver, 1985, p. 252). "In addition it might be useful to study schema differences among problem solvers who are similarly proficient; differences between two 'experts' in a task domain may be as important to study as the differences between 'experts' and 'novices' in that domain" (Silver, 1981, p. 18).

Comme le suggère Schoenfeld et Hermann (1982), les différences de perception de la structure des problèmes examinés en contrastant experts et novices, ont souvent été attribuées au niveau d'expertise, même si les groupes diffèrent quant à plusieurs aspects, dont l'aptitude: "relative to novices, experts are usually older, more trained, more experienced, and most likely possess[ed] of better aptitude for the subject domain" (p. 485). Il serait important de faire des études permettant de mieux déterminer quels aspects des résultats obtenus sont dus à l'habileté ou aptitude des sujets, ou encore à des différences développementales ou d'expérience.

Les recherches futures devront mettre davantage l'emphasis sur les domaines moins bien définis dont les problèmes sont mal structurés. En effet, selon Voss, Greene, Post et Penner (1983), les différences individuelles entre experts de domaines définis pourraient ne pas être aussi importantes que celles observées dans les domaines moins bien définis. En effet, les experts de domaines définis solutionnent en général leurs problèmes de la

même façon, alors qu'il y a une grande divergence d'opinions dans des domaines tels que les sciences sociales. Ces variations individuelles dans la nature de l'expertise soulèvent non seulement la question de "comment un expert devient-il expert?", mais aussi, "pourquoi, dans sa transition à un état d'expert, une personne développe-t-elle une façon d'approcher les problèmes qui diffère de celle d'une autre?". Il faut donc trouver une meilleure façon de décrire ces distinctions individuelles. Un moyen utile pour y arriver serait de créer un genre de structure contenant un ensemble fini de paramètres, qui, selon leur combinaison, dépeindraient les différences individuelles en résolution de problème (Voss et al., 1983)

Il est fort probable que les progrès réalisés dans le domaine de la résolution de problème vu sous l'angle des relations experts-novices aident et aideront la psychologie cognitive à se développer et à produire une théorie de l'apprentissage et de l'instruction. En effet, en étudiant la transition entre l'état de novice et celui d'expert, ce sont les phénomènes de la compétence et de la compréhension que l'on étudie; en décrivant l'état de novice et celui d'expert on pourra connaître les causes des difficultés d'apprentissage et de compréhension des novices et on connaîtra davantage les caractéristiques permettant les performances optimales des experts. En étudiant la transition entre ces deux états, on pourra ainsi mieux comprendre la manière dont une personne peut en arriver à intégrer, d'une manière organisée, l'information nouvelle aux connaissances acquises précédemment, à appliquer ces connaissances acquises et à résoudre avec facilité les problèmes qui lui sont présentés.

BIBLIOGRAPHIE

- Aiken D. J., Henderson K. B. & Pingry R. E. (1960). Algebra: its big ideas and basic skills Book II. Modern mathematics edition, McGraw-Hill.
- Alexander P. A. & Muia J. A. (1982). Gifted Education: a comprehensive road map. P. A. Alexander & J. A. Muid (Eds.). Rockville, MD: Aspen System Corp.
- Anderson, J. R. (1980). Cognitive psychology and its implications. San Francisco: W. H. Freeman.
- Anderson, J. R. (1982). Acquisition of cognitive skill. Psychological Review, 89(4), 396-406.
- Austin, L. (1992). Individual differences in knowledge representation and problem-solving ability in physics. Unpublished doctoral dissertation, McGill University, Montreal.
- Berger, D. E. & Wilde, J. M. (1987). A task analysis of algebra word problems. Dans D. E. Berger, K. Pezdek & W. P. Banks Applications of cognitive psychology: problem solving, education and computing (pp. 123-137). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Bereiter, C. & Scardamalia, M. (1987). An attainable version of high-literacy: Approaches to teaching higher order skills in reading and writing. Curriculum Inquiry, 17(1), 9-30.
- Biderman, A. D. (1967). Surveys of population samples for estimating crime incidence. The Annals of the American Academy of Political and Social Science, 4374, 16-33.
- Briars, D. J. (1982). Implications from information-processing psychology for research on mathematics learning and problem solving. Dans F.K. Lester & J. Garofalo, Mathematical problem solving: issues in research (pp. 39-52). Philadelphia, PA: Franklin Institute Press.
- Brown, A. L., Bransford, J. D., Ferrara, R.A., Campione. J. C. (1983). Learning, remembering, and understanding. Dans J.H. Flavell & E. M. Markman (Eds.), Handbook of child psychology: Vol. 3. Cognitive development (4th ed., pp.77-176). New York: Wiley.

- Brown, J. S., Burton, R. R., & de Kleer, J. (1983). Pedagogical, natural language and knowledge engineering techniques in SOPHIE I, II, et III. Dans D. Sleeman, & J. S. Brown (Eds.), Intelligent tutoring systems. New York: Academic Press.
- Campione, J. C. (1989). Assisted assesment: A taxonomy of approaches and an outline of strenghts and weakness. Journal of Learning Disabilities, 22, 151-165.
- Cannell, C. F., & Kahn, R. L. (1968). Interviewing. Dans G. Lindsey & E. Aronson (Eds.), The handbook of social psychology (Vol. 2). Reading, MA: Addison-Wesley.
- Carey, S. (1985). Are children fundamentally different thinkers than adult? Dans S. Chipman, J. Segal, & R. Glaser (Eds.), Thinking and learning skills.: Vol. 2. Research and open question (pp. 485-518). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Chartoff, B. T. (1977). An exploratory investigation utilizing a multidimensional scaling procedure to discover classification criteria for algebra word problems used by students in grades 7-13 (Doctoral dissertation, Northwestern University, 1976). Dissertation Abstracts International, 37, 7006A. (University Microfilms No. 77-10, 012.
- Chase, W. G., & Simon, H. A. (1973). Perception in chess. Cognitive Psychology, 4, 55-81.
- Chase, W. G., & Simon, H. A. (1979). Perception in Chess. Dans H. A. Simon (Ed.), Models of thought. New Haven, CT: Yale University Press.
- Chase, W. G., & Chi, M. T. H. (1981). Cognitive skill: Implications for statial skill in large-scale environments. Dans J. Harveys (Ed.), Cognition, social benavior, and the environment. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Cheng, P. (1993). Metacognition and Giftedness: Is Superior Metacognitive Ability an Essential Component of Giftedness? Gifted Child Ouarterly, 37(3), 105-112.
- Chi, M. T. H. & Glaser, R. (1985). Problem-Solving Ability. Technical Report, Learning Research and Development, Pittsburgh Univ., PA.
- Chi, M. T. H. (1976). Short-term memory limitations in children: Capacity or processing deficits? Memory & Cognition, 4, 559-572.
- Chi, M. T. H. (1978). Knowledge structures and memory development. Dans R. Siegler (Ed.), Children's thinking: What develops? (pp.73-96) Hillsdale, NJ: Erlbaum.

- Chi, M. T. H. (1985). Interactive roles of knowledge and strategies in the development of organized sorting and recall. Dans S. F. Chipman, J.W. Segal & R.J. Glaser (Eds.), Thinking and learning skills (Vol. 2, pp.457-483). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Chi, M. T. H. (1987). Technical Report no. 9. Learning and Development Center, Pittsburg Univ., PA.
- Chi, M. T. H. et Glaser, R. J. (1985). Problem solving ability. Dans R. J. Sternberg (Ed.), Human abilities: an information-Processing approach, (pp. 227-250), New York, N.Y.: W.H. Freedman and Cie.
- Chi, M. T. H., Feltovich, P. J. et Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. Cognitive Science, 5, 121-152.
- Chi, M. T. H., Glaser R., and Rees, E. (1982). Expertise in problem solving. Dans R. J. Sternberg (Ed.), Advances in the psychology of human intelligence (Vol.1, pp. 7-75). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Chi, M. T. H., Hutchinson, J. E. & Robin, A. F. (1989). How inferences about novel domain-related concepts can be constrained by structured knowledge. Merrill-Palmer Quaterly, 35, 27-62.
- Chi, M. T. H., & Koeske, R. (1983). Network representation of a child's dinosaur knowledge. Developmental Psychology, 19, 29-39.
- Chiesi, H., Spilich, G. J., & Voss, J. F. (1979). Acquisition of domain-related information in relation to high and low domain knowledge. Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior, 18, 257-273.
- Chipman, S. F. (1985). Introduction to volume 2: Research trends and their implications. Dans S. F. Chipman, J. W. Segal & R. J. Glaser (Eds.), Thinking and learning skills (Vol. 2, pp. 19-36).
- Clark B. (1983) Growing up Gifted (2nd edition). Columbus: Merrill.
- Clement, J. (1982). Students' preconceptions in introductory mechanics. American Journal of Physics, 50, 66-71.
- Clement, J. (1991). Nonformal reasoning in physics: The use of analogies and extreme cases. In J. F. Voss, D. N. Perkins, et J. W. Segal (Eds.), Informal reasoning. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

- Coleman E. B. (1988). Problem-solving processes of high and average performers in Physics. Unpublished master thesis, McGill University, Montreal.
- Coleman E. B. & Shore, B. M. (1991). Problem-solving processes of high and average performers in physics. Journal for the Education of the Gifted, 14 (4), pp.366-379.
- Coleman, N. C. (1977). Learning and comprehension of simulataneously presented stimuli in children of normal and superior intelligence. Dissertation Abstracts International, 38(3-A), 1296.
- Collins, A., & Stevens, A. L. (1982). Goals and strategies of inquiry teachers. Dans R. Glaser (Ed.), Advances in instructional psychology, (Vol. 2, pp. 65-119), Hillsdale, NJ: L. Erlbaum.
- Cook, L. K. & Mayer, R. E. (1988). Teaching readers about the structure of Scientific text. Journal of Educational Psychology. 4, 448-456.
- Cronbach, L. J., & Snow, R. E. (1977). Aptitudes and instructional methods: a handbook for research on interactions. New York: Irvington.
- Davidson, J. E., & Sternberg, R. J. (1984). The role of insight in intellectual giftedness. Gifted Child Quarterly, 28, 58-64.
- Davis G. A. & Rimm S. B. (1985). Education of the gifted and talented. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Halls.
- de Groot, A. D. (1965). Thought and choice in chess. The Hague: Mouton.
- Dillenger, M. (1987). Segmentation and clause analysis manual. McGill University, Montréal.
- Dodson, J. W. (1972). Characteristics of successful insightful problem solvers. Report 31 of the National Longitudinal Study of Mathematical Abilities. Stanford, California: School Mathematics Study Group.
- Donald, J. G. (1983). Knowledge structures. Journal of higher education. 54(1), 31-41.
- Donald, J. G. (1987). Learning schemata: methods of representing cognitive, content and curriculum structures in higher education. Instructional Science, 16, 187-211.
- Dreyfus, H. L., & Dreyfus, S. E. (1986). Five steps from novice to expert. Dans Mind over Machine, New York: Free Press.
- Egan, D.E. & Schwartz, B. J. (1979). Chunking in recall of symbolic drawings. Memory & Cognition, 7(2), 149-158.

- Eisenstadt, M., & Kareev, Y. (1975). Aspects of human problem solving: The use of internal representations. Dans D. A. Norman & D. E. Rumelhart, (Eds.), Explorations in cognition (pp.308-346), San Francisco: W. H. Freeman.
- Ericsson K. A. & Simon H. A. (1984). Protocol Analysis: Verbal reports as data. Cambridge, Mass.: MIT Press, Massachusetts.
- Ericsson, K. A., & Smith J. (1991). Prospects and limits of the empirical studies of expertise: an introduction. Dans K.A. Ericsson et J. Smith. Towards a general theory of expertise: prospects and limits (pp. 1-38), Cambridge University Press.
- Feltovich, P. J. (1981). Knowledge based components of expertise in medical diagnosis (Report PDS-2). University of Pittsburgh, Learning Research and Development Center.
- Flavell, J. H. (1976). Metacognitive Aspects of Problem Solving. In L. B. Resnick (Ed.), The Nature of Intelligence (pp.231-235). Hillsdale, NJ: L. Erlbaum.
- Flavell, J. H. (1978). Metacognitive development. In J. M. Scandura & C. J. Brainerd (Eds.), Structural/process models of complex human behavior (pp.213-245). Alphen aan den Rijn, Netherlands: Sijthoff & Noordhoff.
- Flower, L. S., & Hayes, J. R. (1983). The dynamics of composing: Making plans and juggling constraints. Dans L. Gregg & E. Sternberg (Eds.) Cognitive processes in writing: An interdisciplinary approach (pp. 31-50). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Frederiksen, N. (1984). Implications of cognitive theory for instruction in problem solving. Review of Educational Research, 54(3), 363-407.
- Garner, R. (1987). Metacognition and reading comprehension. Norwood, NJ: Ablex.
- Glaser, R. (1984). Education and thinking: The role of knowledge. American Psychologist, 39, 93-104.
- Glaser, R. (1985). Thoughts on expertise. The study of expertise as a model for life-span cognitive development (Technical Report #8). Conference given at the Social Science Research Council Conferences on The Study of Expertise as a Model for Life-Span Cognitive Development.
- Gliner, G. S. (1988, Avril). College students' organization of mathematics word problems in relation to success in problem in problem solving. Présenté au congrès annuel de l'American Educational Research Association, New Orleans, LA.

