

INSTABILITE BAROTROPE DU
JET DE BICKLEY

par



Godelieve Deblonde

Thèse soumise à la Faculté des Etudes
Supérieures et de la Recherche de
l'Université McGill en vue de l'obtention
de la maîtrise en Mathématiques.

Département de Mathématiques

Université McGill

Montréal, Québec.

Août 1981

RESUME

L'étude de l'instabilité linéaire barotrope du jet de Bickley ($\bar{u}(y) = \text{sech}^2 y$) se fait à partir de l'équation du tourbillon barotrope. Le jet de Bickley est un écoulement parallèle; sa stabilité s'étudie en superposant une petite onde perturbatrice. En utilisant l'approche des modes normaux, on obtient l'équation de Rayleigh-Kuo. Celle-ci, avec les conditions aux limites, est solutionnée comme un problème aux valeurs propres. Le jet de Bickley satisfait les conditions requises pour utiliser l'approximation du plan β .

Certains résultats analytiques servant à imposer des limites sur les résultats numériques sont déduits. Entre autres, l'application du théorème du demi-cercle modifié. Les variations des contraintes de Reynolds sont aussi considérées.

Les résultats numériques présentés ici sont en partie différents de ceux obtenus par Kuo. On localise approximativement et pour la première fois une partie de la frontière de stabilité neutre (β autour de -2.0). Cette partie ne correspond pas au "mode singulier similaire à une onde de Rossby", pour lequel la vitesse de phase est égal à un. A la suite de cette recherche, nous concluons que ce mode singulier ne joue pas un rôle important dans l'étude de la stabilité.

ABSTRACT

The study of linear barotropic instability of the Bickley jet ($\bar{u}(y) = \text{sech}^2 y$) is accomplished by considering the barotropic vorticity equation. The Bickley jet is a parallel flow, and the study of its stability is done by superimposing a small wavelike perturbation. Using the normal-mode approach, we obtain the Rayleigh-Kuo equation. This equation, together with its boundary conditions is solved as an eigenvalue problem. The Bickley jet satisfies the requirements for use of the β plane approximation.

Some analytical results are deduced, which provide bounds for the numerical results. Among them is the modified semi-circle theorem. The Reynolds stress variation is also considered.

The numerical results presented herein are in part different from those obtained by Kuo. We locate approximately, and for the first time, part of the neutral stability boundary (β around -2.0). This part does not coincide with the "singular submode like Rossby wave" for which the phase velocity is one. After our research, we conclude that this singular submode does not play an important role in the study of stability.

REMERCIEMENTS

Je voudrais exprimer ma profonde reconnaissance au Dr. Sherwin A. Maslowe pour m'avoir suggéré le sujet de cette étude et pour les innombrables conseils et suggestions qui m'ont permis de mener à bien ce projet.

Je remercie également Alfred Burns pour les discussions constructives que nous avons tenues ensemble.

Je suis reconnaissante au Conseil National de la Recherche Scientifique (Ottawa) pour l'octroi d'un support financier ayant permis la réalisation de ce projet.

Je tiens enfin à remercier mon époux Ivan qui m'a apporté tout le soutien, les encouragements et le réconfort nécessaires.

TABLE DES MATIERES

RESUME		i
ABSTRACT		ii
REMERCIEMENTS		iii
CHAPITRE 1	Introduction	1
1.1	Description du problème	1
1.2	Solutions explicites trouvées jusqu'à présent	7
1.3	Exposition des résultats numériques trouvés jusqu'à présent	11
CHAPITRE 2	Résultats analytiques	14
2.1	Symétrie de la solution de l'équation de Rayleigh-Kuo	15
2.2	Limites sur la vitesse de phase et le taux de croissance	17
2.3	Contraintes de Reynolds	22
CHAPITRE 3	Exposition des méthodes numériques et analyse des résultats numériques	27
3.1	Méthode de Runge-Kutta avec intégration sur l'axe réel	28
3.2	Méthode de Runge-Kutta avec intégration dans le plan complexe	34
3.3	Méthode de différences finies du deuxième ordre	40
3.4	Résultats numériques et recherche de la frontière de stabilité neutre	45
3.5	Le mode singulier similaire à une onde de Rossby	48
APPENDICE I	Calcul des bornes de la vitesse de phase	61
APPENDICE II	Calcul du théorème du demi-cercle modifié	64
BIBLIOGRAPHIE		67

Chapitre premier

INTRODUCTION

1.1 Description du problème

Nous étudions la stabilité linéaire barotrope du jet de Bickley, en utilisant l'approche des modes normaux. Le fluide considéré est non visqueux, homogène et incompressible. Le mouvement est supposé horizontal et non divergent. L'équation décrivant l'écoulement est celle du tourbillon en deux dimensions. L'écoulement principal se fait d'ouest en est. On suppose que le maximum de la vitesse de l'écoulement de base se produit dans une bande étroite de latitude et que cet écoulement atteint rapidement une valeur constante lorsqu'on approche le pôle ou l'équateur. Sous ces conditions, il est permis d'approximer les coordonnées sphériques terrestres par des coordonnées cartésiennes (x, y, z) qui sont respectivement dirigées vers l'est, le nord et la verticale. Les vitesses respectives sont u , v et w . La vitesse de base U prend la forme $U = \bar{u}(y)$.

Puisque le courant est non divergent et horizontal, nous pouvons définir une fonction de courant $\Psi(x, y, t)$ pour un mouvement perturbé de la façon suivante:

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

On suit ici la convention utilisée en météorologie.

L'équation du tourbillon nous dit que pour tout élément de fluide, la composante verticale du tourbillon absolu est conservée. Le tourbillon absolu comprend le tourbillon produit par le mouvement relatif à la terre et celui causé par la rotation de la terre. L'équation du tourbillon est la suivante:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}(y) \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \Psi + \left(\beta_0 - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0. \quad (1.1)$$

Soit $f \equiv 2\Omega \sin \theta$ le paramètre de Coriolis, où θ est la latitude et Ω est la vitesse angulaire de la terre. Alors, puisque nous considérons un jet restreint à une bande étroite, f peut être linéarisé autour de la latitude moyenne θ_0 , i.e. $f \cong f_0 + \beta_0 y$, $\beta_0 y \ll f_0$ où $f_0 = 2\Omega \sin \theta_0$ et $\beta_0 = \frac{2}{R} \cos \theta_0$ où R est le rayon de la terre.

En météorologie et en océanographie, l'approximation utilisée ci-haut (dans laquelle on remplace les coordonnées sphériques par des coordonnées cartésiennes et où on considère $\beta(y)$ comme une constante) est appelée l'approximation du plan bêta.

Posons $\Psi(x, y, t) = \text{Re} \{ e^{i\alpha(x - ct)} \phi(y) \}$, alors l'équation (1.1)

devient

$$\frac{d^2 \phi}{dy^2} - \alpha^2 \phi + \left(\beta_0 - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \right) / (\bar{u} - c) \phi = 0, \quad (1.2)$$

où α est le nombre d'onde et $\text{Re}\{c\}$ est la vitesse de phase (c pouvant être complexe) c'est-à-dire $c = c_r + ic_i$. L'équation (1.2) est appelée équation de Rayleigh-Kuo. Par la suite, l'indice 0 associé à β sera omis.

Tout dépendant de la valeur de c_1 , plusieurs possibilités se présentent pour le comportement de la fonction de courant:

- si $c_1 \neq 0$, la fonction de courant contient un terme de croissance exponentielle dans le temps;
- si $c_1 > 0$, l'onde est amplifiée;
- si $c_1 < 0$, l'onde est amortie;
- si $c_1 = 0$, l'onde est neutre.

Le jet de Bickley ($\bar{u}(y) = \text{sech}^2 y$), dimensionalisé de façon appropriée, reproduit bien les conditions requises pour utiliser l'approximation du plan bêta. Nous utiliserons les variables sans dimensions suivantes:

$$y = y^*/L = \theta R/L \quad \text{et} \quad \beta^*(y^*) = \frac{2\Omega \cos \theta}{R} = VL^{-2}\beta(y).$$

V est une échelle de vitesse de $\bar{u}^*(y^*)$ et L est une échelle de longueur qui mesure les variations de $\bar{u}^*(y^*)$.

Maintenant, étudions les conditions aux limites. Puisqu'on considère un fluide s'étendant jusqu'à l'infini, ϕ doit être borné à l'infini afin de satisfaire les conditions physiques. Asymptotiquement, \bar{u} et $d^2\bar{u}/dy^2$ tendent vers zéro, de sorte que les deux solutions indépendantes de l'équation (1.2) sont $\exp(+\alpha\lambda_+ y)$ et $\exp(-\alpha\lambda_+ y)$ lorsque $y \rightarrow \infty$, où $\lambda_+ = (1 + \beta/\alpha^2 c)^{\frac{1}{2}}$ est une racine ayant une partie réelle non négative. Donc, à $\pm \infty$, ϕ est borné si on prend

$$\phi \sim \exp(\mp \alpha\lambda_+ y), \text{ lorsque } y \rightarrow \pm \infty. \quad (1.3)$$

En général, requérir que ϕ soit limité à $\pm \infty$, implique que ϕ tend vers zéro à l'infini. Les conditions aux limites peuvent donc être

$$\phi = 0 \text{ aux points } y \pm \infty . \quad (1.4)$$

Cependant, si λ_+ est imaginaire, les deux solutions indépendantes sont bornées et ondulatoires à l'infini; elles ne subissent ni amortissement, ni amplification. Pour trouver la forme correcte que ϕ prend à l'infini, nous utilisons la condition du rayonnement de Sommerfeld disant que le flux d'énergie doit être dirigé vers l'extérieur. Ceci implique que la composante y de la vitesse de groupe est orientée vers l'extérieur. Donc $\phi \sim \exp(i\alpha k_+ y)$ lorsque $y \rightarrow \infty$, où $k_+ = \{\beta / (-c\alpha^2) - 1\}^{\frac{1}{2}}$ est la racine tel que $d(\alpha c) / d(\alpha k_+) > 0$. Notons que dans ce cas c est toujours réel et puisque la perturbation oscille comme $\exp(-i\alpha c t)$ dans le temps sans amplification, ce n'est pas important à la recherche d'instabilité linéaire.

Donc, en général, la stabilité est gouvernée par l'équation (1.2) et les conditions aux limites (1.4). On doit ainsi résoudre un problème aux valeurs propres (posé par Kuo, 1949) où la valeur propre est $c(\alpha, \beta)$. Etant donné que le problème est invariant sous l'opération de conjugaison complexe, une onde amortie avec $c_1 < 0$ implique l'existence d'une onde amplifiée conjuguée avec $c_1 > 0$ (et vice versa). Ceci est évident mathématiquement. Mais du point de vue physique, cet aspect est controversé.

Puisque nous utilisons la terminologie des ondes modifiées de Rossby, nous introduisons ici tout d'abord la notion des ondes

de Rossby en se servant d'un exemple donné par Howard et Drazin, 1964. Considérons le cas où l'écoulement de base est nul, c.à.d $\bar{u}(y)=0$ de $-\infty$ à ∞ . Alors l'équation de Rayleigh-Kuo devient:

$$\frac{d^2 \phi}{dy^2} = (\alpha^2 + \beta/c) \phi \quad (1.5)$$

La seule solution permmissible bornée et pour laquelle l'énergie n'est pas radiée vers l'intérieur à $y = \pm \infty$ est la suivante:

$$\phi = \text{constante}, \quad c = -\beta/\alpha^2 \equiv -a \quad (1.6)$$

Ceci représente une onde de Rossby avec une vitesse de phase $= \beta/\alpha^2$, dans la direction des x négatifs (Rossby 1939). Les ondes de Rossby sont des ondes dispersives avec une vitesse de groupe $d(\alpha c)/d(\alpha) = -c = a$. L'énergie est donc propagée vers l'est avec une vitesse $= \beta/\alpha^2$ dans la direction opposée à la vitesse de phase. (Une onde dispersive est une onde pour laquelle la dérivée première de la fréquence αc par rapport au nombre d'onde n'est pas une constante. (Whitham, 1974))

Si $a \rightarrow \infty$, tel que $\beta^* \rightarrow \infty$ pour V fixé ou à la limite lorsque $V \rightarrow 0$ pour α^* , β^* fixe, alors on s'attend à ce que c^* tende vers sa valeur dans le cas limite $V=0$. Dans ce cas limite, une des valeurs propres devrait être $c^* = -a$, $a \rightarrow \infty$ puisqu'on sait qu'une onde de Rossby existe dans le cas limite considéré précédemment. Puisque le fluide s'étend dans un domaine infini, nous n'avons pas de contraintes cinématiques causées par les frontières. Dans ce cas limite, il n'y a pas d'instabilité inertielle de l'écoulement de base $\bar{u}^*(y^*)$ i relatif au système de rotation par lequel l'équilibre du tourbillon serait perturbé. Notons que nous avons la présence du gradient de tourbillon β^* dû à la rotation terrestre.

Soient $L \rightarrow 0$ pour α^* et β^* fixes et le champ de courant $V\bar{u}(y)$ ne rétrécissant pas à zéro. Lorsque $L \rightarrow 0$ pour α^* fixe, $\alpha \rightarrow 0$; donc une limite équivalente est $\alpha \rightarrow 0$ pour α^* fixe. Lorsque $L \rightarrow 0$ pour y^* fixe, $y = y^*/L$ tend vers $+\infty$, 0 ou $-\infty$ dépendant du fait que $y^* >$, $=$ ou < 0 respectivement. Donc à la limite

$$\begin{aligned} \bar{u}^*(y^*) &= V \bar{u}(\infty) \quad , \quad y^* > 0 \\ &= V \bar{u}(0) \quad , \quad y^* = 0 \\ &= V \bar{u}(-\infty) \quad , \quad y^* < 0. \end{aligned}$$

Pour un jet, on a $\bar{u}(-\infty) = +\bar{u}(\infty)$ et $\bar{u}(\infty) = 0$, ce qui implique que $\bar{u}^* \rightarrow 0$ lorsque $L \rightarrow 0$ pour y^* fixe. Pour $\bar{u}^* = 0$, nous savons que la valeur propre $c^* = -a^*$ provenant de l'onde de Rossby. Nous en déduisons que tous les courants du type jet ont (au moins un mode avec) une valeur propre stabilisatrice $c(\alpha, a) \rightarrow -a$ lorsque $\alpha \rightarrow 0$ pour a fixe.