- Greeno, J. G. & Simon, H. A. (1984). Problem solving and reasoning. Dans R.C. Atkinson, R. Herrnstein, G. Lindsey, & R.D. Luce (Eds.), Steven's Handbook of Experimental Psychology (Vol. 2, pp.589-672). New York: John Wiley & Sons.
- Greeno, J. G. (1977). Process of understanding in problem solving. Dans N. J. Castellan, D. B. Pisoni, G.R. Potts (Eds.), Cognitive theory (Vol. 2). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Greeno, J. G. (1978). Nature of problem solving abilities. In W. K. Estes (Ed.), Handbook of learning and cognitive processes (Vol.5, pp.239-270). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Groen, G. J. & Parkman, J. M. (1972). A chronometric analysis of simple addition. Psychological Review, 79, 329-343.
- Hall, R. H., Dansereau, D. F. & Skaggs, R. (1989, Mars). Knowledge maps and the presentation of related information domains. Présenté au congrès annuel de l'American Educational Research Association, San Francisco, CA.
- Halliday, M. (1967). Notes on transitivity and theme in English. Journal of linguistics, 3, 37-81.
- Halliday, M. (1968). Notes on transitivity and theme in English. Journal of linguistics, 4, 179-215.
- Halliday, M. (1985). Introduction to functional grammar. London: E. Arnold.
- Hatano, G., & Inagaki, K. (1986). Two courses of expertise. Dans H. Stevenson, H. Azuma, & K. Hakuta (Eds.), Child development and education in Japan (pp. 262-272). San Francisco: W. H. Freeman.
- Hayes, J. R., & Simon, H. A. (1976). The understanding process: Problems isomorphs. Cognitive Psychology, 8, 165-190.
- Hayes, J. R., & Simon, H. A. (1977). Psychological differences among problem isomorphs. Dans N. J. Castellan, P.S. Pisoni, & G. R. Potts (Eds.), Cognitive theory (Vol.2). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Hayes, J. R., Waterman, D. A., & Robinson, C.S. (1977). Identifying the relevant aspects of a problem text. Cognitive Science, 1, 297-313.
- Hermelin, B. & O'Connor, N. (1986). Spatial representations in mathematically and in artistically gifted children. British Journal of Educational Psychology, 56, 150-157.

- Hinsley, D. A., Hayes, J. R., & Simon, H. A. (1978). From words to equations: meaning and representation in algebra word problems. Dans P. A. Carpenter & M. A. Just (Eds.), Cognitive processes in comprehension (pp. 89-106). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Horowitz, F. D. & O'Brien, M. (1985). Epilogue. Perspectives on research and development. Dans F. D. Horowitz et M. O'Brien (Eds.), The gifted and talented: developmental perspectives (pp. 437-454). Washington, D.C.: American Psychological Association.
- Horowitz, F. D. & O'Brien, M. (1986). Gifted and talented children: State of knowledge and directions for research. American Psychologist, 41(10), 1147-1152.
- Jeeves, M. A. & Greer, G. B. (1983). Analysis of structural learning. New York: Academic Press.
- Kaizer, C & Shore, B. M. (sous presse). Strategy, use of cognitive strength, and flexibility in mathematically competent students. Creativity Research Journal, 8(1).
- Kaizer, C. (1988). Strategy, use of cognitive strength, and flexibility in mathematically competent students. Unpublished masters thesis, McGill University, Montreal.
- Keating, D. P. (1990a). Charting Pathways to the development of expertise. Educational Psychologist, 25 (3&4), 243-267.
- Keating, D. P. (1990b). Constructivism and diversity. Dans D. Keating and H. Rosen (Eds.), Constructivist perspectives on developmental psychopathology and atypical development (pp. 1-9). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Keating, D. P., & Bobbitt, B. (1978). Individual and developmental differences in cognitive-processing components of mental ability. Child Development, 49, 155--167.
- Keating, D. P., & Crane, L. (1990). Domain general and domain specific processes in proportional reasoning. Merrill-Palmer Quarterly, 36, 411-424.
- Krippendorff, K. (1980). Content analysis: an introduction to its methodology. Beverly Hills, CA.: Sage Publications.
- Krutetskii, V. A. (1976). The psychology of mathematical abilities in schoolchildren. Chicago: University of Chicago Press.
- Larkin, J. H. (1979). Processing information for effective problem solving. Engineering Education, 70(3), 286-288.

- Larkin, J. H. (1981). Enriching formal knowledge: a model for learning to solve textbook Physics problems. Dans J. R. Anderson (Ed.), Cognitive skills and their acquisition. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Larkin, J. H. (November, 1980). Understanding, problem representations and skill in physics (Tech. Rep. Applied Cognitive Psychology NO. 2). Pittsburgh: Carnegie-Mellon University, Department of Psychology.
- Larkin, J. H., McDermott, J., Simon, D.P. and Simon, H.A. (1980). Expert and novice performance insolving physics problems. Science, 208, 1335-1342.
- Lesgold, A. M., Feltovich, P. J., Glaser, R., & Wang, Y. (1981). The acquisition of perceptual diagnostic skill in radiology (Report PDS-1). University of Pittsburgh, Learning Research and Development Center.
- Lesh, R. (1985). Processes, Skills, and Abilities Needed to Use Mathematics in Everyday Situations. Education and Urban Society, 17(4), 439-446.
- Lester, F. K. (1982). Building bridges between psychological and mathematics education research on problem solving. In Lester F. K. et Garofalo, J. (Eds.), Mathematical problem-solving: Issues in research (pp. 55-85). Philadelphia: The Franklin Institute Press.
- Lester, F. K. (1983). Trends and issues in mathematical problem-solving research. In R. Lesh and M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes (pp. 229-261). New York: Academic Press.
- Ludlow, B. L., & Woodrum, D. T. (1982). Problem-solving strategies of gifted and average learners on a multiple discrimination task. Gifted Child Quarterly, 26, 99-104.
- Maniatis, E. (1983). An analysis of the differences in problem solving of gifted and non-gifted children using LOGO programming language. Unpublished masters thesis, McGill University, Montreal.
- Mayer, R. E. (1982). Different problem-solving strategies for algebra word and equation problems. Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition, 8(5), 448-462.
- Mayer, R. E. (1982). Memory for algebra story problems. Journal of Educational Psychology, 74, 199-216.

- Mayer, R. E. (1983). Thinking, problem solving, and cognition. San Francisco: W. H. Freeman.
- Mayer, R. E. (1985). Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving. Dans E. A. Silver, Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspective (pp. 123-138). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- McDermott, J., & Larkin, J. H. (1978). Re-representing textbook physics problems. Proceedings of the 2nd National Conference of the Canadian Society for Computational Studies of Intelligence. Toronto: University of Toronto Press.
- McKeithen, K. B., Reitman, J. R., Ruter, H. H., & Hirtle, S. C. (1981). Knowledge organization and skill differences in computer programmers. Cognitive Psychology, 13, 307-325.
- Meichenbaum, D. (1980). A cognitive-behavioral perspective on intelligence. Intelligence, 4(4), 271-283.
- Miller, G. A. (1956). The magical number seven, plus or minus two: some limits on our capacity for processing information. Psychological Review, 63, 81-97.
- Miller, R. A., Pople, H. E., & Myers, M. D. (1982). Internist-1, An experimental computer-based diagnostic consultant for general medicine. New England Journal of Medicine, 307, 468-476.
- Ministère de l'Éducation (1984). Curriculum mathématique du second cycle du secondaire. (Document # 16-3302A). Publication du gouvernement du Québec.
- Ministère de l'Éducation (1986). Information document on the 1986 examinations in natural sciences and mathematics. (Document # 16-7177A). Publication du gouvernement du Québec.
- Neigemann, H., & Parr, I. (1986). Classification of algebra and physics word problems by subjects of different levels expertise. Saarbrücken, Fachrichtung: Allgemeine Erziehungswissenschaft der Universität des Saarlandes, Technical Report No.33.
- Newell, A., & Simon, H. A. (1972). Human problem solving. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Novack, G. S., Jr., & Araya, A. A. (1980, June). Research on expert problem solving in physics (Technical Report NL-40). Austin: University of Texas, Department of Computer Sciences.

- Olson, J. R., & Biolsi, K. J. (1991). Techniques for representing expert knowledge. Dans K.A. Ericsson & J. Smith. Towards a general theory of expertise: Prospects and limits (pp.240-285). Cambridge University Press.
- Owen, E., & Sweller, J. (1985). What do students learn while solving mathematical problems? Journal of Educational Psychology, 77(3), 272-284
- Patel, V.L. & Groen, G. J. (1991). The general and specific nature of medical expertise: a critical look. Dans K.A. Ericsson et J. Smith. Towards a general theory of expertise: prospects and limits (pp. 93-125). Cambridge University Press.
- Paterson R.C., Clarke R. L. S., George M. D. & Kurys S. R. (1970). Algebraic and Circular Functions. Holt, Rinehart and Winston of Canada Limited, Canada.
- Pelletier, S., Shore, B. M. Kanevsky, L. S. & Rejskind, F. G. (en préparation). Gifted = Novice or Expert? Clues from the study of expertise in high performing mathematics students. In A. J. Tannenbaum (Ed.), Creativity and giftedness [working title].
- Pendarvis E. D., Hoogwley A.A. & Howley C.B. (1990). The abilities of gifted children, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Perkins, D. N. (1988, April). Understanding and expertise: The double helix of mastery. Dans Constraints and chances in transfer of knowledge. Symposium conducted at the meeting of the American Educational Research Association, New Orleans.
- Polya, G. (1973). Induction and Analogy in Mathematics. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Pople, H. E. (1977). The formation of composite hypotheses in diagnostic problem solving: An exercise in synthetic reasoning. Proceedings of the 5th International Joint Conference on Artificial Intelligence. Cambridge, Mass.: MIT Press.
- Rabinowitz, M. & Glaser, R. (1985). Cognitive structure and process in highly competent performance. Dans F.D. Horowitz & M. O'Brien (Eds.), The gifted and talented: developmental perspectives (pp. 75-98), Washington, D.C.: American Psychological Association.
- Reder, L. M. (1980). The role of elaboration in the comprehension and retention of prose. Review of Educational Research, 50, 5-53.

- Reif, F. (1979). Cognitive mechanisms facilitating human problem solving in a realistic domain: The example of physics. (Manuscript soumis pour publication)
- Renzulli, J. S., Reis, S. M., & Smith, L. H. (1981). The resolving of identification model. Mansfield Center, CT: Creative Learning Press.
- Resnick, L. B. (1989). Treating mathematics as an ill-structured discipline. Dans E. A. Silver (Ed.), The teaching and assessing of mathematical problem solving (pp. 32-60). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Ricca, J. (1984). Learning styles and preferred instructional strategies of gifted students. Gifted Child Quarterly, 28, 121-126.
- Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. Dans H. P. Ginsburg (Ed.), The development of mathematical thinking (pp. 153-196). New York: Academic Press.
- Rissland, E. L. (1985). The structure of knowledge in complex domains. Dans S. F. Chipman, J.W. Segal & R.J. Glaser (Eds.), Thinking and learning skills (Vol. 2, pp. 107-126).
- Rohwer, W. D. (1976). An introduction to research on individual and developmental differences in learning. Dans W. K. Estes (Ed.), Handbook of learning and cognitive processes: Vol. 3. Approaches to human learning and motivation. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Rosenheck, M. B., Levin, M. E. & Levin, J. R. (1989). Learning botany concepts mnemonically: seeing the forest and the trees. Journal of Educational Psychology, 81 (2), 196-203.
- Rumelhart, D. E. & Norman, D. A. (1983). Representation in Memory. Information Analysis, Center for Human Information Processing. Univ. California, San Diego, CA.
- Rumelhart, D. E. (1975). Explorations in cognition. San Francisco: W. H. Freeman.
- Salthouse, T. A. (1991). Expertise as the circumvention of human processing limitations. Dans K. A. Ericsson et J. Smith. Towards a general theory of expertise: prospects and limits (pp. 286-300). Cambridge University Press.
- Schneider, W. Korkel, J. & Weinert, F. E. (1989). Domain-Specific knowledge and memory performance: a comparison of high- and low-aptitude children. Journal of Educational Psychology, 81 (3), 306-312.

- Schoenfeld, A. H. (1982). Some thoughts on problem-solving research and mathematics education. Dans F. K. Lester & J. Garofalo (Eds.), Mathematical problem solving: issues in research (pp. 27-37). Philadelphia, PA: Franklin Institute Press.
- Schoenfeld, A. H. (1982). Some thoughts on problem-solving research and mathematics education. Dans F. K. Lester et J. Garofalo. Mathematical problem solving: issues in research (pp. 27-37). The Franklin Institute Press.
- Schoenfeld, A. H., & Hermann, D. J. (1982). Problem perception and knowledge structure in expert and novice mathematical problem solvers. Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition, 8(5), 484-494.
- Scruggs, T. E., Mastropieri, M. A., Monson, J., & Jorgensen, C. (1985). Maximizing what gifted kids can learn: Recent findings of learning strategy research. Gifted Child Quarterly, 29(4), 181-185.
- Shore, B. M. (1992). Metacognition and flexibility as a part of a redefinition of high ability. Dans E. K. Rosen (chair), Psychological development of gifted children. Symposium conducted at the meeting of the American Psychological Association, Kansas.
- Shore, B. M. & Lazar, L. (Soumis pour publication). Ability-related differences between exploration and execution time in problem solving. Journal for the Education of the gifted.
- Siegler, R. S., & Robinson, M. (1982). The development of numerical understandings. In H. Reese & L. P. Lipsitt (Eds.), Advances in child development and behavior (Vol. 16, pp. 241-312), New York: Academic Press.
- Silver, E. A. (1981). Recall of mathematical problem information: Solving related problems. Journal for Research in Mathematics Education, 12 (1), 54-64.
- Silver, E. A. (1982). Knowledge organization and mathematical problem solving. Dans F.K. Lester and J. Garofalo (Eds.), Mathematical problem solving: Issues in research (pp. 15-25). Philadelphia: Franklin Institute Press.
- Silver, E. A. (1979). Student perceptions of relatedness among mathematical verbal problems. Journal for Research in Mathematics Education. 10 (3), 195-210.
- Silver, E. A. (1985). Research on teaching mathematical problem solving: some underrepresented themes and needed directions. Dans E. A. Silver, Teaching and

- learning mathematical problem solving: a multiple research perspective (pp. 247-266). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Simon, D. P. (1974). How big a chunk? Science, 18(3), 482-488.
- Simon, D. P. (1979). Models of thought. New Haven, CT: Yale University Press.
- Simon, D. P. (1981). Cognitive science: the newest science of the artificial. Dans D. A. Norman (Ed.), Perspective on cognitive science. Norwood, NJ: Ablex.
- Simon, D. P., & Simon, H. A. (1978). Individual differences in solving physics problems. Dans R. S. Siegler (Ed.), Children's thinking: What develops? (pp. 325-348). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Simon, D. P., & Simon, H. A. (1978). Individual differences in solving physics problems. In R. Siegler (Ed.), Children's thinking: What develops? (pp. 325-348). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Simon, H. A. (1980). Problem solving in education. Dans D. T. Tuma et F. Reif (Eds.), Problem solving and education: Issues in teaching and research (pp. 81-96). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Sisk D. (1980). Issues and future directions in gifted education. Gifted Child Quarterly, 24, pp.29-36.
- Smiley, S. S., Oakley, D. D., Worthen, D., Campione, J. C., & Brown, A. L. (1977, April). Recall of thematically relevant materials by adolescent good and poor readers as a function of written versus oral presentation (Tech. Rep. No. 23). Center for the Study of Reading, Urbana, Ill.: University of Illinois at Urbana
- Sternberg, R. J. & Davidson, J. E. (1985). Cognitive development in the gifted and talented. Dans F.D. Horowitz et M. O'Brien (Eds.), The gifted and talented: developmental perspectives (pp.37-74). Washington, D.C.: American Psychological Association.
- Sternberg, R. J. (1981a). Intelligence and nonentrenchment. Journal of Educational Psychology, 73, 1-16.
- Sternberg, R. J. (1981b). A componential theory of intellectual giftedness. Gifted Child Quarterly, 25(2), 86-93.
- Sternberg, R. J. (1984). What should intelligence tests test? Implications of a triarchic theory of intelligence for intelligence testing. Educational Researcher, 13, 5-15.

- Sternberg, R. J. (1988). The triarchic mind: A new theory of human intelligence. New York: Viking.
- Sternberg, R. J., & Davidson, J. E. (1983). Insight in the gifted. Educational Psychologist, 18(1), 51-57.
- Sternberg, R. J., & Davidson, J. E. (1985). Cognitive development in the gifted and talented. Dans F. D. Horowitz & M. O'Brien (Eds.), The gifted and talented: developmental perspectives (pp. 37-74), Washington, D.C.: American Psychological Association.
- Sternberg, R. J., & Powell, J. (1983). The development of intelligence. Dans J. H. Flavell et E. M. Markham (Eds.), Handbook of Child Psychology: Cognitive Development (Vol.3, pp. 341-419). New York: Wiley.
- Sternberg, R. J., (1982). A componential theory of intellectual giftedness. Dans R. J. Sternberg (Ed.), Advances in the psychology of human intelligence (Vol. 1, pp. 413-463). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Sternberg, R. J. (1985). Beyond IQ: A triarchic theory of human intelligence, New York: Cambridge University Press.
- Tannenbaum A. (1983). Gifted Children: Psychological and educational perspectives. New York: Macmillan.
- Thorndyke, P. W. & Hayes-Roth, B. (1979). The use of schemas in the acquisition and transfer of knowledge. Cognitive Psychology, 11, 82-106.
- Tutorial notes (1984). Tutorial Notes: mathematics 522-532, functions, Montréal.
- Voss, J. F., Tyler, S. W. & Yengo, L. A. (1983). Individual differences in the solving of social science problems. Individual Differences in Cognition (Vol. 1). 205-232.
- Voss, J. F., Greene, T. R., Post, T. A., & Penner B. C. (1983). Problem-solving skill in the social sciences. Dans G. H. Bauer (ed.), The psychology of learning and motivation: Advances in research learning (Vol. 17, pp. 165-213). New York: Academic Press.
- Vygotsky, L. S. (1979). Mind in society. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Weinstein, C. E., Underwood, V. L., Wicker, F. W., & Cubberly, W. E. (1979). Cognitive learning strategies: Verbal and Imaginal Elaboration. Dans H. F. O'Neil et

- C. D. Spielberger (Eds.), Cognitive and affective learning strategies. New York: Academic Press Inc.
- Winograd, T. (1972). Understanding natural language. Edinburgh: Edinburgh University Press.
- Wong, B. (1982). Strategic behaviors in selecting retrieval cues in gifted, normal achieving and learning disabled children. Journal of Learning Disabilities, 13, 33-37.
- Yaroshchuk, V. L. (1969). A psychological analysis of the processes involved in solving model arithmetic problems. Dans J. Kilpatrick et I. Wirszup (Eds.), Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics (Vol. 3). Stranford: School of Mathematics Study Group. (Originally published, 1957).
- Zar, J. H. (1984) Biostatistical Analysis, (2nd ed.). Englewood Cliffs, NJ, :Prentice-Hall.
- Zimmerman, B. L. (1981). Individual differences in intelligence and learning. Dissertation Abstracts International, 42(2-A), 625-626.

ANNEXE 1

Correspondance Officielle Relative à la Participation des Sujets



McGill

A1

Faculty of Education
McGill University
3700 McTavish Street
Montreal, PQ, Canada H3A 1Y2

Faculté des sciences de l'éducation
Université McGill
3700, rue McTavish
Montréal, PQ, Canada H3A 1Y2

June 25th 1988

Dear Parent or Guardian,

I am a graduate student at McGill University working with Dr. Bruce Shore in the Educational Psychology Department.

We are interested in studying how students think when they work on mathematical problems, and would be very grateful if your son or daughter could take part in the study. Studies of this type are important in providing insight for teaching and learning mathematics at the High School level. We would also like your permission to take note of your son's or daughter's past achievements in mathematics, as well as in other subjects.

Each youngster will be met individually and will spend approximately two hours working on mathematical problems which resemble those encountered at school. If you accept and your son or daughter agrees, I will make an appointment with him or her at a mutually convenient time at the beginning of the month of September, and he or she will be asked to come at our centre at McGill (other arrangements are possible). At the end of the meeting, \$10.00 will be given to each participant as an expression of our thanks.

Finally, it is important to note that this study is not a test of your child's abilities. Its purpose is only to observe and record the processes involved in working with mathematical problems. There is no need to prepare or study prior to our meeting since we are not concerned with how well the students do on those problems. Moreover, participants will remain anonymous and the information collected will not be part of their school record. All information will be treated in the strictest confidence.

It would be greatly appreciated if you could allow your son or daughter to participate in this study.

Thanking you in advance,

Sophie Pelletier

Sophie Pelletier

Bruce Shore

Supervisor: Dr. B. M. Shore

Parents and students, please sign and return the attached letter of permission in the self-addressed stamped envelope which is enclosed.

For more information, do not hesitate to contact Sophie Pelletier at 390-4850 or 390-8864.

✓

CONSENT FORMParent

I, Mr. or Mrs (name;), have read the attached letter and give permission for my son or daughter (name;) to participate in your study on the thinking processes used in mathematics. I also give permission for you to take note of my son's or daughter's past achievement in mathematics as well as in other subjects. I understand that my child will remain anonymous and that all the information collected through his or her participation will not be made part of any school report.

DATE: _____ 1988

PARENT'S SIGNATURE: _____

ADDRESS: _____

PHONE: _____

Student

I have read the information on this study and also agree to take part.

STUDENT'S SIGNATURE: _____

✓

PERSONAL DATA

NAME: _____

AGE: _____

DATE OF BIRTH: _____

1- In which concentration are you in CEGEP?

2- Do you have any courses in mathematics this semester? What are they?

3- Will you take any courses in mathematics during your CEGEP?

4- Do you like mathematics? Circle the appropriate number

(1= NOT AT ALL) 1 2 3 4 5 (5=A LOT)

5- Have you ever participated in a Math competition or a Math summer camps? If yes, which one(s)?

ANNEXE 2

Directives relatives aux tâches de catégorisation

Directives Données aux Universitaires

Comme vous le savez mon nom est Sophie Pelletier et je travaille présentement sur ma maîtrise en psychologie de l'éducation, ici à l'université McGill. J'ai choisi de faire ma thèse sur la manière dont les gens pensent lorsqu'ils sont confrontés à des problèmes mathématiques.

La tâche expérimentale que vous aurez à faire, n'est pas un test de vos habiletés en mathématiques. Il n'y a pas de "bonnes" ni de "mauvaises" réponses. Je désire connaître comment chaque individu, comme personne unique, pense lorsqu'il est confronté à des problèmes mathématiques.

Les problèmes qui vous seront présentés seront du niveau secondaire, donc normalement, vous ne devriez pas avoir de difficultés à les comprendre.

Avant de vous expliquer la façon dont nous allons procéder, je veux mettre de l'emphase sur le fait que les réponses que vous me donnerez resteront toujours anonymes, c'est à dire que personne d'autres que moi ne saura qui a donné telle ou telle réponse. De plus, aucun des noms des personnes qui ont participé à cette étude ne sera mentionné dans des rapports.

Il y aura trois étapes majeures dans cette entrevue. Il y aura d'abord une tâche pratique, pour s'assurer que vous comprenez ce que je vous demande de faire et pour vous permettre de poser des questions sur la tâche si vous quelque chose n'est pas clair. Puis, il y aura la tâche expérimentale proprement dite, qui se divise en trois étapes, que j'expliquerai après que la tâche pratique soit complétée. Enfin nous aurons une période de discussion. Avez-vous des questions?

Comme vous le remarquez, il y a sur la table une enregistreuse et vous verrez que durant l'entrevue je regarderai ma montre plusieurs fois. Je suis intéressée à tout ce que vous pouvez penser et me dire sur le matériel qui vous sera présenté. C'est

pourquoi j'utilise cette enregistreuse pour m'assurer que je ne manque rien de ce que vous me direz. Il n'y a aucune limite de temps pour les tâches que vous aurez à effectuer. Toutefois, j'ai besoin d'avoir un estimé du temps que prennent les gens à faire chaque étape. Alors, ne vous inquiétez pas du temps que vous prenez à faire la tâche, et travaillez à votre propre rythme.

Est-ce que tout est clair? OK, nous allons commencer la tâche d'entraînement.

Tâche d'Entraînement

Dans ce sac, il y a plusieurs morceaux de papier. Quatre lettres sont écrites sur chaque morceau, mais ces derniers sont tous différents les uns des autres. La tâche consiste à prendre du sac un morceau de papier à la fois, le regarder puis le grouper avec les autres morceaux, selon la structure que vous percevez entre les lettres (qui sont écrites sur chaque morceau de papier). Vous pouvez avoir autant de groupes ou de sous-groupes que vous le désirez. Lorsque tous les morceaux de papier seront divisés en groupes, je vous demanderai de m'expliquer les raisons pour lesquelles vous avez groupé ces morceaux de papier ensemble.

Il n'y a aucune limite de temps pour faire cette tâche. Toutefois comme elle n'est qu'une pratique pour la vraie tâche expérimentale, je vous arrêterai quand je verrai que vous comprenez bien ce que vous avez à faire.

N'hésitez pas à me poser des questions si vous en avez besoin.

[l'expérimentatrice prend note du temps]

EST-CE QUE TOUT EST CLAIR?

Après les groupements: [l'expérimentatrice prend note du temps]

Comme vous le remarquez, il y a un numéro écrit dans le coin de chaque morceau de papier. J'aimerais que, lorsque vous parlez des morceaux de papier, vous les identifiez avec ces numéros, ou lisiez ce qui est marqué pour chaque pièce de papier.

Tâche Expérimentale

Première étape:

Dans ce sac de plastique il y a 30 morceaux de cartons. Un problème mathématique est écrit sur chacun d'entre eux. Comme vous l'avez fait dans la tâche

pratique, vous devez piger du sac un morceau de carton à la fois et le lire. Je veux que vous groupiez ces morceaux de cartons selon la structure mathématiques des problèmes qui sont écrits sur chacun d'entre eux. Vous pouvez diviser les morceaux de cartons en autant de groupes ou de sous-groupes que vous le désirez. A la fin, je vous demanderai de m'expliquer les raisons pour lesquelles vous avez groupé les problèmes ensembles. N'oubliez pas qu'il n'y a aucune limite de temps pour faire cette tâche, alors allez à votre propre rythme, et qu'il n'y a pas de bonnes ou de mauvaises réponses.

[l'expérimentatrice prend note du temps]

Après les groupements:

[l'expérimentatrice prend note du temps]

Comme vous le voyez, il y a aussi un numéro sur le coin de chaque carton. S'il-vous-plaît, pourriez-vous identifier les cartes quand vous parlez d'elles à l'aide de ces numéros?

Après explications:

Est-ce que vous verriez des similarités entre vos différents groupes?