Introduisons maintenant le critère de Rayleigh-Kuo (Rayleigh, 1980 et Kuo, 1949). Le théorème de Rayleigh-Kuo stipule que: une condition nécessaire pour l'existence d'un courant instable est que $\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} - \beta$ change de signe à un point quelconque à l'intérieur du courant. Ceci implique dans ce cas que $\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} - \beta$ doit être zéro quelque part dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$. Physiquement, cela signifie que le gradient de tourbillon $\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} - \beta$ vaut zéro quelque part dans l'intérieur de l'intervalle $(-\infty, \infty)$ dans le cas instable. Trouvons les régions où cette condition nécessaire d'instabilité s'applique. On a $\bar{u}(y) = \text{sech}^2 y$ et $\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} = 4 \text{sech}^2 y \tanh^2 y - 2 \text{sech}^4 y$. Nous devons trouver les racines de $\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} - \beta = 0$. En utilisant le changement de variable $z = \tanh y$, on obtient comme racines: $z_0 = 2/3 \pm (16 - 6(2 + \beta))^{1/2}$.

Puisque $z_0 \geq 0$, ceci implique $4 \geq (14 - 6(2 + \beta))^{\frac{1}{2}}$. Par conséquent, $-2.0 \leq \beta \leq 2/3$, et la région $\beta < -2.0, \beta > 2/3$ est stable. (Voir figure 1.)

Considérons maintenant les solutions explicites que Lipps, 1962 et Howard et Drazin, 1964 ont trouvés.

1.2 Solutions explicites trouvées jusqu'à présent.

Lipps en 1962 a trouvé deux solutions neutres. Notons qu'il a considéré le cas $\beta \geq 0$ seulement. La découverte de ces solutions est basée sur la preuve de Kuo, 1949 qui dit que pour un jet fini, restreint entre deux frontières, si $\bar{u} = c$, à un point $y = y_c$ pour une onde neutre, alors $\beta - \frac{d^2}{dy^2} \bar{u}$ est nul à ce point. Cette preuve, basée sur le théorème de comparaison de Sturm (Ince 1944), peut être selon Lipps facilement ramenée à notre cas à la suite de quelques retouches.

D'après Lipps, il faut tout d'abord trouver les vitesses de phase des ondes neutres pour lesquelles $c > 0$, ceci en évaluant les racines de $\beta - \frac{d^2}{dy^2} \bar{u} = 0$. Si $c_{1,2}$ sont ces vitesses de phase, l'équation (1.2) devient:

$$\frac{d^2}{dy^2} \phi + (6 \operatorname{sech}^2 y - k^2) \phi = 0 \quad \text{où } k^2 = 6c_{1,2} + \alpha^2 \quad (1.5)$$

En utilisant le changement de variable $z = \tanh y$, l'équation (1.5) prend la forme de l'équation associée de Legendre. Les deux solutions sont les polynômes associés de Legendre suivant:

$P_2^1(z) = 3z(1-z^2)^{\frac{1}{2}}$ et $P_2^2(z) = 3(1-z^2)^{\frac{1}{2}}$. D'après les propriétés de symétrie (chapitre 2, section 1), les conditions aux limites sont:

$$\frac{d\phi}{dy}(0) = 0, \phi(\infty) = 0 \quad (1.6)$$

où $\phi(0)=0, \phi(\infty)=0$ (1.7).

Nous avons donc les deux solutions avec y comme variable indépendante:

$$\phi_1 = \operatorname{sech}^2 y$$

avec $c=(1/6) \alpha^2$ et $\beta = (1/6) \alpha^2 (4-\alpha^2)$, qui est paire et

$$\phi_2 = \operatorname{sech} y \tanh y$$

avec $c=(1/6)(3+\alpha^2)$ et $\beta=(1/6)(1-\alpha^2)(3+\alpha^2)$ qui est impaire (voir figure 1).

Notons que la solution paire a deux branches dans le plan (α^2, β) . Pour la solution paire, Lipps, utilisant la méthode de perturbation de Lin montre que les ondes sont amplifiées pour des longueurs d'onde entre celles des deux ondes neutres, correspondant aux deux branches mentionnées ci-haut. De même, pour la solution impaire, les ondes de longueurs d'onde plus grandes que cette onde neutre sont instables et celles avec des longueurs d'onde plus courtes sont stables.

Howard et Drazin, 1964 ont poursuivi la recherche de Lipps. Cependant, ils ont également considéré le cas $\beta < 0$. Ils ont remarqué qu'un changement dans le signe de β est mathématiquement équivalent à un changement de signe de \bar{u} , bien que β en pratique soit toujours positif. Dorénavant, nous allons considérer $\beta > 0$ et $\beta < 0$. Les deux solutions neutres que Lipps avait trouvées sont encore valides lorsque $\beta < 0$.

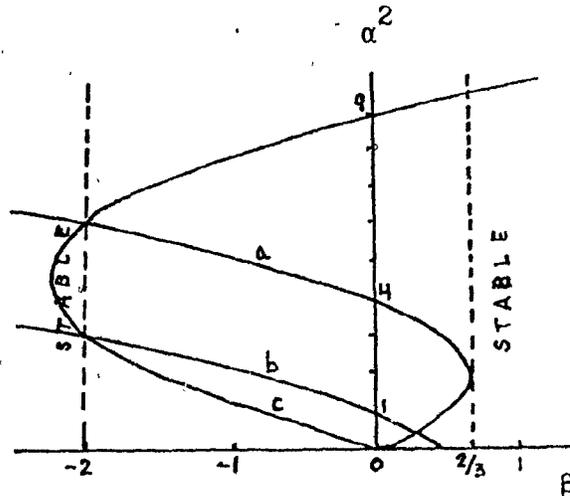


Fig. 1 . Courbe a: $\phi = \text{sech}^2 y$, $c = \alpha^2/6$, $\beta = \alpha^2(4 - \alpha^2)/6$, mode pair;
 Courbe b: $\phi = \text{sech } y \tanh y$, $c = (3 + \alpha^2)/6$, $\beta = (1 - \alpha^2)(3 + \alpha^2)/6$,
 mode impair;
 Courbe c: $\phi = (\text{sech } y)^{\alpha^2/3} (\tanh y)^{2 - \alpha^2/3}$, $c = 1$, $\beta = -\alpha^2(9 - \alpha^2)/9$

Howard et Drazin, 1964 ont trouvé une autre solution qu'ils ont appelée: "sous-mode impair similaire à une onde de Rossby". Cette solution correspond à la courbe c à la figure 1. D'après eux, cette solution fait partie du sous-mode stable représentant l'onde modifiée de Rossby, et en général elle n'est pas une frontière de stabilité. Notons que si $c=1$ dans l'équation de Rayleigh-Kuo et que si le changement de variable $z = \tanh y$ est utilisé, alors développant en série de Froebenius: $\phi = z^s \sum_{m=0}^{\infty} z^m$, on obtient l'équation indicielle suivante:

$$s(s-1)-2-\beta=0, \text{ de sorte que } s = \frac{1 \pm (1+4(2+\beta))^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

Si $\beta = -\alpha^2 + (1/9)\alpha^4$, alors on obtient un carré parfait sous la racine carrée et $s = 2 - \alpha^2/3$. Pour les termes d'ordre supérieur en z , il est aisé de montrer que ceux-ci convergent vers $(1-z^2)^{\alpha^2/6}$ et $\phi = (1-z^2)^{\alpha^2/6} z^{2-\alpha^2/3}$. Lorsque y est la variable indépendante, ϕ devient $\phi = (\text{sech } y)^{\alpha^2/3} (\tanh y)^{2-\alpha^2/3}$, soit $\phi = (\tanh^2 y)(1/\sinh y)^{\alpha^2/3}$. La courbe c représente cette solution. Notons que ce mode est singulier au point $y=0$ et qu'il n'est pas évident comment prolonger celui-ci à travers $y=0$.

En 1962, Drazin et Howard développèrent une méthode utilisant une approximation pour les grandes longueurs d'onde, afin d'étudier les caractéristiques de stabilité pour des courants non bornés ($\alpha \rightarrow 0$). Mais cette méthode ne s'applique que pour $\beta=0$. En 1964, ils ont généralisé leur méthode pour $\beta \neq 0$. Ainsi, pour le mode singulier, ils obtinrent $c = -a - (a+2/3)^2 \alpha^2/a^3 - \dots$. Il est maintenant clair pourquoi ils appelèrent ce mode singulier un sous-mode similaire à une onde de Rossby (dans le cas d'une onde de Rossby, $c \sim -a$). Nous allons discuter encore de ce mode plus loin. Jusqu'à présent, on peut conclure que le mode impair est plus instable que le mode pair pour les grandes ondes, bien que le mode pair soit instable à certaines ondes pour une plus grande étendue de β . Ceci signifie que des jets se dirigeant vers l'est ($\bar{u} > 0$) sont plus stables que des jets se dirigeant vers l'ouest ($\bar{u} < 0$).

)

Selon Tung, 1981 (qui considère seulement $\beta \geq 0$), une forme additionnelle de solutions existe pour le cas rotationnel ($\beta \neq 0$), qui peut aussi avoir des voisinages instables. La solution neutre est caractérisée par la présence d'une couche critique à l'une des frontières ($c = \bar{u}_{\min}$) et est absente lorsque $\beta=0$ (par le théorème du demi-cercle, Howard, 1961). Ce deuxième mode neutre existe sous une condition différente de celle du mode de "point d'inflexion" où $\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} = \beta$. De plus, l'existence du "point d'inflexion" n'est pas requise. Cependant, pour avoir un voisinage de solutions instables, un "point d'inflexion" doit exister à l'intérieur du courant et les mêmes conditions que pour l'instabilité du mode d'inflexion sont satisfaites.

Nous avons essayé de trouver d'autres solutions explicites en utilisant les fonctions hypergéométriques, mais cette opération fut sans succès.

Maintenant, consultons les résultats numériques.

1.3 Exposition des résultats numériques trouvés jusqu'à présent.

L'étude numérique la plus récente a été faite par Kuo (voir fig.2). Cependant, il ne nous donne aucun détail, sur la façon dont les résultats ont été obtenus, sauf qu'il a employé une méthode itérative. Ses résultats nous disent que la vitesse de phase des perturbations instables est toujours à l'intérieur de l'étendue du courant de base et pour $\beta > 0$, sa valeur décroît à un minimum et croît ensuite avec la longueur d'onde.

O

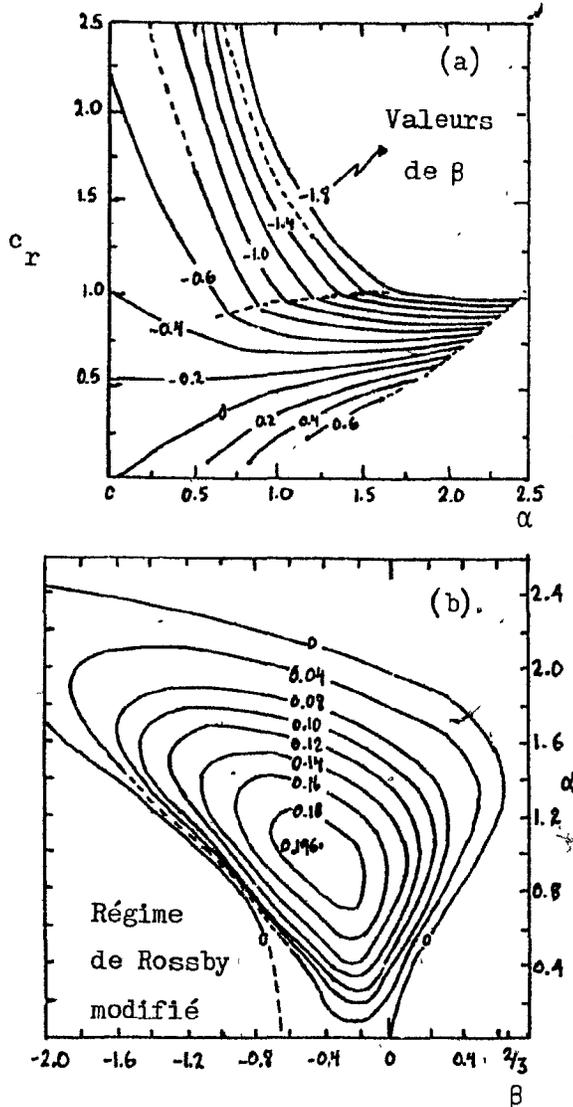


Fig. 2. Valeurs propres pour $\bar{u} = \text{sech}^2 y$. (a) c_r en fonction de α
(b) $\alpha c_1 = \text{const.}$
(Kuo, 1973)

Pour $\beta=0$, le mode pair a été calculé par Seto et Kuruki, 1961 et par Kaplan, 1964. Les résultats sont montrés à la figure 3.

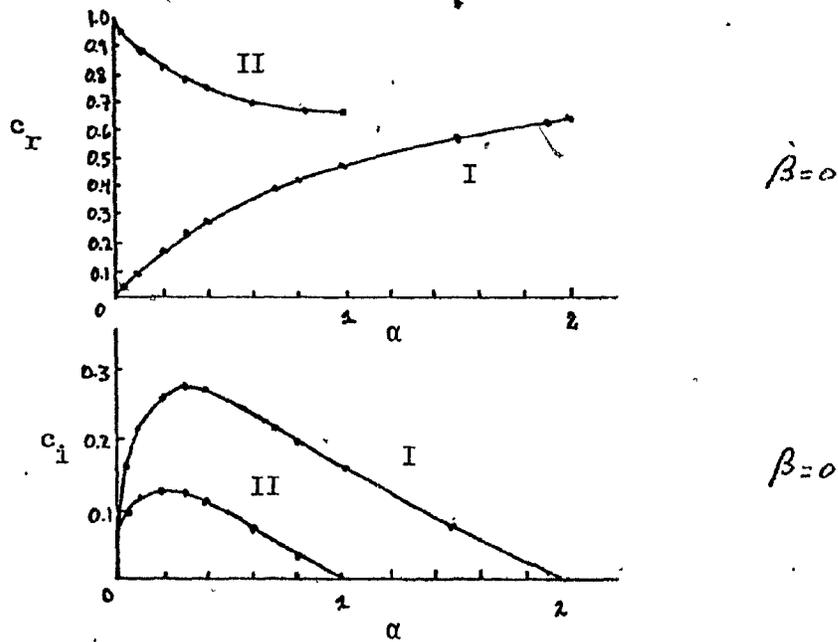


Fig. 3. Stabilité d'un jet non visqueux et symétrique ($\bar{u}=\text{sech}^2 y$).

Sur la courbe I, la solution est symétrique et sur la courbe II, la solution est antisymétrique (Betchov et Criminale, 1967).

Chapitre deuxième

RESULTATS ANALYTIQUES

Etant donné le peu de succès obtenu lors de la recherche des solutions explicites de l'équation de Rayleigh-Kuo nous utiliserons tous les moyens possibles pour faciliter les calculs numériques et avoir un contrôle sur ces derniers. Rappelons que le but principal est de trouver la frontière de stabilité neutre entre les points $(\beta, \alpha^2) = (-2, 3)$ et $(\beta, \alpha^2) = (-2, 6)$. Pour se situer, veuillez consulter la figure 1.