[l'expérimentatrice prend note du temps]

Deuxième étape:

Maintenant je voudrais que vous preniez chaque groupe de problèmes individuellement, et que vous essayiez de diviser chacun de ces groupes davantage si vous le pouvez. Lorsque vous aurez terminé, je vous demanderai de m'expliquer les raisons de vos subdivisions, comme vous l'avez fait dans la première partie de la tâche. N'oubliez pas qu'il n'y a pas de limite de temps et qu'il n'y a pas de bonnes ou de mauvaises réponses.

[l'expérimentatrice prend note du temps]

[l'expérimentatrice prend note du temps]

Sur quoi vous êtes-vous basés pour subdiviser vos catégories?

Instructions to High School Students

As you know my name is Sophie Pelletier. I am studying here at McGill, in a master's program. In this kind of program you must take courses, but you also have to run a research project. I have chosen to do my project on the way people think when they do mathematical problems.

As you read on the consent form, the task you will be doing is not a test of your abilities in mathematics. There are no "right" or "wrong" answers. I am interested in the way each person, as a unique individual, thinks when confronted with Mathematical problems.

Most of the problems that will be presented to you will resemble those encountered at school, but others may be new or more difficult.

Before I explain the way we will proceed, I want to reemphasize that the answers you are giving me will always remain anonymous, that is, nobody except myself will know who gave what answers. No names will be mentioned in any report and none of the information collected will be part of any school record.

There will be three steps in this meeting. First, we will do a practice task, to insure that you understand what I expect you to do. At this time you will be able to ask questions about the task, if anything is unclear to you. Then, there will be the real task, which is divided in two main steps, which I will explain after the practice task is completed. Do you have any questions?

Instructions to University Graduate Students

As you know, my name is Sophie Pelletier. I am presently doing my master here at McGill, in Educational Psychology. I have chosen to do my thesis on the way people think when they are confronted with mathematical problems.

The task that you will have to do is not a test of your abilities in mathematics. There are no "right" or "wrong" answers. I am interested in the way each person, as a unique individual, thinks when confronted with Mathematical problems. Moreover, the problems that will be presented to you are at high school level, so that you should not have any difficulty understanding them.

Before I explain the way we will proceed, I want to reemphasize that the answers you are giving me will always remain anonymous, that is, nobody except myself will know who gave what answers. No names will be mentioned in any report.

There will be three steps in this meeting. First, we will do a practice task, to insure that you understand what I expect you to do. At this time you will be able to ask questions about the task, if anything is unclear to you. Then, there will be the real task, which is divided in two main steps, which I will explain after the practice task is completed. Do you have any questions?

As you can see on the table, there is a tape recorder and a watch. I am interested in recording everything that you say. Therefore, I will use this tape recorder to insure that I record all the needed material.

There is no time limit on the task, however, I need to have an estimate of how long it takes people to do it. Don't worry about the time, just work at your own pace.

Is everything clear? ok, let's start the practice task.

Practice Task

In this bag there is a number of pieces of paper. Four letters are written on each paper. However, each piece of paper is different from the others. I want you to take from the bag one piece of paper at a time, look at it and then group it with the other pieces, according to the structure you see among the letters, which are written on the paper. You can have as many groups or subgroups as you want. When all the pieces of paper are divided into groups, I will ask you to explain to me the basis on which you grouped the pieces of paper and why.

There is no time limit to this task. However, since you are doing it as a practice for the real task, I will stop you when I feel you understand, even if the task is not finished.

Don't hesitate to ask me any questions that you have in mind.

ARE THOSE INSTRUCTIONS CLEAR?

[experimenter takes note of the time]

After the groupings: [experimenter takes note of the time]

As you notice, on the corner of the pieces of paper is written a number, when you talk about the pieces of paper I would like you to identify them, either with this number (example: not these or those or only, this group) or in reading out loud what is written on the piece.

Experimental Task

First step:

In this bag, there are 30 cards. Each card has one mathematical problem on it. As in the practice task, you are to pick one card at a time and read it. I want you to put

these cards into groups according to the mathematical structure you see in the problems. You can divide the cards in as many groups or subgroups as you want. At the end, I will ask you to explain to me the basis on which you grouped the problems. Remember that there is no time limit to do this task, so just go at your own pace, and there are no right or wrong answers.

[experimenter takes note of the time]

After the groupings: [experimenter takes note of the time]

As on the pieces of paper of the practice task, a number is written on the corner of each card. When you talk about the cards I would like you to identify them, either with this number (example: not these or those or only, this group) or in reading out loud what is written on the card.

After explanation:

How are your different categories similar?

Second step:

Now, take each group of problems individually, and I want you to further divide it if you can. After you finish the task, I will ask you to describe your reasons for your subdivisions, as you did in the first part of the task. Remember that there is no time limit to this and there are no right or wrong answers.

[experimenter takes note of the time]

[experimenter takes note of the time]

Can you explain to me the basis on which you subdivided the categories?

ANNEXE 3
Tâche d'Entraînement

a:a::b:b

b:b::a:a^{A12}

b:b::c:c

c:c::b:b

c:c::d:d

d:d::c:c

a:a::a:a

b:b::b:b

c:c::c:c

d:d::d:d

○ a:a::c:c

c:c::a:a ^{A13}

a:a::d:d

d:d::a:a

b:b::d:d

d:d::b:b

a:c::b:d

○ a:b::c:d

c:a::d:b

○ b:a::d:c

b:d::a;c

c:d::a:b

d:b::c:a

d:c::b:a

b:d::b:d

d:b::d:b

d:d::d:b

○ d:d::b:d

d:b::d:d

○ b:d :: d:d

b:b :: d:b

A15

b:b :: b:d

b:d :: b:b

d:b :: b:b

a:a :: a:c

a:a :: c:a

a:c :: a:a

○ c:a :: a:a ,

c:c :: c:a

○ $c:c::a:c$

$c:a::c:c$

$a:c::c:c$

$a:b::a:b$

$a:c::a:c$

$a:d::a:d$

$b:a::b:a$

$b:c::b:c$

○ $b:d::d:d$

$d:b::d:d$

● a:a::a:b

a:a::b:a

a:b::a:a

b:a::a:a

b:b::b:a

b:b::a:b

b:a::b:b

a:b::b:b

● a:a::a:d

a:a::d:a

○ a: d: : a: a

d: a: : a: a

a: d: : d: d

d: a: : d: d

d: d: : a: d

d: d: : d: a

c: c: : c: d

c: c: : d: c

c: d: : c: c

d: c: : c: c

● c:c::c:b

c:c::b:c

c:b::c:c

b:c::c:c

b:b::b:c

b:b::c:b

b:c::b:b

c:b::b:b

● d:d::d:c

d:d::c:d

c:d::d:d.

d:c::d:d

ANNEXE 4
Problèmes Utilisés dans les Tâches Expérimentales

1.

In an advertisement, a firm which produced three products, A, B and C, stated that, of 10000 families surveyed

6974 used product A
5417 used product B
7246 used product C
2950 used both A and B
4623 used both B and C, and
1720 used all products

Why should the firm be prosecuted for fraudulent advertising?

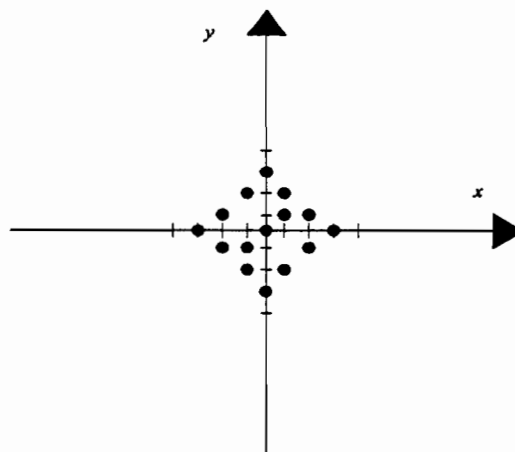
2.

Of 1200 students in Dudgeon High school, 900 attended the first football game. The team lost 54-0 and only 400 attended the second game.

- a) What is the minimum number that could have seen both games?
b) If 250 attended both games, how many did not attend either game?
-

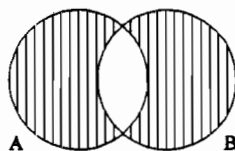
4.

Find the range and the domain of this relation:

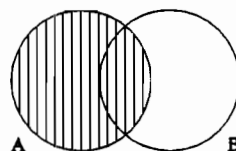


5. Match the equation with the graph:

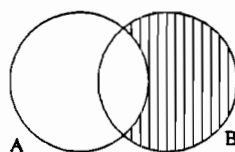
$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$



$$(A \cup B')' \cap B = A' \cap B$$



$$(A \cap B') \cup (A' \cap B)' = A \cup B'$$



6.

Simplify this expression:

$$[A \cap (B \cup A')] \cup B$$

7.

Find $\{(x, y) \mid x \in S, y \in T\}$

If $S = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 12 \text{ and } x \text{ is prime}\}$

$T = \{x \in \mathbb{N} \mid 4x \leq 12\}$

8.

$$\text{Given } x^2 + y^2 = 121$$

$$\text{If } x = 0 = y,$$

What are the x's and y's intercepts?

9.

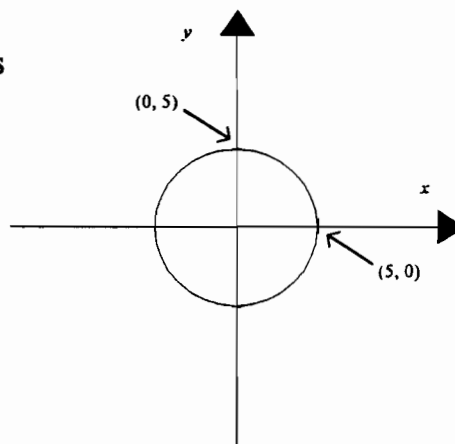
Sketch the graph corresponding to the following relation:

$$*\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 16\} \cap \{(x, y) \mid y > 2x - 4\}$$

$$*(x, y \in \mathbf{R})$$

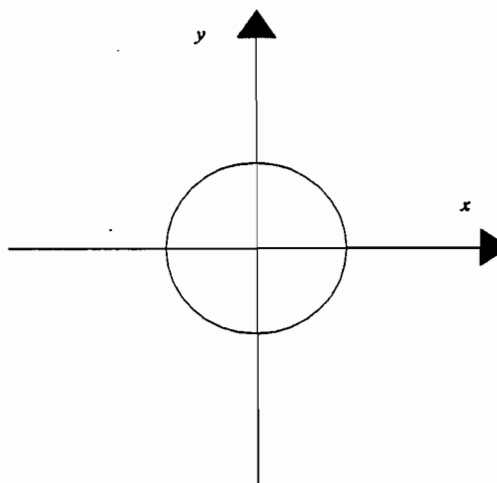
10.

If x and $y \in \mathbf{R}$,
write the equation corresponding to this
graph:



11.

Explain why this relation is not a function.



12.

What is the equation of the circle which is centred at the origin and whose radius is $2\sqrt{5}$ units?

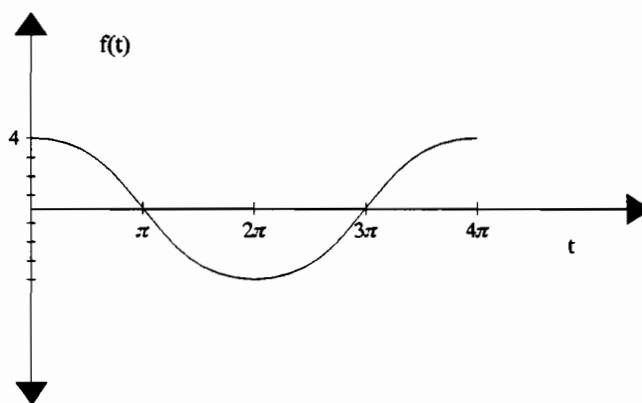
14.

A satellite is launched into a circular orbit around the earth. Its distance from the centre of the earth is 9000 km. How many kilometres does the satellite travel in describing an angle of $\frac{7\pi}{6}$ radians?

15.

What is the height of a tree whose shadow is 6 meters long when the angle of elevation of the sun is 45° ?

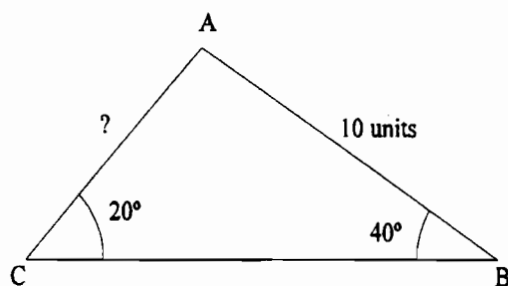
16.



Find the equation $f(t)$ corresponding to this graph.

17.

In the triangle ABC, what is the length of AC?



18.

If $0 \leq A \leq \frac{\pi}{2}$ and $\sin A = \frac{5}{13}$, what is the value of $\tan A$?

19.

Which of the following is an identity:

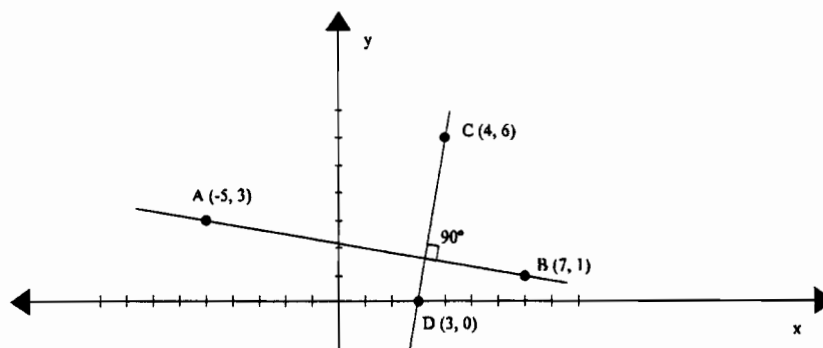
- 1) $\cos (-x) = -\cos x$
- 2) $\sin (x) = \sin (-x)$
- 3) $\sin (x + \pi) = \sin x$
- 4) $\tan (x + \pi) = \tan x$

20.