Tout d'abord, nous considérons la symétrie des solutions de l'équation différentielle étant donné que le courant de base est symétrique. Ainsi, il nous est possible de réduire le coût des calculs d'environ un tiers, en intégrant seulement sur la moitié du domaine. En second lieu, nous trouvons des limites sur les valeurs de c_r, c_i et αc_i en appliquant entre autres le théorème du demi-cercle modifié trouvé par Pedlosky, 1963, et aussi par Kuo et Miles. Finalement, on étudie les solutions locales en utilisant le développement en série de Frobenius ainsi que la contrainte de Reynolds qui devrait éclaircir la nature de la frontière de stabilité neutre manquante.

2.1 Symétrie de la solution de l'équation de Rayleigh-Kuo.

Soit $\mathcal{L} \equiv \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 - \frac{\bar{u}'' - \beta}{\bar{u} - c}$ tel que $\mathcal{L} \phi(y) = 0$ représente l'équation de Rayleigh-Kuo. La solution générale de $\mathcal{L} \phi = 0$ est $\phi = c_1 \phi_1$ et $c_2 \phi_2$ (c_1 et $c_2 = \text{constantes}$). ϕ_1 et ϕ_2 sont linéairement indépendants sur le domaine considéré, soit $[-L, L]$; ceci implique que le wronskien de ϕ_1 et ϕ_2 est différent de zéro sur $[-L, L]$. Soient

$$v_1(y) \equiv \phi_1(0) \phi_2(y) - \phi_2(0) \phi_1(y)$$

et

$$v_2(y) \equiv \phi_1'(0) \phi_2(y) - \phi_2'(0) \phi_1(y)$$

Alors, $v_1(0) = 0$, $v_1'(0) \neq 0$, $v_2(0) = 0$ et $v_2'(0) \neq 0$ et il est aisé de montrer que le wronskien de $v_1(y)$ et $v_2(y)$ est aussi différent de zéro sur $[-L, L]$. Etant donné que \mathcal{L} est un opérateur du second ordre, la solution générale $\phi(y)$ peut s'écrire $\phi(y) = a v_1(y) + b v_2(y)$.

Dans notre cas, on a

$$\mathcal{L}(-y) = k \mathcal{L}(y)$$

où k est une constante; alors

$$v_1(-y) = c v_1(y) + d v_2(y)$$

Puisque $v_1(0) = 0$, ceci implique que $d v_2(0) = 0$ et par conséquent, d est nul, étant donné que l'on cherche des solutions non triviales. De même,

$$\begin{aligned} -v_1'(-y) &= c v_1'(y) + d v_2'(y) \\ &= c v_1'(y) \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$-v_1'(0) = c v_1'(0) \Rightarrow c = -1$$

et

$$v_1(-y) = -v_1(y)$$

Donc $v_1(y)$ est une fonction impaire.

Suivant le même raisonnement, on a:

$$V_2(-y) = e V_1(y) + f V_2(y)$$

$$V_2(0) = f V_2(0) \Rightarrow f = 1.$$

Aussi,

$$-V_2'(-y) = e V_1'(y) + V_2'(y)$$

$$-V_2'(0) = 0 = e V_1'(0) \Rightarrow e=0$$

et

$$V_2(-y) = V_2(y).$$

Donc $V_2(y)$ est une fonction paire. Si les conditions aux limites sont homogènes, c.-à-d. $\phi(\pm L) = 0$, comme dans notre problème, on a:

$$\phi(L) = a V_1(L) + b V_2(L) = 0 \quad (2.1)$$

$$\phi(-L) = -a V_1(L) + b V_2(L) = 0 \quad (2.2)$$

En additionnant les équations (2.1) et (2.2), on obtient:

$$2 b V_2(L) = 0.$$

Donc, si $V_2(L) \neq 0$, $b = 0$ et ceci implique que ϕ est impair. D'autre part, si on multiplie l'équation (2.1) par -1 et qu'on l'additionne à l'équation (2.2), on obtient: $-2 a V_1(L) = 0$. Donc, si $V_1(L) \neq 0$, $a = 0$ et ϕ est pair. Par conséquent, ϕ est soit paire ou impaire. Notons aussi que $\phi(y)$ doit être analytique au point $y=0$ pour pouvoir conclure directement que $\phi(y)$ doit être paire ou impaire.

2.2 Limites sur la vitesse de phase et le taux de croissance.

Dans cette section, on considère les preuves faites par Pedlosky. Tout d'abord discutons de la limite sur c_r . Dans son livre, Pedlosky, 1979, a fait la démonstration pour le cas où le domaine s'étend de $[-1,1]$ et $\beta > 0$, alors que nous sommes intéressés par un domaine qui s'étend de $(-\infty, \infty)$ et où β peut aussi être négatif. Etant donné que le résultat final changeait peu, on a préféré rapporter la démonstration (qui n'est autre que l'application de la méthode de Pedlosky) dans l'appendice I.

Voici donc le résultat: si $\bar{u}_{\max} \equiv$ maximum du profil de vitesse et $\bar{u}_{\min} \equiv$ minimum du profil de la vitesse, alors:

pour $\beta > 0$, on a:
$$\bar{u}_{\min} - \beta/2\alpha^2 \leq c_r \leq \bar{u}_{\max} \quad (2.3a)$$

qui dans notre cas devient:

$$-\beta/2\alpha^2 \leq c_r \leq 1 \quad (2.3b)$$

car $\bar{u}_{\min} = 0$ et $\bar{u}_{\max} = 1$.

Pour $\beta < 0$, on a:
$$\bar{u}_{\min} \leq c_r \leq \bar{u}_{\max} + |\beta|/2\alpha^2 \quad (2.4a)$$

qui dans notre cas devient:

$$0 \leq c_r \leq 1 + |\beta|/2\alpha^2 \quad (2.4b)$$

Ceci implique que c_r peut être plus grand que 1.

Considérons maintenant le théorème du demi-cercle modifié. Encore là, sa preuve s'applique pour un domaine fini, et β positif seulement. Donnons ici les résultats; la preuve sera dans l'appendice II.

Pour $\beta > 0$, nous avons:

$$\left(\frac{\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}}{2} \right)^2 + \frac{\beta}{\alpha^2} \frac{\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}}{2} \geq \left(c_r - \frac{\bar{u}_{\max} + \bar{u}_{\min}}{2} \right)^2 + c_1^2 \quad (2.5a)$$

Ce qui dans notre cas devient:

$$(1/4) + \beta/2\alpha^2 \geq (c_r - \frac{1}{2})^2 + c_1^2 \quad (2.5b)$$

Illustrons ce résultat (et aussi (2.3b)) par le schéma de la figure 4.

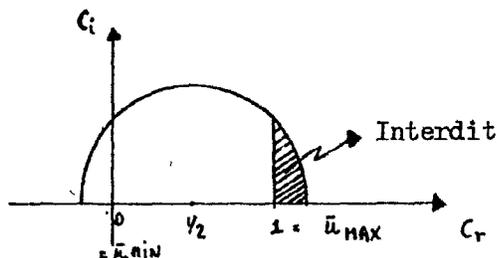


Fig.4. Illustration du demi-cercle modifié pour $\beta > 0$

Alors le rayon du demi-cercle est $R = (1/4 + \beta/2\alpha^2)^{1/2}$. Puisque $-\beta/2\alpha^2 \leq c_r \leq 1$ d'après l'équation (2.3b), on peut montrer que $R - \frac{1}{2} \leq \beta/2\alpha^2$, par conséquent $(R - \frac{1}{2})$ est contenu dans $\beta/2\alpha^2$ et le théorème du demi-cercle modifié donne une restriction plus sévère sur les valeurs que c_r peut prendre.

Pour $\beta < 0$, nous avons:

$$\left(\frac{\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}}{2} \right)^2 + \frac{|\beta|}{\alpha^2} \frac{\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}}{2} \geq \left(c_r - \frac{\bar{u}_{\max} + \bar{u}_{\min}}{2} \right)^2 + c_1^2 \quad (2.6a)$$

Notons que pour $\beta=0$, on obtient le théorème du demi-cercle de Howard (Howard, 1961). Dans notre cas, l'équation (2.6a) devient:

$$1/4 + |\beta|/2\alpha^2 \geq (c_r - \frac{1}{2})^2 + c_i^2 \quad (2.6b)$$

Encore une fois, nous allons illustrer ce résultat et aussi l'équation (2.4b) par le schéma 5.

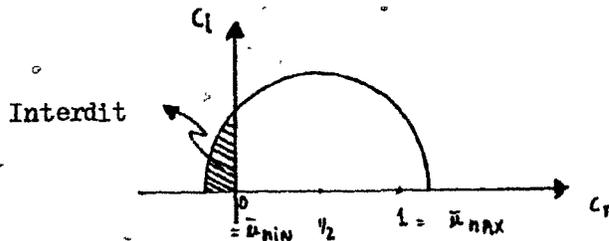


Fig. 5. Illustration du demi-cercle modifié pour $\beta < 0$.

Puisque $0 \leq c_r \leq 1 + |\beta|/2\alpha^2$, on peut montrer que $R + \frac{1}{2} < 1 + |\beta|/2\alpha^2$.

Par conséquent, on peut en tirer la même conclusion que dans le cas précédent. En général, c.-à-d. pour $\beta > 0$ ou $\beta < 0$, l'équation (2.6a) s'applique. Aussi, à partir de l'équation (2.6a), on peut conclure que

$$c_i^2 < \left(\frac{\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}}{2} \right)^2 + \frac{|\beta|}{\alpha^2} \left(\frac{\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}}{2} \right) \quad (2.7a)$$

Dans notre cas, on a:

$$c_i^2 \leq 1/4 + |\beta|/2\alpha^2 \quad (2.7b)$$

Enfin, obtenons un dernier résultat, appliquant encore

la méthode de Pedlosky, pour les mêmes raisons que celles citées au préalable ; cette fois, puisque la preuve est courte, nous allons la donner ici. Soit $\phi = (\bar{u}-c)^{\frac{1}{2}} \chi$, $\chi = 0$ aux points $y = \pm \infty$. Réécrivant l'équation de Rayleigh-Kuo en utilisant χ comme variable indépendante à la place de ϕ , on obtient:

$$\frac{d}{dy} \left[(\bar{u}-c) \frac{d\chi}{dy} \right] - \alpha^2 (\bar{u}-c) \chi - \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 \frac{\chi}{4(\bar{u}-c)} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \chi + (\beta - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2}) \chi = 0$$

Multipliant la dernière équation par χ^* , intégrant de moins l'infini à l'infini, et prenant la partie imaginaire, on obtient:(1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \left[\left| \frac{d\chi}{dy} \right|^2 + \alpha^2 |\chi|^2 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} dy \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 \frac{|\chi|^2}{|\bar{u}-c|^2}$$

Puisque $|\bar{u}-c|^2 \geq c_1^2$, ce qui est évident, et puisque

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d\chi}{dy} \right|^2 dy \geq 0,$$

on obtient: $(\alpha c_1)^2 \leq \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_{\max}^2$ (2.8a)

Dans notre cas,

$$\bar{u}(y) = \text{sech}^2 y.$$

Pour trouver le maximum de $\frac{d\bar{u}}{dy}$, on trouve les racines de $\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} = 0$. On obtient ainsi:

$$\left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_{\max}^2 = \frac{4 \sinh^2 y_{\max}}{(1 + \sinh^2 y_{\max})^3} = \frac{16}{27}$$

D'où on a que: $\alpha c_1^2 \leq 16/27 \approx 0.5926$ (2.8b)

(1) Par la suite, * dénote la conjugaison complexe.

Tung a écrit dernièrement (1981) un article sur l'instabilité barotrope des courants zonaux. Le courant zonal est considéré comme étant continu et peut être monotone ou non monotone. Il peut avoir un ou plusieurs points d'inflexion (ceux-ci sont les racines de $d^2u/dy^2 - \beta = 0$ et les racines peuvent être de n'importe quel ordre. Il démontre aussi une condition suffisante pour avoir de l'instabilité dans ce genre de profil. Ces résultats complètent la condition de stabilité trouvée par Arnold, 1965. Cependant, toutes ces démonstrations ne concernent que $\beta > 0$. De plus, celles-ci étant très générales et les exemples étant absents, l'application de ces résultats est difficile.

2.3 Contrainte de Reynolds.

Pour calculer la discontinuité dans la contrainte de Reynolds, nous avons besoin du comportement local de la fonction ϕ , c.-à-d. autour du point $\bar{u}=c$. Nous voulons calculer cette discontinuité pour nous aider à comprendre quelle est la nature de la fonction autour du point critique, en particulier la fonction représentant la frontière de stabilité neutre déjà mentionnée. Pour $\bar{u}'_c \neq 0$, nous savons que la formule évaluant la discontinuité de la contrainte de Reynolds est donnée par

$$\Upsilon(y_c^+) - \Upsilon(y_c^-) = \alpha \frac{\pi}{2} \left(\frac{\bar{u}''_c - \beta}{|\bar{u}'_c|} \right) |\phi_c|^2 \quad (2) \quad (2.9)$$

Le résultat pour $\beta=0$ a été démontré en premier par Tollmien. Mais lorsque $u'_c=0$ et qu'à ce moment $c_r=1$, la situation est telle qu'il faut trouver une autre formule afin d'évaluer la discontinuité en question. Il est facile de s'en convaincre lorsqu'on consulte la démonstration avec laquelle le résultat (2.9) a été obtenu.

— Considérons maintenant la valeur de $d\Upsilon/dy$ et $[\Upsilon]$ sous forme d'intégrale ($u'_c=0, c_r=1$) (ici $[\]$ désigne la discontinuité).

Nous avons :

$$\frac{d\Upsilon}{dy} = \frac{1}{2} \alpha c_i \frac{(\bar{u}'' - \beta)}{|\bar{u} - c|^2} |\phi|^2 e^{2\alpha c_i t} \quad (2.10)$$

$$\text{Alors,} \quad [\Upsilon] = \frac{1}{2} \alpha \int_{-\delta}^{\delta} |\phi|^2 \frac{(\bar{u}'' - \beta) c_i dy}{(u - c_r)^2 + c_i^2} \quad (2.11)$$

(δ petit).

(2) Le prime dénote ici la différentiation par rapport à y .

En utilisant le changement de variable $z = \tanh y$, $dz = (1-z^2)dy$, on obtient:

$$= \frac{1}{2\alpha} \int_{-\delta}^{\delta} c_i |\phi|^2 \frac{(4z^2 - 2(1-z^2) - \beta / (1-z^2))}{z^4 + c_i^2} dz \quad (2.12)$$

Cette intégrale n'est pas triviale et de plus, nous ne savons pas si ϕ est régulier au point critique.

Maintenant, calculons $\phi(y)$ autour du point $y=y_0$ et $c=1$.

Considérons l'équation de Rayleigh-Kuo et développons en série de Froebenius autour du point $y=0$. Alors

$$\phi = y^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n, \quad a_0 \neq 0. \quad (2.13)$$

Développons en série de Taylor autour de $y=0$; on obtient:

$$\bar{u} = (1-y^2/2 + 5y^4/24 - 61y^6/720 + \dots)^2 = (1-y^2 + 2y^4/3 - 17y^6/45 + \dots) \quad (2.14)$$

donc,
$$\bar{u}'' - \beta = -2 - \beta + 8y^2 - 34y^4/3 + \dots \quad (2.15)$$

L'équation différentielle devient:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s)(n+s-1) y^{n+s-2} - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^2 a_n y^{n+s} + \left(\frac{-2-\beta+8y^2-34y^4/3+\dots}{y^2} \right) \left(1+2y^2/3-17y^4/45+\dots \right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^{n+s} = 0$$

Lorsque $n=0$, on a:

$$a_0 s(s-1) y^{s-2} + (-2-\beta) a_0 y^{s-2} = 0.$$

L'équation indicielle devient: $s(s-1)=2+\beta$; donc

$$s_{1,2} = \frac{1 \pm (9+4\beta)^{\frac{1}{2}}}{2} ; s_1+s_2=(9+4\beta)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour $\beta=0$ ($\Delta s=3$), $\beta=-5/4$ ($\Delta s=2$), $\beta=-2$ ($\Delta s=1$), il y a possibilité d'avoir un terme logarithmique dans la solution. Donc, si $\beta \neq 0, -5/4, -2$:

$$\phi = A y^{s_1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \right) + B y^{s_2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n \right) \quad (2.16)$$

Il est très probable que B soit nul dans la plupart des cas.

Notons que pour la solution (2.16), un changement de phase pourrait se produire en traversant la couche critique.

Pour $\beta=-2$ et $c=1$, on peut montrer que ϕ est régulier:

$$\begin{aligned} \phi = A & \left[a_0 \left[y + \left(\frac{\alpha^2-8}{6} \right) y^3 + \left(\frac{(\alpha^2-8)^2}{120} - 5/6 \right) y^5 + \dots \right] \right] \\ & + B \left[b_0 + b_1 y + \left(\frac{\alpha^2-8}{2} \right) b_0 y^2 + \left(\frac{\alpha^2-8}{6} \right) b_1 y^3 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Par un choix approprié des constantes, on peut voir que ϕ pourrait être pair ou impair. Nous avons pris les valeurs de $\beta=-2$ et $c_r=1$ car au début de ce travail, on pensait que β et c_r prenaient ces valeurs sur la frontière de stabilité neutre. Plus tard (voir chapitre troisième), nous montrerons que β n'est pas toujours égal à -2 sur la frontière de stabilité neutre.

Maintenant, considérons le cas où $c_r \neq 1$, pour tout β . Alors

$\phi = c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2$ où $\phi_1 = a_0 x (1+c_1 x+c_2 x^3+\dots)$ où $x=y-y_c$; on a aussi:

$$c_1 = - \frac{2c(2-3c)-\beta}{4c(1-c)^{\frac{1}{2}}}$$

$$c_2 = \frac{\alpha^2}{6} + \left(\frac{2c(2-3c)-\beta}{2c(1-c)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \frac{1}{24c(1-c)^{\frac{1}{2}}} - \frac{24(c-1/3)c(1-c)+(2-3c)(2c(2-3c)-\beta)}{24c(1-c)}$$

$$\text{et } \phi_2 = k \left[\frac{-2c(2-3c)-\beta}{2c(1-c)^{\frac{1}{2}}} \ln x (x+c_1 x^2+c_2 x^3+\dots) + 1 + \frac{b_1}{b_0} x + \frac{b_2}{b_0} x^2+\dots \right]$$

Aussi,

$$2b_2 - \alpha^2 b_0 + b_0 \left[24(c-1/3)c(1-c)^{\frac{1}{2}} + \frac{2c(2-3c-\beta)(2-3c)}{2(1-c)^{\frac{1}{2}}} \right] / 2c(1-c)^{\frac{1}{2}} + b_1 \frac{2c(2-3c)-\beta}{2c(1-c)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

donne b_2/b_0 en terme de b_1/b_0 , etc... Calculons maintenant la discontinuité dans la contrainte de Reynolds. Donc $|\phi_1|^2 \sim (y-y_c)^2$ et $|\phi_2|^2 \sim ((y-y_c)\ln(y-y_c)+k)^2$. On a aussi dans ce cas

$$\frac{\bar{u}''_{c-\beta}}{|\bar{u}'_c|} \rightarrow \text{constante.}$$

$$\text{Par conséquent, } [\tau] = \alpha \frac{\pi}{2} \frac{\bar{u}''_{c-\beta}}{|\bar{u}'_c|} |\phi_c|^2 \sim$$

$$\sim \text{const. } (A(y-y_c)^2 + B((y-y_c)\ln(y-y_c) + k)^2)$$

Donc, en général, $[\tau] = \text{constante.}$

Etant donné que pour le profil $\bar{u} = \text{sech}^2 y$, nous avons deux discontinuités dans la contrainte de Reynolds égales mais de signe contraire, il s'ensuit que la somme des discontinuités est nulle comme cela doit être le cas car à $y = \pm \infty$ la contrainte de Reynolds est nulle. Jusqu'à présent, l'étude partielle faite sur la contrainte de Reynolds n'a pas conduit à l'élimination de solution, quelle qu'elle soit.

A l'aide des informations recueillies jusqu'à présent, nous allons maintenant passer aux calculs numériques et à l'analyse des résultats.

Chapitre troisième

EXPOSITION DES METHODES NUMERIQUES ET ANALYSE

DES RESULTATS NUMERIQUES

Dans ce chapitre, nous décrivons les méthodes numériques utilisées pour résoudre l'équation de Rayleigh-Kuo comme un problème aux valeurs propres $c(\alpha, \beta)$. La méthode la plus employée est celle de Runge-Kutta du quatrième ordre (méthode d'intégration). L'équation différentielle est du second ordre; ceci est équivalent à un système de deux équations du premier ordre. Le système d'équations à résoudre est à valeurs initiales. Nous effectuons l'intégration sur l'axe des réels ou dans le plan complexe. Puisque les résultats obtenus sont dans certaines régions différentes de ceux de Kuo, nous avons construit un autre programme utilisant une méthode de différences finies du second ordre seulement, servant à vérifier les résultats trouvés au préalable. Nous avons mis sur pied une dizaine de programmes différents, chacun pour un cas spécifique dépendant des valeurs de l'espace des paramètres en quatre dimensions α, β, c_1 et c_2 . Dans tous les programmes, on suppose que deux de ces quatre valeurs sont variables, et on garde les deux autres fixes; ensuite, on intègre des deux extrémités du domaine vers le centre $y=0$ (généralement sur la moitié du domaine pour les raisons justifiées précédemment). Nous avons une condition pour tester les valeurs des deux paramètres choisis comme étant libres. Pour la méthode de Runge-Kutta, cette condition est la valeur du wronskien au point central $y=0$. Celle-ci doit être nulle, afin que les

fonctions propres soient linéairement indépendantes. Si cette condition n'est pas satisfaite, on suppose une nouvelle valeur pour les deux paramètres choisis comme étant libres, et on poursuit le processus. Nous utilisons double précision dans tous les programmes.

Dans les pages qui suivent, nous expliquons plus en détail les différentes méthodes utilisées et on présente les résultats correspondants.

3.1 Méthode de Runge-Kutta (R-K) avec intégration sur l'axe réel.

Le domaine d'intégration s'étend de $-\infty$ à ∞ , ce qui théoriquement est très grand. Par conséquent, pour avoir des résultats plus précis, nous utilisons le changement de variable $z = \tanh y$ réduisant le domaine d'intégration de -1 à 1 . Cependant, cette transformation est singulière aux points de frontière, c.-à-d. 1 et -1 . Nous nous débarassons de cette difficulté en factorisant la singularité de l'équation différentielle et en intégrant sur le reste. Donc, soit $z = \tanh y$, alors

$$\frac{d\phi}{dy} = \frac{d\phi}{dz} \frac{dz}{dy} \quad \text{et} \quad \frac{d^2\phi}{dy^2} = \frac{d^2\phi}{dz^2} \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \frac{d\phi}{dz} \frac{d^2z}{dy^2};$$

on a aussi $dz/dy = \text{sech}^2 y = 1 - z^2$. L'équation de Rayleigh-Kuo devient:

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \frac{d\phi}{dz} \frac{d^2z}{dy^2} - \alpha^2 \phi = [(\bar{u}'' - \beta)/(\bar{u} - c)] \phi = 0 \quad (3.1)$$

()

$$\text{ou: } \boxed{\phi'' (1-z^2) - 2z\phi' - \frac{\alpha^2}{(1-z^2)}\phi - \frac{6z^2-2-\beta/(1-z^2)}{1-z^2-c}\phi = 0} \quad (3.2)$$

Considérons maintenant les conditions aux limites, tout d'abord en fonction de la variable y . Nous voulons seulement des solutions qui décroissent exponentiellement. Les conditions aux limites ont déjà été mentionnées au chapitre premier, mais rappelons les ici:

$$\phi \sim e^{\mp \alpha l_+ y} \quad y \rightarrow \pm \infty \quad (3.3a)$$

$$\phi' \sim \mp \alpha l_+ \phi \quad y \rightarrow \pm \infty \quad (3.4a)$$

$$\phi'' \sim (\alpha^2 + \beta/c) \phi \quad y \rightarrow \pm \infty \quad (3.5)$$

Si la variable indépendante est z au lieu de y , les deux premières conditions deviennent:

$$\begin{aligned} \phi \sim e^{\mp \alpha l_+ \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}} &= \exp \left(\ln \frac{1+z}{1-z} \right)^{\mp \frac{1}{2} \alpha l_+} \\ &= \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{\mp \frac{1}{2} \alpha l_+}, \quad z \rightarrow \pm 1 \end{aligned} \quad (3.3b)$$

car $y = \tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}, \quad -1 < z < 1$

$$\begin{aligned} \phi' \sim \mp \frac{1}{2} \alpha l_+ \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{\mp \frac{1}{2} \alpha l_+ - 1} \left[\frac{1}{1-z} + \frac{1+z}{(1-z)^2} \right] \\ = \mp \alpha l_+ \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{\mp \frac{1}{2} \alpha l_+} \frac{1}{(1-z)^2}, \quad z \rightarrow \pm 1 \end{aligned} \quad (3.4b)$$

L'équation (3.4b) nous montre clairement que la transformation $z = \tanh y$ est singulière. Pour se débarrasser de cette difficulté, on écrit

() $\phi(z) = F(z) \psi(z)$, où $\psi(z)$ sera la variable dépendante sur laquelle on va intégrer.

Plus précisément, écrivons $\phi^{\bar{z}}(z) = F^{\bar{z}}(z) \psi^{\bar{z}}(z)$. Soit:

$$F^{\bar{z}}(z) = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{\alpha \lambda_+ / 2} \quad (3.6)$$

alors:
$$\frac{dF^{\bar{z}}(z)}{dz} = \bar{z} \alpha \lambda_+ \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{\alpha \lambda_+ / 2} \frac{1}{1-z^2} \quad (3.7)$$

et
$$\frac{d^2 F^{\bar{z}}(z)}{dz^2} = \bar{z} \alpha \lambda_+ \frac{\alpha \lambda_+ / 2}{(1-z^2)^2} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{\alpha \lambda_+ / 2} [\bar{z} \alpha \lambda_+ + 2z] \quad (3.8)$$

L'équation (3.2) devient ainsi:

$$\left[\frac{d^2 F^{\bar{z}}}{dz^2} \psi^{\bar{z}} + 2 \frac{dF^{\bar{z}}}{dz} + F^{\bar{z}} \frac{d^2 \psi^{\bar{z}}}{dz^2} \right] (1-z^2) - 2 \left[\frac{dF^{\bar{z}}}{dz} \psi^{\bar{z}} + F^{\bar{z}} \frac{d\psi^{\bar{z}}}{dz} \right] z - \frac{\alpha^2}{(1-z^2)} F^{\bar{z}} \psi^{\bar{z}} - \frac{\alpha^2}{(1-z^2)} F^{\bar{z}} \psi^{\bar{z}} - \left(\frac{4z^2 - 2(1-z^2) - \beta}{1-z^2 - c} \right) F^{\bar{z}} \psi^{\bar{z}} = 0 \quad (3.9)$$

Dans le but de simplifier les calculs, on sépare le domaine en deux parties: $[-1, 0]$ et $[0, 1]$. Ceci nous permet de choisir une fonction $F(z)$ plus simple. Considérons tout d'abord les valeurs négatives de z . $F^n(z) \equiv (1+z)^{\alpha \lambda_+ / 2}$, où n désigne les valeurs négatives de z .

Ecrivons $\phi \equiv \xi(q(z))$ où $q(z) \equiv 1+z$; alors l'équation (3.2) devient:

$$\frac{d^2 \xi}{dq^2} q^2 (2-q^2) [q(2-q)-c] + \frac{d\xi}{dq} [2q(q(2-q)(q-1)(q(2-q)-c))] - \alpha^2 \xi (q(2-q)-c) - [4q(2-q)(q^2+1-2q) - 2q^2(2-q)^2 - \beta] \xi = 0 \quad (3.10)$$

Développant ξ en série de Froebenius, on a:

$$\xi(q) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k q^{k+s} ; \quad \frac{d\xi}{dq} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+s) A_k q^{k+s-1}$$

et
$$\frac{d^2\xi}{dq^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+s)(k+s-1) A_k q^{k+s-2}.$$

Utilisant ces dernières égalités dans l'équation (3.10), on trouve

successivement les A_k . L'équation indicielle nous apprend que

$s = \frac{1}{2}\alpha\lambda_+$ comme on s'y attendait d'ailleurs (voir équation (3.6)).

Soit $A_0 \neq 0$, alors:

$$A_1 = -A_0 \left[\frac{(2+c)\alpha^2\lambda_+^2 + c\alpha\lambda_+ - 8 - 2\alpha^2}{-4c\alpha\lambda_+ - 4c} \right]$$

et
$$A_2 = -\frac{A_1 [(8+4c)s^2 + (16+10c)s + 6c - 2\alpha^2] + A_0 [(-12-c)s^2 + (-4-c)s + 28 + \alpha^2]}{-16c(s+1)}$$

etc...