A piece of land is in the shape of a parallelogram. The lengths of two of the sides are "a" metres and "b" metres. The length of the longest diagonal is "c" metres.

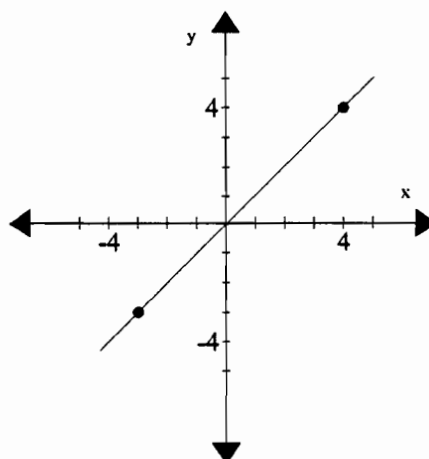
What is the cosine of the largest angle?

22.



Prove that the line through A (-5, 3) and B (7, 1) is perpendicular to the line through C (4, 6) and D (3, 0).

23. Find the slope of this line:



24.

The cost of using a certain television set is directly proportional to the time the set is used.

If it costs 7,5 cents to use this television set for 10 hours in a certain city, how long can you use the set for 2,50 dollars?

25.

If A has coordinates (5, 5) and B has coordinates (-7, -10), find the coordinates of point C on segment AB where C is located one-third of the distance from A to B.

26. Given

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{-5} = 1 \quad \text{Where } -3 \text{ and } -5 \text{ are } x\text{'s and } y\text{'s intercepts}$$

Find the corresponding standard form equation ($ax^2 + bx + c = 0$).

27.

Determine if the line segments

$$P_1 P_2 \perp P_3 P_4 \text{ or } P_1 P_2 \parallel P_3 P_4$$

a) $P_1 (1, 6)$, $P_2 (-1, 2)$, $P_3 (-7, 0)$, $P_4 (1, -4)$

b) $P_1 (3, 0)$, $P_2 (0, 2)$, $P_3 (6, 0)$, $P_4 (0, 4)$

28.

A plane averaging 384 kilometres per hour left the Mirabel airport. One-half hour later, a second plane, averaging 448 kilometres per hour, took off and flew after the first plane.

How long after take-off did the second plane overtook the first plane?

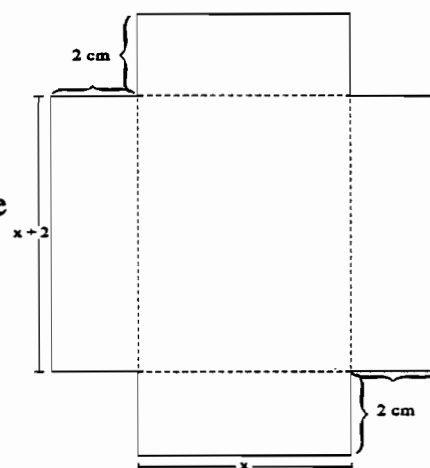
29.

The width of a rectangle is 2 cm shorter than the length. If both the width and the length are increased 216 square centimetres, find the length and the width of the rectangle.

31.

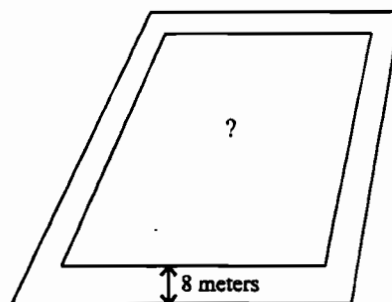
A designer wants to make a baking pan out of a rectangular piece of aluminium (by cutting out squares at each corner), according to the measures shown. The sides will be folded up. The volume of the completed pan will be 96 cubic centimetres.

What are the width and length of the original piece of aluminium?



32.

Rink:



A square skating rink has a board walk of constant width (see graph) around it. If the area of the board is half the area of the rink,

What is the area of the rink?

33.

Solve the following system of inequalities:

$$-2x+3 \leq 3x-22 \text{ and } 4x-13 > 2x-5$$

34.

Find the solution set of $|4x-3| = 7$?

ANNEXE 5
Questionnaire Final

QUESTIONS:

- 1- Si je vous donnais l'opportunité de recommencer tout au complet, est-ce qu'il y aurait des changements que vous voudriez faire dans la façon dont vous avez catégorisés les problèmes? Est-ce vous grouperiez les problèmes différemment si vous en aviez la chance?
- 2- Lorsque vous avez commencé la tâche expérimentale, est-ce que vous avez vu plusieurs façon de grouper les problèmes? Est-ce que vous avez eu à choisir entre plusieurs manières de grouper les problèmes?
- 3- Est-ce que vous pensez que vous pourriez faire les groupements différemment?
- 4- Est-ce que vous pouvez m'expliquer la manière dont vous avez procéder pour catégoriser les problèmes? Quand vous avez lu les différents problèmes, comment avez vous choisis de mettre tels ou tels problèmes ensembles?
- 5- Quand je t'expliquais la tâche que vous auriez à faire, j'ai dit: "vous pouvez mettre les cartons en autant de groupes ou de sous-groupes que vous le voulez". Si je n'avais pas mentionné le mot sous-groupes, est-ce que vous pensez que vous auriez mis certains de vos cartons en sous-groupes?
- 6- Maintenant au sujet de la deuxième partie de la tâche, quand je vous ai demandé de sous-diviser davantage les groupes. Quand vous étiez an train de faire la première partie de la tâche, est-ce que vous avez pensé de faire de telles subdivisions? Est-ce que vous pensez que vous auriez sous divisé les problèmes davantage si je ne le vous avait pas demandé?
- 7- Quand vous étiez entrain de faire la tâche, est-ce qu'il y a des problèmes que vous avez résolu mentalement (complètement ou seulement en partie) pour grouper (catégoriser) les problèmes?
- 8- Est-ce que vous pensez que résoudre complètement les problèmes aurait changé la façon dont vous avez grouper les problèmes?

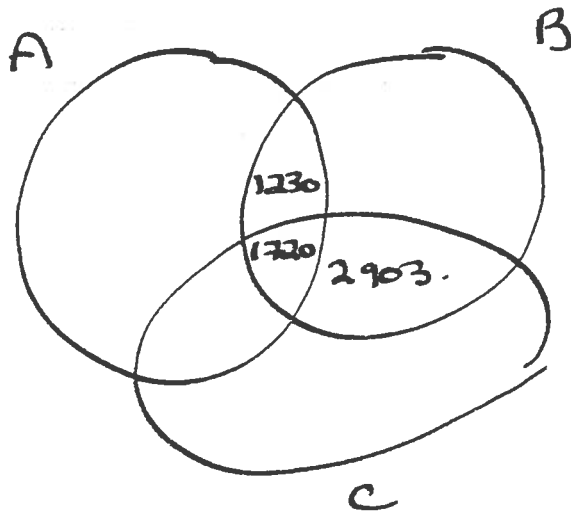
- 9- Quand vous avez à résoudre un problème mathématique, est-ce qu'habituellement vous essayez de relier les données du problème à des choses que vous savez, avant de le résoudre.
- 10- Quand vous voyez un problème, est-ce que vous essayez de trouver la catégorie à laquelle il appartient avant de le résoudre?
- 11- Est-ce que vous avez compris toutes les instructions?
- 12- Qu'est-ce que vous pensez des problèmes de façon générale?
- 13- Est-ce que vous avez des questions ou des commentaires?

QUESTION SECTION:

- 1- If you were given the opportunity to start over again (don't worry), are there some changes you would make in the way you categorized the problems? Would you group the problems differently if you had the chance?
- 2- When you started the task, did you see many ways of grouping the problems? Did you have to choose among many different groupings? If yes on which basis did you choose?
- 3- Do you think you could have done the groupings differently?
- 4- Can you explain to me how you proceeded to categorize the problems? When you were reading the different problems how did you choose to put this or these problems together?
- 5- When I was talking about the task I was saying "you can put them in as many groups or subgroups as you want". If I hadn't mentioned the word "subgroups", do you think you would have put some of your cards in subgroups?
- 6- Remember the second part of the task when I asked you to further subdivide your groups. When you were doing the first part did you think about making such subdivisions? Do you think you would have subdivided the problems further if I hadn't asked you to do so?
- 7- When you were doing the task, were there some problems that you solved mentally (partly or entirely) to categorize the problems? Was it done prior to the categorization?
- 8- Do you think that completely solving some of the problems would have changed the way you categorized the problems?
- 9- When you have to do a maths problem, do you usually try to relate it to things you knew before to solve it?
- 10- When you see a problem, do you usually try to find the category to which it belongs before solving it?
- 11- Did you understand all the instructions?
- 12- What do you think of the problems in general? Do you remember having seen all these kinds of problems in grade 11? Are there problems you never saw?
- 13- Do you have any questions or comments?

1. Ce problème est lié à la théorie des ensembles élémentaire.

Voici la solution la plus simple: (et la seule qui me vient à l'esprit; mais de toute façon, toute solution reviendra nécessairement à celle-ci).



Il est dit que 1720 personnes utilisent les 3 produits. on met donc 1720 au centre.

2950 personnes ont utilisé A et B, ce qui comprend déjà les 1720 personnes. Il y a donc 1230 personnes qui ont utilisé A et B seulement. De même, il y a 2903 personnes qui ont utilisé B et C seulement.

Il y a $5417 - (1230 + 1720 + 2903) = -436$ personnes qui ont utilisé B seulement, ce qui est bien sûr impossible.

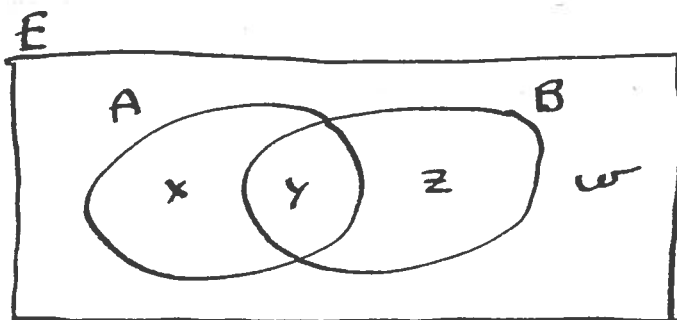
La compagnie devrait donc être poursuivie pour publicité frauduleuse, et tous ses dirigeants pendus ou brûlés vifs pour servir d'exemple.

2. Encore un problème de théorie des ensembles.

Soit E l'ensemble des étudiants de l'école.

A l'ensemble de ceux qui ont eu la première partie et

B ceux qui ont eu la seconde.



x, y, z et w sont des variables représentant le nombre d'étudiants se situant dans chaque catégorie.

Nous avons: 1) $x + y = 900$

2) $y + z = 400$

3) $x + y + z + w = 1200$

a) Comme il y a 3 équations et 4 inconnues, le système d'équations (1), (2), (3) admet une infinité de solutions (en nombres entiers).

Nous cherchons celle qui minimise y (ceux qui ont eu les 2 parties), avec la contrainte que $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, w \geq 0$.

Si on additionne les 2 premières équations, nous trouvons

$2y + x + z = 1300$. Si nous soustrayons la 3^e, on obtient:

$y - w = 100$, i.e. $y = 100 + w$. En posant $w = 0$, nous obtenons le minimum pour y , 100.

VER

b) Nous ^{ajoutons} ~~ajoutons~~ une condition :

$$y = 250.$$

Nous trouvons alors :

$$(de (1)) : x = 900 - 250 = 650$$

$$de (2) \quad z = 400 - 250 = 150$$

et en fin. de G1 :

$$w = 1200 - 150 - 250 - 650 = 150$$

Ce problème pourrait aussi être classé comme un problème d'équations et d'inéquations linéaires.

4.

Un problème de th. des fonctions et relations. Il est tellement élémentaire qu'en fait ce n'est qu'une question visant à vérifier si l'élève a compris et retenu la définition d'un domaine.

C'est l'ensemble de départ d'une relation. Ici, c'est l'ensemble des x des couples (x, y) .

Donc $= \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

5. $(A \cap B)' \rightarrow$  Simple question de théorie des ensembles.
 $A' \cap B \rightarrow$ 
 $A \cup B' \rightarrow$ 
 Il n'y a pas de solution, il suffit d'appliquer la définition.

6: Problème de Théorie des ensembles.

Il y a deux façons de faire ce problème.

1^{re} façon: "concrète", i.e. en le faisant sur une figure.

$$\boxed{A \cap B} = B \cup A'$$

$$\Rightarrow A \cap (B \cup A') = \boxed{A \cap B}$$

$$\Rightarrow [A \cap (B \cup A')] \cup B = \boxed{B} = B.$$

2^e façon: de façon algébrique, i.e. en calculant selon les propriétés connues des opérations sur les ensembles.

VERSO $\rightarrow$

$$[A \cap (B \cup A')] \cup B = [(A \cap B) \cup (A \cap A')] \cup B$$

(distributivité
de $\cap$ sur $\cup$.)

$$= [(A \cap B) \cup \emptyset] \cup B$$

$$= [A \cap B] \cup B$$

$$= B \quad (\text{car } (A \cap B) \subset B)$$

Il serait très étonnant qu'un jeune du
secondaire donne cette démonstration.

Si on voulait obtenir cette dernière démonstration,
on classerait ce problème dans "algèbre de Boole".

Si on recherche la première solution, i.e. si
le problème s'adresse à un étudiant du
secondaire, c'est de la théorie des ensembles.

7. Théorie des relations et fonctions.

$S = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ il s'agit de tous les couples (x, y)
avec $x \in S$ et $y \in T$.
 $T = \{0, 1, 2, 3\}$ il y a $5 \times 4 = 20$ possibilités.

8- Ce problème n'a pas de sens tel qu'il est posé: il s'agirait de toute évidence d'un problème sur les fonctions.

Probablement qu'on veut savoir quels sont les points d'intersection d'intersection de la courbe $x^2 + y^2 = 121$ avec les axes x et y .

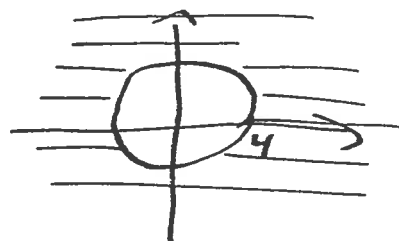
Autrement dit, posons $x = 0$.

$$\Rightarrow y = \sqrt{121} = \pm 11$$

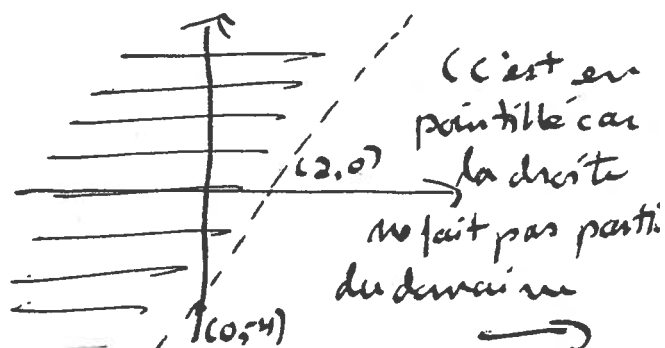
$y = 0 \Rightarrow x = \sqrt{121} = \pm 11$, et les 4 points d'intersection sont: $(0, 11)$ $(0, -11)$ $(11, 0)$ $(-11, 0)$.

9- Un problème sur les relations et fonctions.

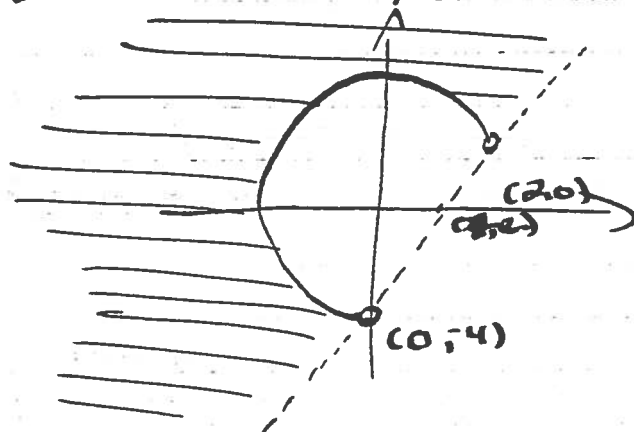
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 16\} :$$



$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 2x - 4\}$$



L'intersection des deux est donc :



12. Théorie des fonctions.

Il s'agit d'un cercle centré en $(0,0)$ de rayon 5.
On applique la formule

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad , \text{ avec } (h,k) = (0,0) \\ \text{ et } r = 5$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

1). ~~Théorie des~~

Théorie des fonctions. Question de bien comprendre la définition.

~~Alors~~ Une fonction doit être univoque, i.e. que pour un point de l'ensemble de départ, il ne doit correspondre qu'un point de l'ensemble d'arrivée, ce qui n'est pas le cas ici.

Autrement dit, toute droite verticale sur le graphe ne doit jamais croiser plus d'un point du graphe de la fonction, ce qui n'est pas le cas ici.

12. Théorie des fonction.

Ce problème est exactement le même que le #10, avec $h=0$, $k=0$ (centre à l'origine), et $r=2\sqrt{5}$

Cependant, ici il faut savoir manipuler une racine carrée...

$$\Rightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 = (2\sqrt{5})^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \cdot 5 = 20 \Rightarrow x^2 + y^2 = 20$$

14. Géométrie.

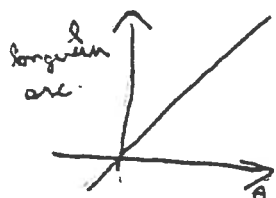
Autrement dit: quelle est la longueur d'un arc de $\frac{7\pi}{6}$ radians si le rayon du cercle est 9000 km?

↙ circonférence du cercle.

$$\text{longueur recherchée} = \frac{\frac{7\pi}{6}}{2\pi} \cdot (2\pi r) = \frac{7\pi}{6} \cdot r = \frac{7\pi \cdot 9000}{6}$$

$$\approx 32986.7 \text{ km}$$

Un étudiant moyen au secondaire n'aurait sans doute pas pensé à faire la simplification par (2π) avant de faire le calcul.



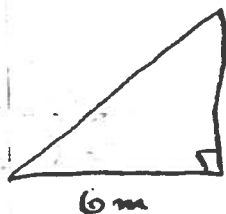
$$l = r \cdot \theta$$

$$\text{longueur} = (\text{rayon}) \cdot \text{angle}$$

15. Géométrie

VERSO

15.



$h = 6m$
 $6m$

il suffit de savoir que pour un angle de 45° engendre un triangle isocèle (deux côtés de même longueur.)

Si quelqu'un ne s'en aperçoit pas(!), il peut alors procéder comme suit: (ce qui on ferait un problème de trigonométrie).

h : hauteur cherchée

$$\tan 45^\circ = \frac{h}{6} \Rightarrow h = 6 \cdot \tan 45^\circ.$$

16. Théorie des fonctions: fonction sinusoidale)

amplitude = 8 (différence entre le ^{point le} plus haut et le plus bas de la courbe).

longueur d'onde: 4π

$$\Rightarrow y = 4 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

(Si le sommet se trouve en $x=0$, alors l'équation est donnée par :

$x=0$, alors l'équation

$$y = \frac{A}{2} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

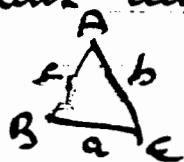
A = amplitude

L = longueur d'onde.

17. Géométrie (trigonométrie)

C'est une application directe de la loi des sinus.

(Dans un triangle, on a: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$).



$$\Rightarrow \frac{\sin 20^\circ}{10} = \frac{\sin 40^\circ}{l} \Rightarrow l = \frac{10 \times \sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} = 18.7$$

Le dessin n'est donc pas à l'échelle.

18. Trigonométrie.

On a (de $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$)

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \pm \frac{12}{13}$$

Comme $0 \leq A \leq \pi/2$, on sait que $\cos A$ est positif, donc $\cos A = \frac{12}{13}$.

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{5/13}{12/13} = 5/12$$

19. Trigonométrie

1. faux ($\cos''(0) \neq -\cos(0)$).

2. $\sin x = \sin -x$ vrai (géométriquement évident)

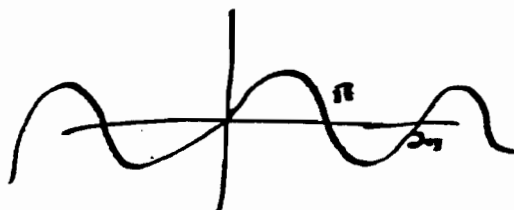
3. $\sin(x+\pi) \neq \sin x$ mais plutôt à $-\sin x$. $\rightarrow$ VÉR

$$4. \quad \tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$$

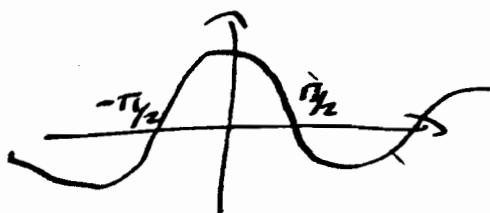
Donc c'est vrai.

On peut aussi résoudre ce problème en regardant les graphes des fonctions :

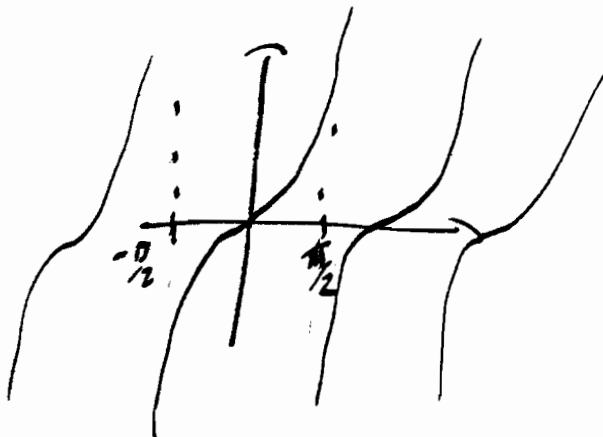
$\sin x$:



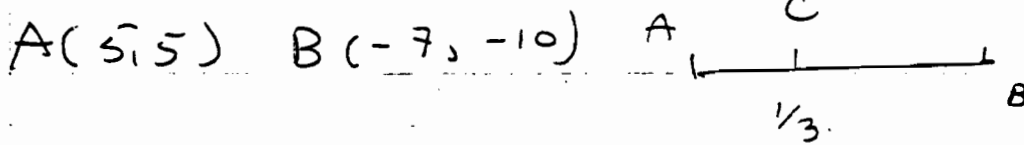
$\cos x$



$\tan x$



*25



on cherche $C = (x, y)$ t.t.

$$(1) \quad \frac{d(AC)}{d(BC)} = \frac{1}{2} \quad (2) \quad \frac{d(AC)}{d(AB)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2(AC)}{d^2(BC)} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 4d^2(AC) = d^2(BC)$$

$$\Rightarrow 4((x-5)^2 + (y-5)^2) = (x+7)^2 + (y+10)^2$$

$$4(x^2 - 10x + 25 + y^2 - 10y + 25) = x^2 + 14x + 49 + y^2 + 20y + 100$$

22. Par les vecteurs

vecteur: $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

3d: $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3 = 0$$

ex: problème 22

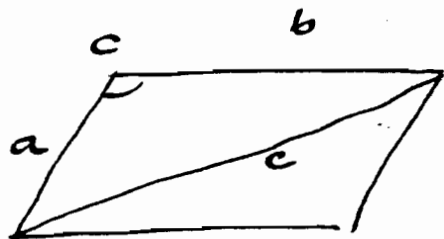
$$\vec{AB} = (12, -2)$$

(7-5) (13)

$$\vec{CD} = (-1, -6)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 12(-1) + (-2)(-6) = 0$$

20. Trigonométrie.



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\Rightarrow \cos C = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}$$

C'est la loi des cosinus.

22. Géométrie analytique.

Les droites sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leur pente est -1 .

$$\text{pente de la droite } AB = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 1}{-5 - 7} = \frac{+2}{-12} = -\frac{1}{6}$$

$$\text{pente de la droite } CD = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{6 - 0}{4 - 3} = 6 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{6} \times 6 = -1.$$

23. Géométrie analytique.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, où (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont deux points quelconques (mais distincts) de la droite.

$(4, 3)$ et $(-3, -2)$ sont deux points.

$$-1 - 2 = -5$$

24. Proportion.

$$\underline{7,5 \text{ cents}} \rightarrow 10 \text{ heures}$$

$$250 \text{ cents} \rightarrow x \text{ heures:}$$

$$\frac{7,5}{250} = \frac{10}{x} \Rightarrow x = \frac{250 \times 10}{7,5} = 333 \text{ heures } 20 \text{ min}$$

25. Géométrie analytique.

$$\text{de } A \text{ à } B: \Delta y = -10 - 5 = -15$$

$$\Delta x = -7 - 5 = -12.$$

$$\text{d.o. } \overset{pt A}{(5, 5)} + (\Delta x, \Delta y) = \overset{pt B}{(-7, -10)}.$$

$$\text{On a: } C = (5, 5) + \frac{1}{3}(\Delta x, \Delta y) = (5, 5) + (-4, -5) = (1, 0)$$

26- Géométrie analytique.

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{-5} = 1 \quad \text{On multiplie tout par } 15 \quad ((-3) \cdot (-5))$$

$$\Rightarrow -5x + -3y = -15$$

$$\Rightarrow 5x + 3y - 15 = 0$$

29. algèbre (la connaissance géométrique se limite à la formule de l'aire d'un rectangle).

Le problème tel que posé n'a pas de sens.



$x+2$

x

On suppose que le problème est plutôt:

"La largeur d'un rectangle est plus courte que sa longueur de 2 cm. Si son aire totale est de 216 cm², trouvez sa largeur et sa hauteur".

$$\Rightarrow x(x+2) = 216 \Rightarrow x^2 + 2x - 216 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-216)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{868}}{2} = -1 \pm \sqrt{217}$$

(car on doit rejeter la solution négative $-1 - \sqrt{217}$).

$$\Rightarrow x = -1 + \sqrt{217}$$

$$\text{largeur} = -1 + \sqrt{217}$$

$$\text{hauteur} = 1 + \sqrt{217}$$

31. algèbre (car la connaissance géométrique n'est limitée qu'à la connaissance de la formule du volume des cubes.)

h larg long
Nous avons donc: $2 \text{ cm} \cdot x \text{ cm} \cdot (x+2) \text{ cm} = 96 \text{ cm}^3$, i.e.

$$2x(x+2) = 96$$

$$\Rightarrow x(x+2) = 48$$

$$x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$x^2 + 8x - 6x - 48 = 0$$

$$x = 6 \text{ ou } x = -8$$

évidemment, on doit prendre $x = 6$, et alors les dimensions sont: 2 cm, 6 cm, 8 cm.