On a donc: $\xi^n(z) = F^n(z)\psi^n(z)$ et $\psi^n(z) = A_0 + A_1(1+z) + A_2(1+z)^2 + \dots$

$$\frac{d\psi^n(z)}{dz} = A_1 + 2A_2(1+z) + \dots$$

$$\frac{d^2\psi^n(z)}{dz^2} = 2A_2 + \dots$$

et les conditions aux limites deviennent:

$$\psi^n(-1) = A_0, \quad \frac{d\psi^n(-1)}{dz} = A_1, \quad \frac{d^2\psi^n(-1)}{dz^2} = 2A_2.$$

De même, pour les valeurs positives de z , $[0, 1]$, en mettant cette

fois-ci $q=1-z$, on obtient la même équation que, lorsque $q = 1+z$,

c.-à-d. l'équation (3.10) et:

$$\psi^p(z) = A_0 + A_1(1-z) + A_2(1-z^2) + \dots$$

où p désigne (z) pour les valeurs positives de z .

$$\frac{d\psi^P(z)}{dz} = -A_1 - 2A_2(1-z) + \dots$$

$$\frac{d^2\psi^P(z)}{dz^2} = 2A_2 + \dots \quad \text{et} \quad F^P(z) = (1-z)^{\frac{1}{2}\alpha\lambda_+}$$

Les conditions aux limites deviennent:

$$\psi^P(1) = A_0, \quad \frac{d\psi^P(1)}{dz} = -A_1 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\psi^P(1)}{dz^2} = 2A_2.$$

On intègre donc sur ψ^n de -1 jusqu'à zéro et sur ψ^P de 1 jusqu'à zéro.

Remarque: on effectue une itération sur deux paramètres si $c_1 \neq 0$ et sur un paramètre si $c_r > 1$ et $c_1 = 0$, ou si la fonction propre est régulière et $c_1 = 0$, parce qu'alors le problème est strictement réel. La valeur de test (le wronskien) doit être trouvé en terme de ψ .

Soit w ce wronskien:

$$w(\phi^P, \phi^n) = \phi^P \frac{d\phi^n}{dz} - \phi^n \frac{d\phi^P}{dz} \quad (3.11)$$

En terme de ψ^P et ψ^n , on obtient:

$$w(\phi^P, \phi^n) = (1-z^2)^s \left[\psi^P \frac{d\psi^n}{dz} - \psi^n \frac{d\psi^P}{dz} + \frac{\alpha\lambda_+}{1-z^2} \psi^P \psi^n \right] \quad (3.12)$$

Puisque le wronskien est évalué à $z=0$, on obtient

$$w[\phi^P(0), \phi^n(0)] = \psi^P(0) \frac{d\psi^n}{dz}(0) - \frac{d\psi^P}{dz}(0) \psi^n(0) + \alpha\lambda_+ \psi^P(0) \psi^n(0) \quad (3.13)$$

Etant donné que nous solutionnons un problème aux valeurs propres, nous avons une constante arbitraire. Nous avons choisi A_0 comme constante arbitraire.

La raison pour laquelle nous n'avons pas initialement utilisé les avantages dus à la symétrie du problème est la suivante: si par exemple la solution est singulière, nous ne pouvons pas dire à priori si celle-ci possède une symétrie quelconque. Si nous utilisons la symétrie, alors, on intègre seulement sur la moitié du domaine et le wronskien prend une forme plus simple. Nous sommes surtout intéressés par les modes pairs, car ceux-ci possèdent le plus grand taux de croissance (αc_1). Nous avons alors:

$$\phi^P(-z) = \phi^n(z) \quad \text{et} \quad \frac{d\phi^P(-z)}{dz} = -\frac{d\phi^n(z)}{dz}$$

d'où, à $z = 0$, on a:

$$\phi^P(0) = \phi^n(0)$$

$$\frac{d\phi^P(0)}{dz} = -\frac{d\phi^n(0)}{dz}$$

Il est aisé de montrer que les mêmes résultats s'appliquent pour ψ .

Le wronskien devient:

$$w(0) = \alpha \left[\psi^P(0) \right]^2 - 2\psi^P(0) \frac{d\psi^P(0)}{dz} \quad \text{si on intègre de } l \text{ à } 0.$$

Pour les modes impairs on a:

$$-\phi^P(-z) = \phi^n(z)$$

$$\frac{d\phi^P(-z)}{dz} = \frac{d\phi^n(z)}{dz}$$

et le wronskien est égal à $-w(0)$, où $w(0)$ est le wronskien dans le cas de modes pairs. Encore une fois, on obtient la même chose pour les ψ .

3.2 Méthode de Runge-Kutta avec intégration dans le plan complexe.

Considérons tout d'abord le cas où $c_x \neq 1$. Comme nous l'avons vu précédemment, dans le voisinage du point critique y_c , la solution générale de l'équation de Rayleigh-Kuo peut être obtenue par la méthode de Frobenius. Après avoir fait le développement de $\bar{u}-c$ et $\bar{u}''-\beta$ en série de Taylor autour de y_c , on obtient:

$$\phi = A\phi_A + B\phi_B \quad \text{où} \quad \phi_A = (y-y_c) + \frac{\bar{u}''-\beta}{\bar{u}'_c} \frac{(y-y_c)^2}{2} + \dots \quad (3.14)$$

$$\text{et} \quad \phi_B = 1 + \dots + \frac{\bar{u}''-\beta}{\bar{u}'_c} \phi_A \log(y-y_c) + \dots \quad (3.15)$$

La singularité logarithmique qui apparaît dans ϕ_B (équation (3.15)) est importante. Elle nous amène deux difficultés dans le cas d'un mode neutre ou d'un mode presque neutre. Tout d'abord, la vitesse horizontale de perturbation est proportionnelle à $d\phi/dy$ et cette quantité n'est pas bornée lorsque y tend vers y_c . En réalité, la viscosité atténue cet effet. Toutefois, des gradients élevés en \bar{u}' ont lieu et il s'ensuit que cette région est physiquement importante.

La deuxième difficulté concerne le problème aux valeurs propres. En suivant l'approche usuelle aux problèmes de points de rebroussement, on essaie de trouver une solution continue dans le plan complexe en suivant un contour passant au-dessus ou au-dessous du point singulier. Si ϕ_B est écrit sous la forme de l'équation (3.15) pour $y > y_c$, alors le terme $\log(y-y_c)$ doit s'écrire $\log|y-y_c| \pm i\pi$ lorsque $y < y_c$. On prend le signe plus ou moins dépendant que le contour passe au-dessus ou au-dessous de la singularité.

Dans le contexte de la théorie des modes normaux non visqueux, il est impossible de décider quelle est la branche du terme logarithmique. Considérons la limite non visqueuse de l'équation de Orr-Sommerfeld pour le cas où on inclut l'effet de la rotation:

$$(\bar{u}-c) \left[\frac{d^2 \phi}{dy^2} - \alpha^2 \phi \right] - (\bar{u}'' - \beta) \phi = \frac{1}{iRe} \left[\frac{d^4 \phi}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 \phi}{dy^2} + \alpha^4 \phi \right] \quad (3.16)$$

Re étant le nombre de Reynolds approprié. On peut montrer (C.C.Lin, 1955) en étudiant la couche critique ($\bar{u}=c$) à l'aide de variables "internes", que le signe moins est le bon choix pour $\frac{du_c}{dy} > 0$ et on dit qu'il y a un changement de phase de $-\pi$ lorsqu'on traverse l'axe des réels en venant du dessus (voir figure 6). Dans le cas d'un jet ou d'un sillage où l'on a plus qu'un point critique, Foote et Lin, 1950, affirment que l'on doit contourner la singularité par au-dessous du point critique dans la région où la dérivée de la vitesse de l'écoulement de base est positive, et par au-dessus si elle est négative.

Pour accroître la précision des résultats dans le cas où c_1 est petit ou égal à zéro, on intègre dans le plan complexe plutôt que sur l'axe réel. Etant donné qu'il est plus facile d'intégrer sur des contours lisses, nous avons choisi d'intégrer sur un arc de cercle qui passe par -1 et 0, et 0 et 1 (voir figure 7). Puisque $\bar{u}' = -2 \operatorname{sech}^2 y \times \tanh y$, ceci implique que $\bar{u}' < 0$ pour $y > 0$ et $\bar{u}' > 0$ pour $y < 0$ et le contour passe au-dessous de la singularité pour $y < 0$ et au-dessus pour $y > 0$. Le point singulier ($\bar{u}=c$) se trouve à $z = \pm (1-c)^{\frac{1}{2}}$.

On intègre de -1 à 0 , sur l'arc montré (fig.7) et de 1 à 0 sur l'autre arc. Puisque nous avons changé le contour d'intégration, il faut modifier le wronskien ainsi que les conditions aux limites. La variable dépendante devient $t=r\theta$, la longueur d'arc. Commençons par le wronskien. Considérons le demi-plan $x < 0$ avec les variables $(\tilde{z}, \tilde{\theta}, \tilde{t})$ où $\tilde{z} = -z_0 - re^{i\tilde{\theta}}$ et $\tilde{t} = r\tilde{\theta}$ = longueur d'arc où r est constant. Considérons aussi le demi-plan $x > 0$ avec les variables (z, θ, t) où $z = z_0 + re^{i\theta}$ et $t = r\theta$. Alors:

$$w[\phi_R(t), \phi_L(t)] = \phi_R(t) \frac{d\phi_L(t)}{dt} - \phi_L(t) \frac{d\phi_R(t)}{dt} \quad (3.17)$$

(Droite $\equiv R, x > 0$ et gauche $\equiv L, x < 0$). Soient

$$\phi_L(\tilde{t}) = (1+\tilde{z})\psi_L(\tilde{t}) \quad \text{et} \quad \phi_R(t) = (1-z)\psi_R(t);$$

alors:
$$w[\phi_R(t), \phi_L(\tilde{t})] = -\phi_R(t) \frac{d\phi_L(\tilde{t})}{d\tilde{t}} - \phi_L(\tilde{t}) \frac{d\phi_R(t)}{dt} \quad (3.18)$$

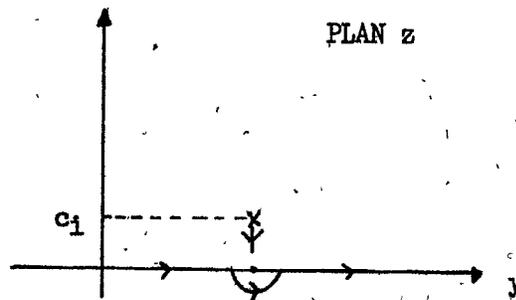


Fig.6 Contour d'intégration pour résoudre l'équation de Rayleigh-Kuo lorsque $u'_c > 0$.

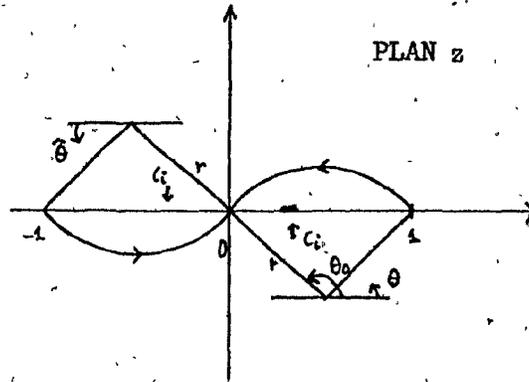


Fig.7 Intégration sur des arcs de cercle dans le plan complexe.

L'équation (3.18) devient:

$$= -(1-z)^s \Psi_R(t) \left[s(1+\tilde{z})^{s-1} \frac{d\tilde{z}}{dt} \Psi_L(\tilde{t}) + (1+\tilde{z})^s \frac{d\Psi_L(\tilde{t})}{dt} \right]$$

$$-(1+\tilde{z})^s \Psi_L(\tilde{t}) \left[-s(1-z)^{s-1} \frac{dz}{dt} + (1-z)^s \frac{d\Psi_R(t)}{dt} \right]$$

$$w \Big|_{\substack{z=0 \\ \theta=\theta_0}} = \left[-\Psi_R \frac{d\Psi_L}{d\tilde{t}} - \Psi_L \frac{d\Psi_R}{dt} + s\Psi_R \Psi_L \left[-\frac{d\tilde{z}}{dt} + \frac{dz}{dt} \right] \right] \Big|_{\substack{z=0 \\ \theta=\theta_0}}$$

Puisque $dz/dt = ie^{i\theta}$ et $d\tilde{z}/d\tilde{t} = -ie^{i\tilde{\theta}}$, on a:

$$w \Big|_{\substack{z=0 \\ \theta=\theta_0}} = \left[\Psi_R \frac{d\Psi_L}{d\tilde{t}} + \Psi_L \frac{d\Psi_R}{dt} \right] \Big|_{\substack{z=0 \\ \theta=\theta_0}} + s\Psi_R \Psi_L 2ie^{i\theta_0}$$

car $\tilde{\theta}=\theta$.

Considérons maintenant les conditions aux limites:

de 1 à 0:
$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dz} \frac{dz}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dz} i e^{i\theta}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{dz}{dt} \frac{d}{dz} \left(\frac{d}{dz} i e^{i\theta} \right) = -e^{2i\theta} \frac{d^2}{dz^2} - \frac{e^{i\theta}}{r} \frac{d}{dz}$$

De même, pour z de -1 à 0, on a:

$$\frac{d}{d\tilde{t}} = \frac{d}{d\tilde{z}} - i e^{i\tilde{\theta}} \quad \text{et} \quad \frac{d^2}{d\tilde{t}^2} = -e^{2i\tilde{\theta}} \frac{d^2}{d\tilde{z}^2} + \frac{e^{i\tilde{\theta}}}{r} \frac{d}{d\tilde{z}}$$

Les changements dans l'équation différentielle sont, de 1 à 0:

si $\frac{d^2}{dz^2} \psi_R = f(d\psi/dz, \psi)$, alors:

$$\frac{d^2}{dt^2} \psi_R = -e^{2i\theta} f(d\psi/dz, \psi) - \frac{e^{i\theta}}{r} \frac{d\psi}{dz}$$

ou, si l'on écrit le côté droit de l'égalité en fonction de la variable t,

on obtient:

$$\frac{d^2}{dt^2} \psi_R = -e^{2i\theta} f(-i e^{-i\theta} d\psi_R/dt, \psi) + \frac{i}{r} \frac{d\psi_R}{dt}$$

De même, de -1 à 0, on a:

si $\frac{d^2}{d\tilde{z}^2} \psi_L = g(d\psi/d\tilde{z}, \psi)$ alors:

$$\frac{d^2}{d\tilde{t}^2} \psi_L = -e^{2i\tilde{\theta}} g\left(\frac{d\psi}{d\tilde{t}} i e^{-i\tilde{\theta}}, \psi\right) + \frac{i}{r} \frac{d\psi_L}{d\tilde{t}}$$

Dans l'intégration numérique, le pas d'intégration est positif pour

$x > 0$, et aussi pour $x < 0$, car l'angle θ croît dans les deux cas.