27. Géométrie analytique.

Le produit de deux segments perpendiculaires doit être égal à 1. (voir problème no. 22)

Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont la même pente.

$$a) m(P_1 P_2) = \frac{2-6}{-1-1} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$m(P_3 P_4) = \frac{-4-0}{1-7} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

Ces droites sont donc perpendiculaires.

28. Arithmétique élémentaire.

La différence de vitesse des deux avions est de 64 km/h

Après une demi-heure, le premier avion est à une distance $\frac{1}{2} \times 384 \text{ km/h} = 192 \text{ km}$ de Mirabel.

Il faudra donc $d_1 \frac{192 \text{ km}}{448 \text{ km/h}} = 0.42857 \text{ h} = 25 \text{ min } 43 \text{ secondes}$

le 2^e avion pour rattraper le 1^{er}.



y = distance parcourue
 x = temps écoulé (h)

$$d_1 \quad y = 384 \text{ km/h} \cdot x$$

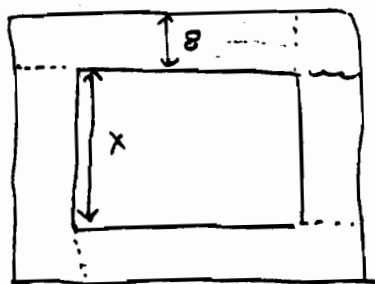
$$d_2 \quad y = 448 \text{ km/h} \cdot (x - 0.5 \text{ h})$$

$$D = V \times t$$

$$V_1 t_1 = V_2 t_2$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{t_2}{t_1}$$

32. Géométrie (+ algèbre).



aire du tour: $4 \times (8 \cdot (x+8)) = 32(x+8)$

aire de la patinoire: x^2

Nous avons

$$2(\text{aire tour}) = \text{aire patinoire}$$

$$\text{is.} \quad 64(x+8) = x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 64x - 512 = 0$$

$$\frac{ax^2 + bx + c}{2a}$$

$$x = \frac{64 \pm \sqrt{(64)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-512)}}{2}$$

$$\frac{64 + \sqrt{6144}}{2} = \frac{64 + 32\sqrt{6}}{2} = 32 + 16\sqrt{6}$$

$$x = 32 + 16\sqrt{6} \quad (\text{on rejette la solution négative})$$

$$\Rightarrow \text{aire de la patinoire} = x^2 = (16(2 + \sqrt{6}))^2$$

$$= 16^2(10 + 4\sqrt{6})$$

$$= 512(5 + 2\sqrt{6})$$

$$\approx 5068.27 \text{ m}^2$$

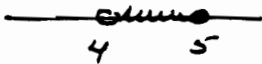
33. Inégalités.

$$(1) \quad -2x + 3 \leq 3x - 22$$

$$(2) \quad 4x - 13 > 2x - 5$$

Transposons (1): $\Rightarrow 25 \leq 5x$
 $\Rightarrow 5 \leq x$

Transposons (2): $2x > 8$
 $x > 4.$

Solution: $x \in (4, 5]$ i.e. 

34. Th. des fractions.

1^{er} cas: si $4x - 3 > 0$, alors $|4x - 3| = 4x - 3$

$$\Rightarrow 4x - 3 = 7 \Rightarrow 4x = 10 \Rightarrow x = \frac{5}{2}.$$

2^e cas: si $4x - 3 < 0$, alors $|4x - 3| = -4x + 3$ (i.e. $-1 \cdot (4x - 3)$)

$$\Rightarrow -4x + 3 = 7 \Rightarrow x = -1.$$

On trouve $x = -1$ ou $x = \frac{5}{2}$. On doit vérifier ces ~~solutions~~ ^{solutions} dans l'équation initiale. Car si on $|4 \cdot (\frac{5}{2}) - 3| = 7$ et $|4(-1) - 3| = 7$ (Parfois, la vérification montre qu'on doit rejeter le résultat).
 ex: $|x| = -1$. On trouverait, par la méthode ci-haut, $x = 1$ ou -1 .
 Mais la vérification nous fait rejeter ces solutions. (car la valeur absolue d'un nombre n'est jamais négative).

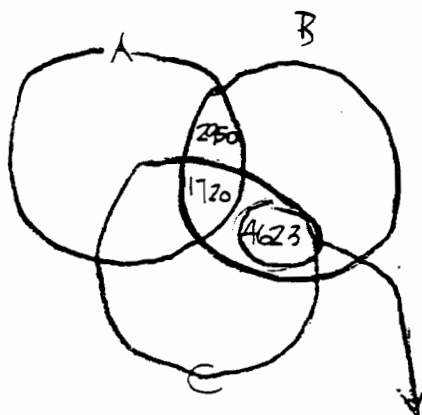
La solution est donc: $x \in \{-1, \frac{5}{2}\}.$

1. not immediately obvious
no information is possible: i.e., $\& \text{ it} \leq$ than what's
in each set.

fraudulent means a false statement so
a fact must be true

draw a

diagram



what about $A \cap C$?

something is wrong with the
numbers in B

$$\cancel{B \text{ should} \leq A \cap B +}$$

$$B \text{ should} \geq A \cap B - (A \cap B \cap C)$$

$$5417 \geq (2950 - 1720) + 4623 - 1720$$

4133

$$\text{but } 5417 \neq \underbrace{2950 - 1720 + 4623 - 1720 + 1720}_{5853}$$

$$B \geq (A \cap B - A \cap B \cap C) + (B \cap C - A \cap B \cap C) + A \cap B$$

54 - 0 is irrelevant

A53

- (a) the number in the smallest set is the largest number in the intersection of both sets

900 + 400 is 100 more than 1200 so 100 students must ~~at least~~ have attended both games

answer: 400

- (b) did not attend either game = all set - set that attended both games

$$900 - 250 = 650 \text{ attended 1st game only} \quad 1200 - 250 = 950$$

$$400 - 250 = 150 \text{ attended 2nd game only} \quad \text{did not attend either game} = \text{all students} - 650 - 150 = 1200 - 800 = 400$$

④ range = $\{-3, +3\}$ if scale is 1 to 1

domain = $\{-3, +3\}$ also if scale is 1 to 1

(by observation)

⑤

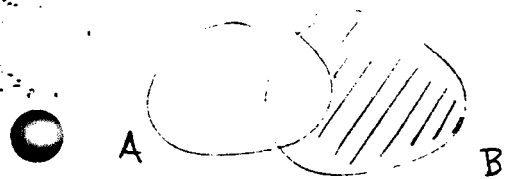


not in A and B
i.e., $(A \cap B)'$



in A or not in B that is not in

+ ... that equals A



that which is in B but not in A and B.

now work from what is given

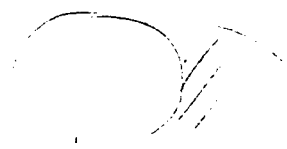
$$\underline{A \cup B'} = A$$

in A or not in B



then $(A \cup B')' = A'$

then $(A \cap B')' \cap B = A' \cap B =$
 (not in A and in B)
 A'



then $(A \cap B') \cup (A' \cap B)' = A \cup B'$
 must match with

⑥. $[A \cap (B \cup A')] \cup B$

$$B \cup A'$$

in B or not in A

& B

$$B \cup A' - B$$

So $A \cap (B \cup A') = A \cap B$ in A and in B 4
A55

$$\underbrace{(A \cap B)}_{\substack{\text{in A and} \\ \text{in B}}} \cup B = \underbrace{A \cap B}_{\substack{\text{or in} \\ B}}$$

⑦. rewrite ~~S~~ S as numbers

$$\begin{aligned} S &= \text{primes less than } 12 \\ &= \{1, 3, 5, 7, 11\} \end{aligned}$$

operate on inequality

$$4x \leq 12$$

$$x \leq 3$$

$$T = \{1, 2, 3\}$$

then $\{(x, y) \mid x \in \{1, 3, 5, 7, 11\}, y \in \{1, 2, 3\}\}$

is the set of points with

domain $1, 3, 5, 7, 11$ and range $1, 2, 3$

$$\sim \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), \dots, (11, 3)\}$$

8

$$x^2 + y^2 = 121$$

$$x = 0 = y$$

it is not possible for both x and y to equal zero and $x^2 + y^2 = 121$

i.e., $0^2 + 0^2 \neq 121$

If guess what problem

9

~~x to satisfy both conditions~~

to note the intersection

we can treat the equations as simultaneous

$$x^2 + y^2 \geq 16$$

and $y \geq 2x - 4$

$$x^2 + (2x - 4)^2 \geq 16$$

$$x^2 + 4x^2 - 16x + 16 \geq 16$$

$$5x^2 - 16x \geq 0$$

$$x(5x - 16) \geq 0$$

$$x \geq 0$$

or $x \geq \frac{16}{5}$ ← if this is true then $x \geq 0$ also



ignore $x=0=y$ and just find intercepts of ellipse.

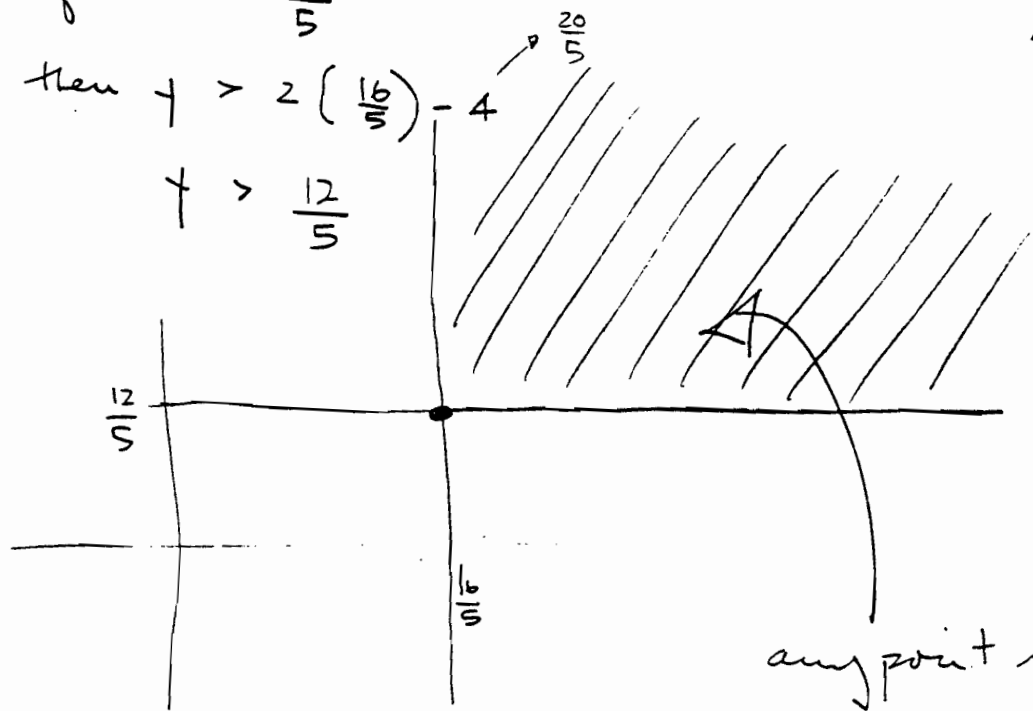
then x -intercept has $y=0$
 $x^2 = 121$
 $x = \pm 11$
 x -intercept has $y=0$
 $x = \pm 11$

9. cont'd.

$$\text{if } x \geq \frac{16}{5}$$

$$\text{then } y > 2\left(\frac{16}{5}\right) - 4$$

$$y > \frac{12}{5}$$

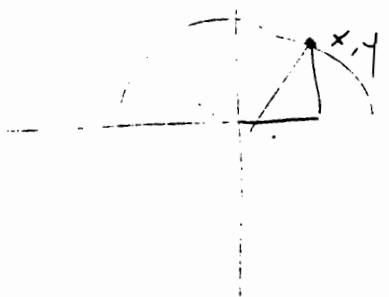


any point in
this region
including the
boundaries

(10.)

given intercepts, find the equation
of a circle.

$$x^2 + y^2 = c^2 = \text{radius}^2$$



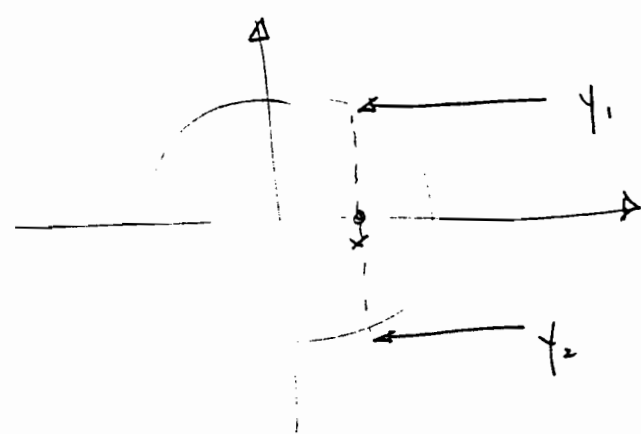
← a general point that must
be 5 units from the origin

all points must have

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

11

a function has a unique y value for each x value. i.e., a function can be one-to-one or many-to-one but not one-to-many. Note that, generally, each x has ^{ways to} more than one value of y .