Si la solution est régulière, la façon de faire contourner le chemin

d'intégration n'a pas d'importance car à ce moment là, il n'y a pas de changement de phase en traversant la couche critique. Dans le cas où c_r se rapproche de 1, les singularités approchent de plus en plus le point $z=0$. Pour garder la précision des calculs numériques assez grande, nous avons augmenté le nombre d'intervalles d'intégration dans la région avoisinant la singularité. Aussi, au lieu d'intégrer sur un arc de cercle, nous intégrons sur un demi-cercle, parce qu'à ce moment la pente du contour est infinie à $z=0$ et par conséquent on peut se rapprocher encore davantage de $z=0$ (voir fig.8). Nous discutons du mode $c_r=1$ plus tard. Dans la section suivante, nous exposons la méthode de différences finies qui sert à vérifier les résultats obtenus

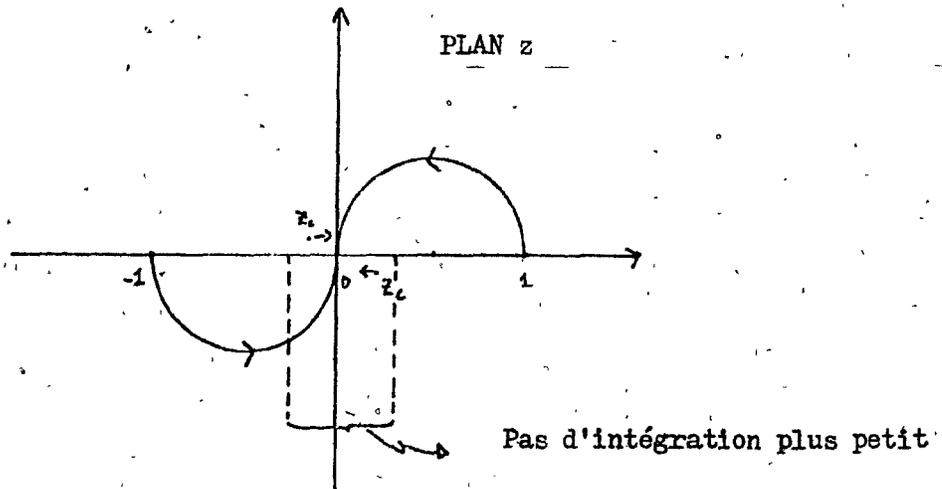


Fig.8. Intégration sur des demi-cercles dans le plan complexe.

3.3 Méthode de différences finies du deuxième ordre.

Lorsque nous étions en train de calculer les courbes $\alpha c_1 = \text{constant}$ dans le plan (α, β) suivant Kuo (voir figure 4), nous avons constaté que pour la partie inférieure du graphique les valeurs de αc_1 différaient considérablement de celles de Kuo (voir figures 4 et 9). Pour être certain que ces résultats n'étaient pas dus à la présence de modes indésirables dans la méthode R-K, on a mis au point une méthode aux différences finies du second ordre qui, cette fois, solutionne un problème aux limites et non un problème aux valeurs initiales. Un avantage de cette méthode est qu'elle se programme aisément. On intègre l'équation originale (1.2) sur l'axe des réels, étant donné que cette méthode a été mise sur pied pour vérifier les résultats obtenus précédemment. Le domaine d'intégration théorique est donc de $-\infty$ à ∞ . Numériquement, nous intégrons de -3 à 3 . Nous précisons pourquoi plus tard. On suppose que les fonctions propres sont paires et par conséquent, on intègre seulement sur la moitié du domaine (3 à 0). Ecrivons l'équation de Rayleigh-Kuo sous la forme suivante:

$$\frac{d^2 \phi}{dy^2} + Q(y) \phi = 0 \quad (3.20)$$

$$\text{tel que } Q(y) = -\alpha^2 - \frac{\bar{u}'' - \beta}{\bar{u} - c} = -\alpha^2 - \left[\frac{4 \operatorname{sech}^2 y \tanh^2 y - 2 \operatorname{sech}^4 y - \beta}{\operatorname{sech}^2 y - c} \right] \quad (3.21)$$

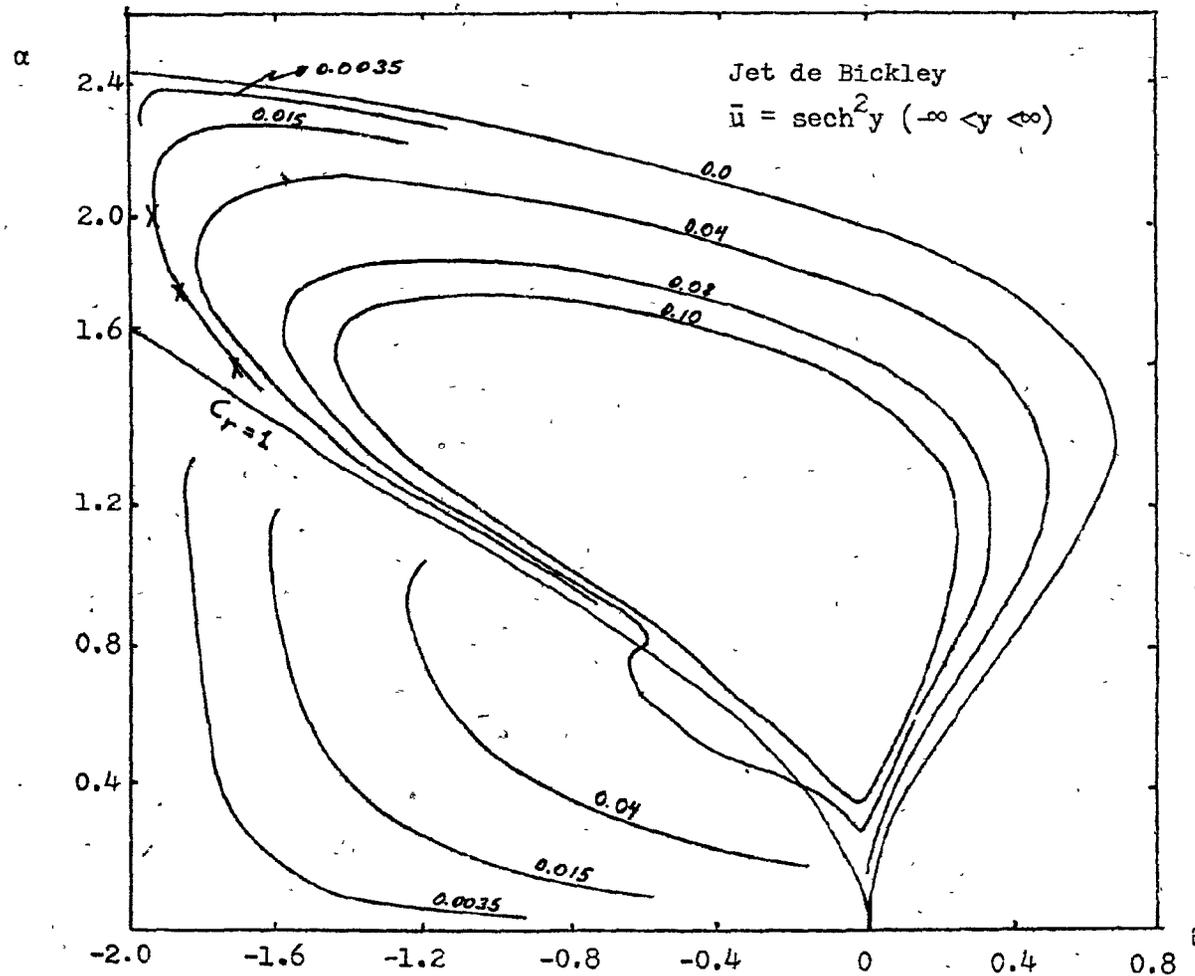


Fig. 9 Graphique de α en fonction de β . Les courbes tracées sont pour $\alpha c_1 = \text{const.}$

Les croix représentent des points par où passe la frontière neutre approximative.

La courbe $\alpha c_1 = 0$ est une frontière de stabilité et la courbe $c_r = 1$ est le "mode singulier similaire à une onde de Rossby".

Utilisant la différence centrée, on a:

$$\frac{d^2\phi}{dy^2} = \frac{\phi(y+h) - 2\phi(y) + \phi(y-h)}{h^2}$$

et l'équation (3.20) devient:

$$\phi(y+h) - 2\phi(y) + \phi(y-h) + h^2 Q(y) \phi(y) = 0$$

$$\text{ou } \phi_{n+1} + -2+h^2 Q(y_n)\phi + \phi_{n-1} = 0 \quad (3.22)$$

Soit $b_n = -2 + h^2 Q(y_n)$: Alors l'équation (3.22) devient:

$$\phi_{n+1} + b_n \phi_n + \phi_{n-1} = 0 \quad (3.24)$$

On dénote ϕ_0 la valeur de ϕ au point $y=3$ (limite de droite) et

ϕ_N la valeur de ϕ au point $y=0$ (limite de gauche). Considérons les conditions aux limites. Asymptotiquement ($y \rightarrow \infty$), $\phi \sim e^{-my}$ où

$m = (\alpha^2 + \beta/c)^{\frac{1}{2}}$ (voir section 1.1). Pour utiliser cette condition asymptotique à la limite $y=3$, $\bar{u}''(3)$ doit être négligeable par rapport à β et $\bar{u}(3)$ par rapport à c (voir la forme de $Q(y)$ à l'équation

(3.21)). Donc, si on considère $y=3$ comme étant assez grand pour satisfaire la condition précédente, on a $\phi_0 = e^{-m3}$ et $\phi_1 = e^{-m(3-h)}$. Pour

$n=1$, on a

$$\phi_2 + b_1 \phi_1 + \phi_0 = 0$$

qui devient:

$$\phi_2 + (b_1 + e^{-mh})\phi_1 = 0$$

Puisqu'il s'agit d'un problème aux valeurs propres, nous avons une constante arbitraire et nous choisissons comme deuxième condition aux limites : $\phi = 1+i$ au point $y=-h$ ou $\phi_{N+1} = 1+i$ au point $y=-h$.

Donc, si $\beta < 0$, la partie réelle de m sera positive et la partie imaginaire de m pour $c_1 > 0$ sera positive en choisissant le demi-plan supérieur comme feuillet de Riemann. Donc, si $c_1 \neq 0$, la condition aux limites sera de toujours avoir une fonction qui décroît exponentiellement. Utilisant cette méthode pour vérifier quelques uns de nos résultats choisis avec précaution, nous avons obtenu des valeurs en bon accord. Nous pouvons donc poursuivre nos calculs numériques.

Discutons maintenant les résultats numériques et décrivons la recherche de la frontière de stabilité neutre.

3.4 Résultats numériques et recherche de la frontière de stabilité neutre

Tout d'abord, rappelons nos buts principaux: premièrement trouver la frontière de stabilité neutre entre les points $(\alpha^2, \beta^-) = (6, -2)$, et $(\alpha^2, \beta) = (3, -2)$; deuxièmement, expliquer le comportement de la fonction singulière trouvée par Drazin et Howard (voir section 1.2). Nous allons discuter de ces objectifs dans les deux prochaines sections. Afin de satisfaire le premier but, nous voulions calculer les courbes de taux de croissance $(\alpha c_1) = \text{const.}$ Pour vérifier l'état du programme dont la description est donnée à la section 3.1, nous avons recalculé les courbes de c_r en fonction de α et de c_1 en fonction de α , pour $\beta=0$ (voir tableaux 1 et 2). Nous pouvions comparer ces résultats avec ceux publiés dans l'article écrit par Drazin et Howard, 1966. Nos résultats étaient en bon accord avec ceux-là sauf pour la valeur de $\alpha=0.05$ (mode pair). Probablement que les valeurs données dans cet article sont moins précises que les nôtres. La raison pour laquelle on voulait calculer des courbes $\alpha c_1 = \text{const.}$, est la suivante: l'idée que la frontière de stabilité neutre forme un coin ($\beta=-2$) ne nous semblait pas plausible. Pour essayer de trouver la frontière de stabilité neutre, nous avons calculé des courbes $\alpha c_1 = \text{const.}$ ($\alpha c_1 = 0.1, 0.08, 0.04, 0.015$ et 0.0035) où αc_1 était entre autres plus petit que celui calculé par Kuo ($\alpha c_1 = 0.015$ et 0.0035). La partie supérieure des courbes de αc_1 calculées par Kuo sont en bon accord avec les nôtres. Par contre, la partie inférieure

des courbes étaient très différentes (voir tableaux 5 à 9 et figure 9). Les courbes $\alpha c_1 \leq 0.08$, que nous avons calculées, présentent une partie incurvée vers l'extérieur (voir fig.9). Nous avons pu fermer les courbes seulement pour $\alpha c_1 \geq 0.08$. La difficulté est causée par le fait que α varie très lentement et aussi de la difficulté éprouvée pour deviner les valeurs servant à initier l'itération. Au-dessous de la courbe $c_r=1$ ("mode singulier similaire à une onde de Rossby", voir fig.9), on note l'existence d'ondes modifiées de Rossby. Kuo avait déjà noté cette existence (voir fig.4); cependant nous obtenons des valeurs de c_r qui sont plus ou moins différentes des siennes. Remarquons que dans cette région, nous avons aussi la présence de modes instables.

Retournons à la recherche de la frontière de stabilité neutre. Pour cela, rappelons que l'on voulait tout d'abord calculer des courbes avec αc_1 très petit dans le coin supérieur gauche du graphique de α en fonction de β ; cette opération nous permettait de nous guider dans la recherche de cette frontière. On a seulement réussi à trouver quelques points, l'initialisation de l'itération étant très difficile. A ce moment, nous avons décidé de calculer les ondes de Rossby modifiées pour β autour de -2 dans le coin supérieur gauche. On se déplaçait de droite à gauche et on itérait seulement sur un paramètre étant donné que $c_1=0$ (voir tableaux 3 et 4). A un moment donné, les paramètres ne convergeaient plus

et on concluait alors que la région d'instabilité était atteinte. En effet, nous avons continué les courbes pour $\alpha c_i = 0.015$ et $\alpha c_i = 0.0035$ et celles-ci se trouvaient bien à l'intérieur (et très proche) de la frontière approximative. Pour les valeurs numériques de cette frontière, veuillez consulter le tableau 3. Donc le mode singulier avec $c_r = 1$ ne sert pas de frontière de stabilité dans la région $-2 < \beta < -1.6$, comme on serait porté à le croire en consultant les résultats de Kuo à la figure 4. Notons cependant que ce n'est qu'au début (β aux environs de -2) que la frontière nulle trouvée par Kuo correspond au mode singulier $c_r = 1$.

Dans la prochaine section, nous allons surtout étudier le deuxième objectif mentionné au début de cette section.

3.5 Le mode singulier similaire à une onde de Rossby pour lequel $c_r=1$.

D'après les résultats numériques obtenus jusqu'à présent, il semblerait que la valeur de c_r pour la frontière de stabilité neutre soit autour de 1 et donc possiblement égal à un. Par ce fait, nous sommes intéressés à mettre au point un programme pour le cas où c_r est égal à un. Pour tester le programme, on sait que pour $c_r=1$ et $\beta=-\alpha^2(9-\alpha^2)/9$, on a le mode singulier

$$\phi = (\operatorname{sech} y)^{\alpha^2/3} (\tanh y)^{2-\alpha^2/3}.$$

Lorsque $c_r \neq 1$, nous avons deux singularités ($z = \pm (1-c)^{1/2}$) et le contour d'intégration passe au-dessus de l'une et au-dessous de l'autre, comme on a vu précédemment. Maintenant, pour $c_r=1$, nous n'avons plus qu'une singularité, à $z=0$, qui correspond à la singularité de la solution. Nous sommes donc forcés d'intégrer dans le plan complexe, car c'est à $z=0$ que l'on teste le choix adéquat des valeurs propres. Une question se pose: de quel côté doit-on contourner la singularité. Nous ne pouvons y répondre directement car cette fois $\frac{d\bar{u}}{dy}c = 0$ et dans ce cas, nous n'avons pas de formule toute prête à appliquer. Nous allons voir plus tard toutefois que ceci n'a pas d'importance, c.-à-d. qu'on peut soit intégrer au-dessus ou au-dessous de la singularité.

Examinons la méthode numérique. Le contour est un arc de cercle passant par -1 et 1 (voir fig.10, courbe continue si l'on intègre au-dessus de la singularité).

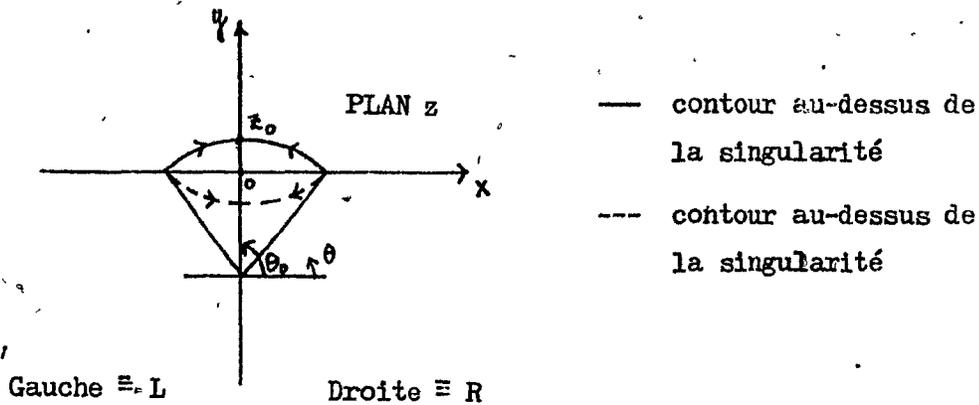


Fig. 10 Contour d'intégration dans le plan complexe lorsque $c_T=1$.

Considérons le contour d'intégration au-dessus de la singularité.

On a $z = r e^{i\theta}$ et $t = r\theta =$ longueur d'arc. Soient:

$$\phi_R(t) = F_R(z(t))\psi_R(t) \quad \text{et} \quad \phi_L(t) = F_L(z(t))\psi_L(t),$$

alors $w(\phi_R(t), \phi_L(t)) = \phi_R(t) \frac{d}{dt} \phi_L(t) - \phi_L(t) \frac{d}{dt} \phi_R(t)$

et $\frac{d\phi_R}{dt} = \psi_R(-s(1-z)^{s-1}ie^{i\theta}) + (1-z)^s \frac{d\psi_R}{dt}$

et $\frac{d\phi_L}{dt} = (1+z)^s \frac{d\psi_L}{dt} + \psi_L s(1+z)^{s-1}ie^{i\theta}$.

$$\text{Donc } w(\phi_R, \phi_L) = (1-z^2)^s \left[\psi_R \frac{d\psi_L}{dt} - \psi_L \frac{d\psi_R}{dt} + \frac{2s}{1-z^2} \psi_R \psi_L i e^{i\theta} \right]$$

$$\text{et } w(\phi_R, \phi_L) \Big|_{z=z_0} = (1-z_0^2)^s \left[\psi_R \frac{d\psi_L}{dt} - \psi_L \frac{d\psi_R}{dt} + \frac{2s}{1-z_0^2} \psi_R \psi_L i e^{i\theta} \right] \Big|_{\substack{z=z_0 \\ \theta=\theta_0}}$$

Les changements dans l'équation différentielle sont:

$$\text{si } \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{dz} \frac{dz}{dt} = i e^{i\theta} \frac{d\psi}{dz} \quad \text{et si } \frac{d^2\psi}{dz^2} = f(d\psi/dz, \psi),$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dt^2} &= f\left(\frac{d\psi}{dt} (-ie^{-i\theta}), \psi\right) \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{d\psi}{dt} \frac{dt}{dz} \frac{d^2z}{dt^2} \\ &= f\left(\frac{d\psi}{dt} (-ie^{-i\theta}), \psi\right) (-e^{i2\theta}) + \frac{i}{r} \frac{d\psi}{dt} \end{aligned}$$

Pour les conditions aux limites, on a:

$$\frac{d}{dt} = i e^{i\theta} \frac{d}{dz} \quad \text{et} \quad \frac{d^2}{dt^2} = -e^{2i\theta} \frac{d^2}{dz^2} - \frac{e^{i\theta}}{r} \frac{d}{dz}$$

Notons que cette fois-ci, h , le pas d'intégration change de signe lorsqu'on intègre de -1 à 0 et de 1 à 0 , car de -1 à 0 l'angle décroît et de 1 à 0 l'angle croît. Si on veut intégrer au-dessous de la singularité, il suffit de poser $\theta \rightarrow -\theta$ et le tour est joué.

Numériquement, pour le mode singulier avec $c_r=1$, on obtient $\phi_L^*(-z^*) = \phi_R(z)$ en intégrant au-dessus de la singularité. En intégrant au-dessous de la singularité, on obtient les mêmes valeurs propres et on a $\phi_L(-z) = \phi_R^*(z^*)$. L'explication est la suivante: on a $z = z_0 + r e^{i\theta}$ et sans perte de généralité, on peut mettre $z = \zeta = i e^{i\theta}$ (voir fig. 11). L'équation différentielle devient:

$$(1 - \zeta^2)^2 \frac{d^2\phi}{d\zeta^2} - 2\zeta(1 - \zeta^2) \frac{d\phi}{d\zeta} - \alpha^2\phi + \frac{\beta - \bar{u}''}{\bar{u} - 1} \phi = 0 \quad (3.25)$$

comme on a vu précédemment (avec $c=1$), et si $\zeta = i e^{i\theta}$ celle-ci devient:

$$0 = e^{-2i\theta} (1 + e^{2i\theta}) \left[\frac{d^2\phi}{d\theta^2} - i \frac{d\phi}{d\theta} \right] + 2i(1 + e^{2i\theta}) \frac{d\phi}{d\theta} - \alpha^2\phi + \frac{\beta - \bar{u}''}{\bar{u} - 1} \phi \quad (3.26)$$

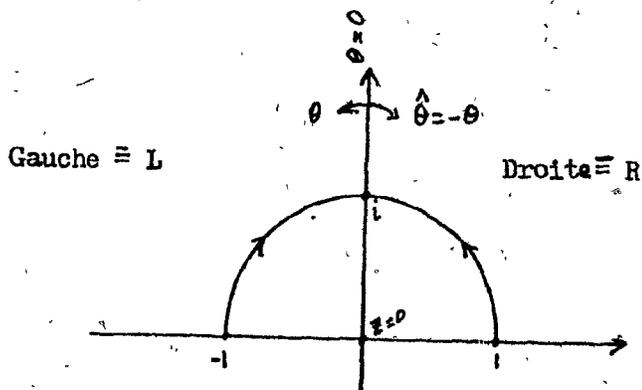


Fig. 11 Contour d'intégration où $z = \zeta = i e^{i\theta}$, ($c_r=1$).

Si dans l'équation (3.26) on remplace θ par $\hat{\theta} (= -\theta)$, on obtient:

$$0 = e^{2i\hat{\theta}} (1 + e^{-2i\hat{\theta}}) \left[\frac{d^2\phi}{d\hat{\theta}^2} + i \frac{d\phi}{d\hat{\theta}} \right] - 2i(1 + e^{-2i\hat{\theta}}) \frac{d\phi}{d\hat{\theta}} - \alpha^2\phi + \left[\frac{\beta - \bar{u}''}{\bar{u} - 1} \right] \phi \quad (3.27)$$

On peut voir que l'équation (3.27) est l'équation conjuguée complexe de (3.26) et on en conclut que:

$$\phi_L^*(\theta) = \phi_R(\bar{\theta}).$$

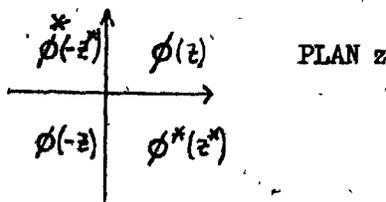
Donc ce résultat est dû au fait que c est réel et à la particularité du contour dans le plan complexe. Il s'ensuit que:

$$\phi_R(0) = \phi_L^*(0)$$

et par conséquent, le wronskien devient:

$$w[\phi_R, \phi_L] = -[\phi_R \phi_L' - \phi_R' \phi_L] = [\phi_L \phi_L'^* + \phi_L' \phi_L^*].$$

Ceci est une quantité réelle et la partie imaginaire du wronskien est donc identiquement nulle. Nous n'avons qu'une seule quantité pour tester la valeur des valeurs propres, mais ceci est suffisant car $c_1=0$ et étant donné que l'on intègre dans le plan complexe, les fonctions propres sont régulières. Schématiquement, on a:



On voit donc clairement que le fait d'intégrer au-dessus ou au-dessous de la singularité revient au même.

Pour le "mode singulier ($c_r=1$) similaire à une onde de Rossby" on se demande si celui-ci a bien sa place sur le graphe des modes pairs. La réponse n'est pas évidente. Pour une valeur $c(\alpha, \beta)$ complexe (β autour de -1.2 et c_i petit) et près du mode singulier $c_r=1$, nous avons constaté que les valeurs de la fonction propre n'étaient pas près de celles du mode singulier. Ceci nous porte à croire que la réponse à l'interrogation est non, mais que conclure si la fonction propre varie rapidement? D'un autre côté, dans la région où $-2 < \beta < 1.6$, le mode singulier ne joue pas le rôle de frontière de stabilité; de plus, ce mode traverse la courbe $\alpha c_i = 0.04$. On est donc amené à conclure que son rôle n'est pas important (du moins du point de vue de la stabilité) et qu'il joue un rôle plus important avec les ondes de Rossby modifiées. Notons que le nom donné à ce mode singulier n'est peut-être pas approprié étant donné que celui-ci possède une couche critique à $z=0$, alors qu'une onde de Rossby n'en possède pas. Notons que pour trouver la frontière de stabilité neutre au-dessous du mode singulier, nous n'avons pas pu nous servir de la même méthode que pour trouver la frontière de stabilité neutre au-dessus de celui-ci. En effet, on sait qu'il y a des ondes de Rossby modifiées dans la région au-dessous de la courbe $c_r=1$.

Si on étudie la couche critique en variables "internes" dans le cas où $c_r=1$, on obtient une équation différentielle plus compliquée que celle obtenue pour $u_c' \neq 0$. On a:

$$\text{Soient } \chi(\eta) = \phi(y) \quad \text{et} \quad \eta = (\alpha \text{Re})^{\frac{1}{4}} y;$$

alors l'équation différentielle est:

$$u_c'' \eta^2 \chi'' + (\beta - \bar{u}_c'') \chi = \chi \quad \text{IV}.$$

Pour pouvoir la solutionner, il faudrait faire des approximations simplificatrices. Si on néglige le second terme de l'équation précédente, on obtient une équation parabolique cylindrique qui a déjà été étudiée. Il faut aussi noter qu'en utilisant le programme qui fonctionne très bien pour $c_r=1$, chaque fois que nous essayons de trouver la frontière de stabilité neutre en posant $c_r=1$, les valeurs propres convergent vers celles du "mode singulier ($c_r=1$) similaire à une onde de Rossby". Donc, soit que $c_r \neq 1$ pour la frontière de stabilité neutre, ou qu'il y ait présence d'un phénomène inexpliqué.

La poursuite de la recherche sur ce projet exigerait une étude complète de la contrainte de Reynolds lorsque $\bar{u}_c' = 0$ ($c_r=1$), de l'équation de la couche critique en variables "internes" et de la façon de raccorder la solution de celle-ci à la solution de l'équation en variables "externes" valide en dehors de la couche critique. Numériquement, il faudrait compléter le graphique de la figure 9.

TABLEAU 1		
Modes pairs ($\beta=0.0$)		
α	c_r	c_i
0.05	0.04879	0.1660
0.2	0.1678	0.2566
0.3	0.2282	0.2667
0.4	0.2804	0.2631
0.8	0.4239	0.1984
1.0	0.4751	0.1590
1.5	0.5784	0.06849
1.9	0.6496	0.01151
2.0	0.6667	0.0

TABLEAU 2		
Modes impairs ($\beta=0.0$)		
α	c_r	c_i
0.1	0.8904	0.1034
0.2	0.8261	0.1209
0.4	0.7450	0.1075
0.8	0.7002	0.07436
1.0	0.6667	0.0

TABLEAU 3	
Frontière neutre approximative	
α	β
2.3	$-1.996 < \beta < -1.997$
2.0	$-1.944 < \beta < -1.945$
1.8	$-1.85 < \beta < -1.84$
1.6	$-1.705 < \beta < -1.703$

TABLEAU 4		
Ondes de Rossby modifiées		
α	β	c_r
2.3	-2.0	1.0025
2.3	-1.998	1.0015
2.3	-1.997	1.0011
2.0	-2.0	1.0230
2.0	-1.98	1.0235
2.0	-1.945	1.007
1.8	-1.944	1.0611
1.8	-1.87	1.0291
1.8	-1.86	1.0221
1.6	-1.75	1.0645
1.6	-1.71	1.0358
1.6	-1.705	1.0182

TABLEAU 5			
$\alpha c_1 = 0.10$			
α	β	c_r	c_1
0.35	-0.02655	0.3433	0.2857
0.36	-0.01203	0.2992	0.2778
0.36	-0.05450	0.4257	0.2778
0.4	-0.09730	0.5087	0.2500
0.43	-0.1274	0.5482	0.2326
0.5	-0.2045	0.6181	0.2000
0.6	-0.3197	0.6936	0.1667
0.7	-0.4204	0.7550	0.1429
0.76	-0.4814	0.7925	0.1316
0.80	-0.5276	0.8180	0.1250
0.86	-0.6050	0.8543	0.1163
1.13	-0.9969	0.9558	0.08850
1.42	-1.3467	0.9779	0.07042
1.5	-1.4091	0.9740	0.06667
1.6	-1.4529	0.9634	0.0625
1.7	-1.4323	0.9429	0.05882
1.76	-1.3446	0.9178	0.05682
1.79	-1.2113	0.8883	0.05587
1.77	-0.7600	0.7943	0.05650
1.75	-0.6459	0.7688	0.05714
1.6	-0.1571	0.6383	0.0625
1.46	0.07667	0.5470	0.06849
1.31	0.2058	0.4648	0.07634
0.9	0.2180	0.2980	0.1111
0.44	0.02948	0.2322	0.2273
0.4	0.01152	0.2500	0.2500
0.38	0.001332	0.2670	0.2631