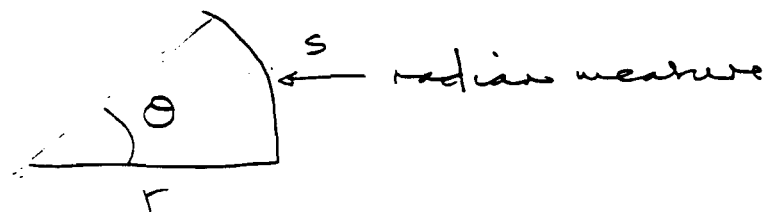
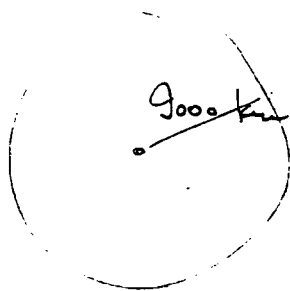


12

from 10, all points on the circle (x, y) must be the same distance from the center:

$$\text{i.e., } (2\sqrt{5})^2 = x^2 + y^2$$

$$20 = x^2 + y^2$$

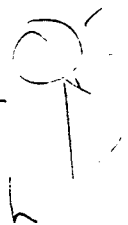


$$\frac{s}{r} = \theta \text{ in radians}$$

$$s = r \theta = (900) \left(\frac{7\pi}{6} \right)$$

$$= 1500\pi \text{ kilometers}$$

15



$$\frac{h}{6} = \tan 45^\circ$$

shadow = 6 m

$$\frac{h}{6} = \tan 45^\circ$$

$$h = 6 \text{ or } \Delta$$

must be right
isosceles

16 can't remember the general equation in terms of radians but maybe

$$y = a \cos$$

this is like a times a cos function
but shifted spread out twice
as much

$$y = 4 \cos \theta + 2\pi$$

may be wrong

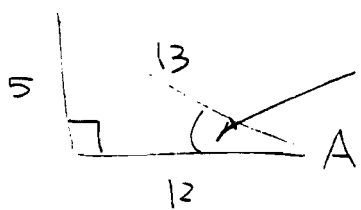
(too lazy to check)

⑦ use sine rule:

$$\frac{\text{length AC}}{\sin B} = \frac{\text{length AB}}{\sin 20^\circ}$$

$$AC = \left(\frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} \right) (10)$$

⑬ recall that $12^2 + 5^2 = 13^2$

$$\sin A = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} = \frac{5}{13}$$


$$\text{So } \tan A = \frac{5}{12}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{5/13}{12/13}$$

⑭ identities are always true regardless of sign of x

1, 2 and 3 are false

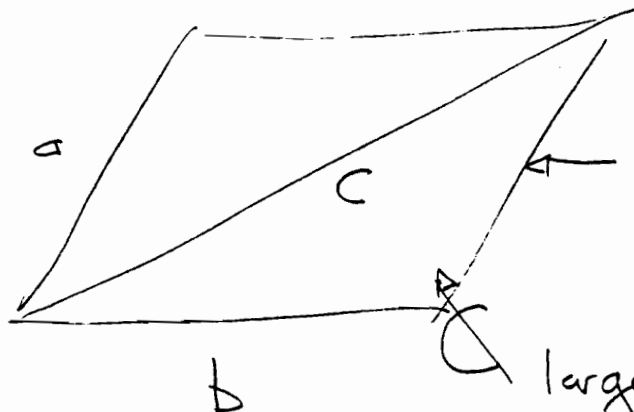
So 4 must be right.

is false!



equal in size, but opposite

20



A61

10.

also a of opp. sides =

largest $\angle$ always opp.
largest side

use cosine rule (if I can remember it)

$$c^2 \cos C = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\cos C = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab} = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}$$

(24) $C = kt \quad \alpha \quad k = \frac{C}{t} = \frac{7.5}{10} = .75 \neq$

$$t = \frac{C}{k} = \frac{7.5}{.75}$$

(26) $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-5} = 1 \quad (\text{multiply by } -15)$

$$5x + 3y = -15$$

$$3y = -5x - 15$$

$$y = -\frac{5}{3}x - 5$$

23

$$\text{slope} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-0}{4-0} = \frac{3}{4}$$

A62

11

22

product of slopes = -1 if lines are perpendicular

$$\text{slope AB} = \frac{3-1}{-5-7} = \frac{2}{-12} = -\frac{1}{6}$$

$$\text{slope DC} = \frac{6-0}{4-3} = \frac{6}{1}$$

$$\text{note that } (\text{slope AB})(\text{slope DC}) = \left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{6}{1}\right) = -1$$

29

let l = length

$$w = l - 2$$

question probably should read:

if both

doesn't make sense

Can't increase length

and width by 216 sq. cm

$$\bar{v}_1 = 384 \text{ kmh}^{-1}$$

$$\bar{v}_2 = 448 \text{ kmh}^{-1}$$

they overtake when the distance they cover is the same

$$d_1 = \bar{v}_1 t_1 = d_2 = \bar{v}_2 t_2$$

$$t_1 = t_2 + \frac{1}{2}$$

$$384 t_1 = 448 t_2$$

$$384 \left(t_2 + \frac{1}{2} \right) = 448 t_2$$

$$384 t_2 + 192 = 448 t_2$$

$$192 = 64 t_2$$

$$\frac{192}{64} \text{ h} = t_2$$

(27) determined by slopes. If slopes = then lines ||; if slope products = -1 then lines $\perp$

$$(a) \text{ slope } P_1 P_2 = \frac{2-6}{-1-1} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$\text{slope } P_3 P_4 = \frac{-4-0}{1-(-2)} = -\frac{4}{3}$$

the $P_1 P_2 \perp P_3 P_4$

(b) slope $P_1 P_2 = \frac{2-0}{0-3} = -\frac{2}{3}$

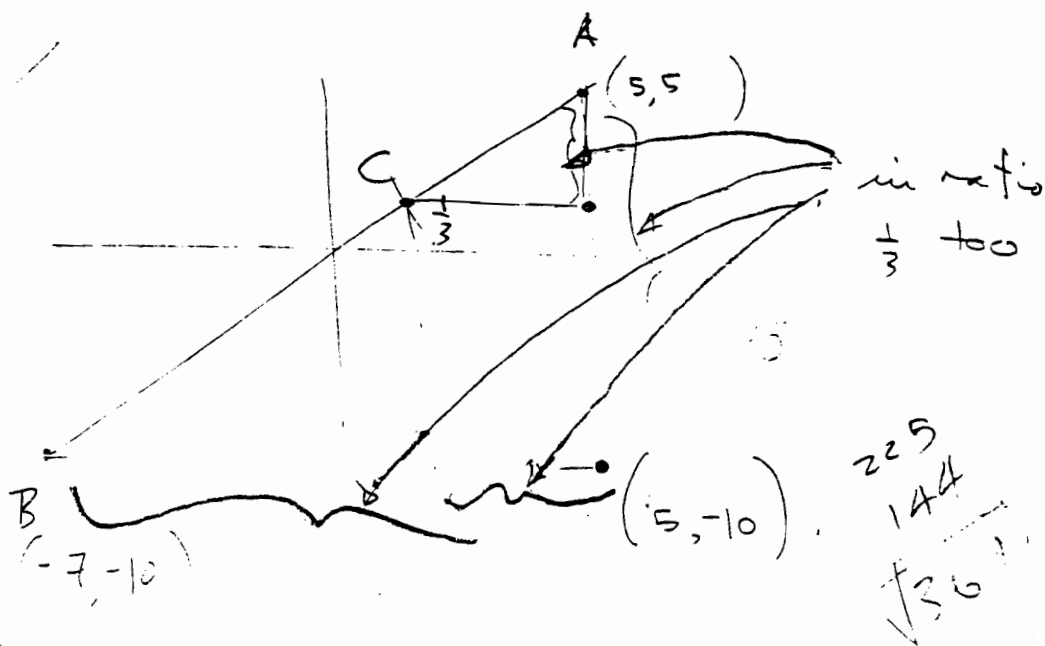
slope $P_3 P_4 = \frac{4-0}{0-6} = -\frac{2}{3}$

$P_1 P_2 \parallel P_3 P_4$

A64

13

25



C has y coordinate $\frac{1}{3}$ of 15
or 5

C has x coordinate $\frac{1}{3}$ of 12
or 4

$C = (4, 5)$

distance formula

$P_1(x_1, y_1) \quad P_2(x_2, y_2)$

$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

34.

$$|4x - 3| = 7$$

A65

14.

mean $4x - 3 = 7$

$$x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$x - (4x - 3) = 7$$

$$x = -1$$

32

$$-2x + 3 \leq 3x - 22$$

$$25 \leq 5x$$

$$25 \leq x$$

$$4x - 13 > 2x - 5$$

$$2x > 8$$

$$x > 4$$

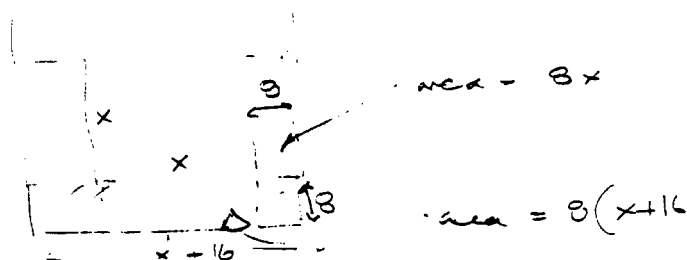
if $x \geq 25$ then it is also > 4

$$\text{So } x \geq 25$$

32

area of rink = x^2 if its square and
of side x

area of board



$$\text{area of board} = 2(8x) + 2(8[x + 16]) = 16x + 16x + 256,$$

$$32x + 256 = \frac{1}{2} x^2$$

$$64x + 512 = x^2$$

$$x^2 - 64x - 512 = 0$$

$$(x - \quad)(x + \quad) = 0$$

31.

$$\text{volume} = l \times w \times h$$

$$= (x+2)(x)(2)$$

$$96 = 2x^2 + 4x^2$$

$$48 = x^2 + 2x$$

$$48 = x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$\pm \sqrt{46} = x \quad (x - 6)(x + 9) = 0$$

only accept $+\sqrt{46}$ as can't have negative length or width.

$$x = 6$$

Not accept

$$x = 6$$

then $x+2=8$.

$$x+2 = \sqrt{46} + 2$$

$$x = \sqrt{46}$$

INSTRUCTIONS FOR CODING

A- Experimental task:

Before to describe the coding task, it is important to give you a short description of what the students were asked to do in the experimental task.

After a practice task, the students were given a serie of 30 mathematical problems in a random order. Three steps were to be done. A- First, the subjects were asked "to categorize or group the problems according to their mathematical structure" and afterwards, "to explain their reasons for categorization". They could do as many groups as they wanted with as many problems inside each group. B- When this was done, they had to find similarities among the different groups they had done and again to explain their reasons for wanting to group the problems together, C- and finally, they had to subdivide further the initial groupings and explain the reasons for such subdivisions. .

All the experimental session was recorded and transcribed verbatim. The text was then segmented to facilitate the coding procedure. The segments preceeded by the letter "E:" are part of the experimenter verbatim, those which are preceeded by the letter " S:" are parts of the subjects verbatim. **You are to code only the segments part of the subject's verbatim (only those preceeded by S:).** Segments that are put into brackets "[]" are invalid or incomplete; they consequently should not be coded.

B- Coding task:

B.I- General categories:

The coding task consists of two parts. First the data should be looked at from a general view point and the segments differentiated according to three different general categories: 1) reasons for categorization, 2) identification and organisation of the groups of problems or 3) others. Once this is done, the general category "1) reasons for categorization" should be looked at more in depth, since it is the main focus of this study.

Below is a description of each general category.

B.I.1- Reasons for categorization:

The experimental task was conceived so that after each of its step, the subject would have to explain why he or she grouped the problems together. Should be labelled as "reason" all the segments explaining why each group was built the way they were, why the subject decided to put the problems together. It could be the reasons given for categorization (for the groupings), for putting the groups together or for subdividing the groups. It can include also the rational given for the reasons. It is to be noted that one problem can be considered as a group if such decided by the subject. You should have at least one segment per grouping labelled as "reason".

B.I.2- Identifications of problems and statements about the organisation of groups of problems (Or):

a) During the experimental task the subjects were asked to always say out loud the number corresponding to the problems of the group they were talking about. For example, to say "this is the group with #3, #7 and #11". Such enumeration of the problems contained in one group is referred to as "problem identification" and should be labelled in this category.

b) Throughout the task the subjects were allowed to make as many groups or subgroups as they wanted. Since the reasons for categorization were different from one person to the other, the resulting groupings organisations were also different. That is why it was important to capture the relations among the groups or inside one group (for example if there are subgroups, and how many, or if one group is related to two groups in the same time). This is what we mean when we refer to problem organisation.

Ex.: "The group with #9 in it, I would also divide it in three subgroups."

B.I.3- Others (O):

In this category you should put all the segments that do not enter in any of the above categories. They could be planning statements (ex.: "I will talk first about this group and then about this one"), repetition of an answer for the experimenter, confirmation after a question of the experimenter, or any other comments not related to the reasons for categorization or identification or organisation of problems or groups.

B.II- Categories "reasons for categorisation"

After you have identified the segments according to the three general categories, the coding task will consist on concentrating on the first one "reasons for categorization". This part of the coding represents the core of the study. It CAN NOT be done without considering the mathematical problems on which were based the reasons given for categorization, as it is necessary to be able to determine whether an information was taken directly from the problems, or if some thinking took place. The goal of the task is to differentiate the reasons (and their rational) that involve higher level of conceptualization or greater level of comprehension from those which show less. (See appended document for a description of the coding categories.)