TABLEAU 6			
$\alpha c_I = 0.08$			
α	β	c_r	c_i
1.8	-1.5686	0.9592	0.04444
1.88	-1.4251	0.9252	0.04255
1.9	-1.0885	0.8616	0.04211
1.83	-0.5967	0.7628	0.04372
1.62	0.005929	0.5988	0.04938
1.37	0.2854	0.4538	0.05839
0.8	0.2261	0.2310	0.1000
0.4	0.04183	0.1708	0.2000
0.285	-0.01109	0.2731	0.2807
0.295	-0.00266	0.2383	0.2712
0.29	-0.03289	0.3661	0.2759
0.33	-0.07075	0.4580	0.2424
0.43	-0.2448	0.6087	0.1860
0.58	-0.5213	0.7495	0.1379
0.66	-0.6035	0.7824	0.1212
0.74	-0.6479	0.8019	0.1081
0.81	-0.6143	0.8108	0.09877
0.84	-0.6038	0.8366	0.09524
0.92	-0.7103	0.8942	0.08696
0.98	-0.8018	0.9246	0.08696
1.03	-0.8793	0.9443	0.07767
1.09	-0.9717	0.9625	0.07334
1.15	-1.0699	0.9759	0.06957
1.21	-1.1487	0.9854	0.06957
1.29	-1.2570	0.9932	0.06202
1.49	-1.477	0.9951	0.05369
1.67	-1.5868	0.9815	0.04790

TABLEAU 7			
$\alpha c_1 = 0.04$			
α	β	c_r	c_i
1.05	-1.1971	0.9166	0.03810
1.0	-1.2543	0.9264	0.04
0.9	-1.2593	0.9286	0.044444
0.8	-1.2322	0.9252	0.05
0.67	-1.1688	0.9154	0.5970
0.48	-1.0059	0.8838	0.08333
0.4	-0.8950	0.8575	0.1
0.33	-0.7593	0.8191	0.1212
0.27	-0.5927	0.7603	0.1481
0.21	-0.3221	0.6223	0.1905
0.193	-0.1650	0.4963	0.2073
2.0	-1.8123	0.9852	0.02
1.8	-1.7989	1.0038	0.02222
1.66	-1.7181	1.0124	0.02410
1.52	-1.5957	1.0182	0.02632
1.43	-1.4972	1.0195	0.02797
1.34	-1.3847	1.0178	0.02985
1.26	-1.2741	1.0128	0.03175
1.18	-1.1552	1.0033	0.03400
0.94	-0.7633	0.9181	0.04255
0.165	0.0009561	0.1316	0.2424
0.4	0.07926	0.07917	0.1000
0.63	0.1979	0.1223	0.06349
1.0	0.4105	0.2271	0.04
1.32	0.4956	0.3558	0.03030
1.57	0.3851	0.4830	0.02548
1.82	-0.005486	0.6370	0.02198
1.9	-0.2190	0.6936	0.02105
2.0	-0.5774	0.7723	0.02000
2.1	-0.01141	0.8739	0.01950

TABLEAU 8			
$\alpha_i = 0.015$			
Partie supérieure de la courbe			
α	β	c_r	c_i
1.92	0.030719	0.6470	0.007813
2.24	-1.2446	0.8944	0.006696
2.2562	-1.3605	0.9118	0.006643
2.2798	-1.6002	0.9462	0.006579
2.2748	-1.8003	0.9741	0.006594
2.2321	-1.9018	0.9888	0.00672
2.2096	-1.9203	0.9920	0.006789
2.1545	-1.9400	0.9966	0.006970
2.1	-1.9434	0.995	0.007143
2.0	-1.9290	1.0039	0.0075
1.8	-1.8477	1.0130	0.008333
1.6	-1.6990	1.0220	0.009375
Partie inférieure de la courbe			
0.1	-0.6101	0.7646	0.15
0.122	-0.7785	0.8238	0.1230
0.16	-0.9707	0.8761	0.09375
0.21	-1.1301	0.9102	0.07143
0.32	-1.3257	0.9430	0.04688
0.46	-1.4549	0.9600	0.03261
0.6	-1.5308	0.9682	0.025
1.0	-1.6345	0.9762	0.015
1.15	-1.6376	0.9739	0.01304
1.2	-1.6191	0.9700	0.0125

TABLEAU 9			
$\alpha_1 = 0,0035$			
Partie supérieure de la courbe			
α	β	c_r	c_i
2.28	-1.280	0.8793	0.001535
2.36	-1.6022	0.9477	0.001483
2.38	-1.9355	0.9918	0.001470
2.37	-1.9580	0.9948	0.001477
2.30	-1.9870	0.993	0.001522
2.0	-1.9440	1.0063	0.001750
1.6	-1.7033	1.023	0.002188
Partie inférieure de la courbe			
0.035	-0.9325	0.8669	0.1
0.042	-1.04843	0.8938	0.0833
0.0758	-1.3388	0.9455	0.04617
0.1	-1.4405	0.9592	0.035
0.16	-1.5761	0.9743	0.02188
0.285	-1.6951	0.9849	0.01228
0.48	-1.7710	0.9902	0.007292
0.68	-1.8098	0.9925	0.005147
0.9	-1.8359	0.9936	0.003889
1.14	-1.8545	0.9939	0.003070
1.25	-1.8591	0.9931	0.0028
1.34	-1.8293	0.9864	0.002612

Appendice 1

CALCUL DES BORNES DE LA VITESSE DE PHASE

Soit $N(y) = \phi(y) / (\bar{u} - c)$ (I.1)

Si on utilise pour variable dépendante N au lieu de ϕ dans l'équation de Rayleigh-Kuo, on obtient:

$$\frac{d}{dy} \left[(\bar{u} - c)^2 \frac{dN}{dy} \right] - \alpha^2 N (\bar{u} - c)^2 + \beta N (\bar{u} - c) = 0 \quad (I.2)$$

avec les conditions aux limites $N = 0$ à $y = \pm \infty$. Si on multiplie l'équation (I.2) par N^* (* signifie le conjugué complexe) et on intègre l'équation sur y de $-\infty$ à ∞ . On obtient:

$$\int_{-\infty}^{\infty} N^* \frac{d}{dy} \left[(\bar{u} - c)^2 \frac{dN}{dy} \right] dy - \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 |N|^2 (\bar{u} - c)^2 dy + \int_{-\infty}^{\infty} \beta |N|^2 (\bar{u} - c) dy = 0 \quad (I.3)$$

Intégrant le premier terme par parties, on obtient:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\bar{u} - c)^2 \left[\left| \frac{dN}{dy} \right|^2 + \alpha^2 |N|^2 \right] dy = \beta \int_{-\infty}^{\infty} |N|^2 (\bar{u} - c) dy \quad (I.4)$$

Utilisant le fait que $(\bar{u} - c)^2 = (\bar{u} - c_r)^2 - c_i^2 - 2ic_i(\bar{u} - c_r)$, et prenant la partie imaginaire de l'équation (I.4), on a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2(\bar{u} - c_r) \left[\left| \frac{dN}{dy} \right|^2 + \alpha^2 |N|^2 \right] dy = \beta \int_{-\infty}^{\infty} |N|^2 dy \quad (I.5)$$

Sachant que N tend vers zéro lorsque y tend vers plus ou moins l'infini, nous pouvons prendre sa transformée de Fourier. Soient:

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} N_k e^{iky} \frac{dk}{2\pi}$$

et

$$N^* = \int_{-\infty}^{\infty} (N_{-k})^* e^{iky} \frac{dk}{2\pi}$$

On peut conclure que $N_k^* = (N_{-k})^*$. Etant donné que

$$\frac{dN}{dy} = \int_{-\infty}^{\infty} ik N_k e^{iky} \frac{dk}{2\pi}, \text{ alors}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{dN}{dy} \right|^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} -k k' N_k N_{-k'}^* e^{iky} e^{ik'y} \frac{dk dk'}{4\pi^2} dy \quad (I.6)$$

Puisque $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} dy/2\pi = \delta(k)$, l'équation (I.6) devient:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} -k k' N_k N_{-k'}^* \frac{dk dk'}{2\pi} \delta(k+k') = \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k^2}{2\pi} |N_k|^2 \geq 0$$

($\delta(x)$ est la fonctionnelle δ de Dirac).

D'autre part,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |N|^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} N_k e^{iky} \frac{dk}{2\pi} N_{-k'}^* e^{ik'y} \frac{dk'}{2\pi} dy = \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{|N_k|^2}{2\pi}$$

L'équation (I.5) peut être réécrite de la façon suivante:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{u} P dy = c_r \int_{-\infty}^{\infty} P dy + \beta/2 \int_{-\infty}^{\infty} J dy \quad (I.7)$$

où
$$P(y) = \left| \frac{dN}{dy} \right|^2 + \alpha^2 |N|^2$$

et
$$J(y) = |N|^2.$$

On a
$$\int_{-\infty}^{\infty} P dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} N_k^2 (k^2 + \alpha^2) \geq \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{|N_k|^2}{2\pi} \quad (I.8)$$

et
$$\int_{-\infty}^{\infty} J dy = \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{|N_k|^2}{2\pi}.$$

Alors
$$c_r = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \bar{u} P dy - (\beta/2) \int_{-\infty}^{\infty} J dy}{\int_{-\infty}^{\infty} P dy}.$$

On sait que :

$$\bar{u}_{\min} \int_{-\infty}^{\infty} P dy \leq \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u} P dy \leq \bar{u}_{\max} \int_{-\infty}^{\infty} P dy$$

et si l'on définit

$$\bar{u} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} u P dy}{\int_{-\infty}^{\infty} P dy}$$

alors,

$$\bar{u}_{\min} - \frac{\beta \int_{-\infty}^{\infty} J dy}{2 \int_{-\infty}^{\infty} P dy} \leq \left(c_r = \bar{u} - \frac{\beta \int_{-\infty}^{\infty} J dy}{2 \int_{-\infty}^{\infty} P dy} \right) < \bar{u}_{\max} - \frac{\beta \int_{-\infty}^{\infty} J dy}{2 \int_{-\infty}^{\infty} P dy}$$

Soit $(\int_{-\infty}^{\infty} J dy / \int_{-\infty}^{\infty} P dy) = 2K$, alors, d'après l'équation (I.8), on a

$$2K \leq \beta/\alpha^2 \quad \text{et} \quad \bar{u}_{\min} - \beta K \leq c_r \leq (\bar{u}_{\max} - \beta K)$$

Donc pour:

$$\beta > 0: \quad \bar{u}_{\min} - \beta/2\alpha^2 \leq c_r \leq \bar{u}_{\max}$$

$$\beta < 0: \quad \bar{u}_{\min} < c_r < \bar{u}_{\max} + |\beta|/2\alpha^2$$

Appendice II

CALCUL DU THEOREME DU DEMI-CERCLE MODIFIE

Considérons

$$0 \geq \int_{-\infty}^{\infty} dy (\bar{u} - \bar{u}_{\max})(\bar{u} - \bar{u}_{\min}) P = \int_{-\infty}^{\infty} dy \left\{ \bar{u}^2 P - (\bar{u}_{\max} + \bar{u}_{\min}) \bar{u} P + \bar{u}_{\max} \bar{u}_{\min} \right\}.$$

La partie réelle de l'équation (I.4) donne:

$$\int_{-\infty}^{\infty} ((\bar{u} - c_r)^2 - c_i^2) P dy = \beta \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{u} - c_r) dy;$$

soit encore:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}^2 P dy &= (-c_r^2 + c_i^2) \int_{-\infty}^{\infty} P dy + \beta \int_{-\infty}^{\infty} J \bar{u} dy \\ &\quad - \beta \int_{-\infty}^{\infty} J c_r dy + \int_{-\infty}^{\infty} 2 \bar{u} c_r P dy. \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (I.7), on obtient:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}^2 P dy = (c_r^2 + c_i^2) \int_{-\infty}^{\infty} P dy + \beta \int_{-\infty}^{\infty} J \bar{u} dy. \quad (\text{II.1})$$

Utilisant les équations (I.7) et (II.1), l'inégalité ci-dessus

devient:

$$\begin{aligned} 0 \geq & (c_r^2 + c_i^2) \int_{-\infty}^{\infty} P dy + \beta \int_{-\infty}^{\infty} J \bar{u} dy \\ & - (\bar{u}_{\max} + \bar{u}_{\min}) \left[c_r \int_{-\infty}^{\infty} P dy + (\beta/2) \int_{-\infty}^{\infty} J dy \right] \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_{\max} \bar{u}_{\min} P dy. \end{aligned}$$

Soit aussi:

$$\begin{aligned} 0 \geq & \left\{ c_r^2 - c_r(\bar{u}_{\max} + \bar{u}_{\min}) + c_i^2 + \bar{u}_{\max} \bar{u}_{\min} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} P dy \\ & + \beta \int_{-\infty}^{\infty} J dy \left[\bar{u} - \frac{1}{2}(\bar{u}_{\max} + \bar{u}_{\min}) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Pour $\beta > 0$, si on remplace \bar{u} par \bar{u}_{\min} , alors on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} J \, dy \left\{ \bar{u} - \frac{1}{2}(\bar{u}_{\max} + \bar{u}_{\min}) \right\} &\geq -\frac{1}{2}(\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}) \int_{-\infty}^{\infty} J \, dy \geq \\ &\geq -\frac{1}{2} \frac{(\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min})}{\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} P \, dy. \end{aligned}$$

Utilisant ce résultat dans l'équation (II.2), divisant par $\int_{-\infty}^{\infty} P \, dy$ et réarrangeant les termes, on obtient:

$$\left(\frac{\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}}{2} \right)^2 + \frac{\beta}{\alpha^2} \left(\frac{\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}}{2} \right) \geq \left(c_r - \frac{\bar{u}_{\max} + \bar{u}_{\min}}{2} \right)^2 + c_i^2 \quad (\text{II.3})$$

Pour $\beta < 0$, on remplace \bar{u} par \bar{u}_{\max} . On a alors:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} J \, dy \left\{ \bar{u} - \frac{1}{2}(\bar{u}_{\max} + \bar{u}_{\min}) \right\} &\leq \frac{1}{2}(\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}) \int_{-\infty}^{\infty} J \, dy \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{(\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min})}{\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} P \, dy \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

L'équation (II.2) devient:

$$|\beta| \int_{-\infty}^{\infty} J \, dy \left\{ \bar{u} - \frac{1}{2}(\bar{u}_{\max} + \bar{u}_{\min}) \right\} \geq \left\{ c_r^2 - c_r(\bar{u}_{\max} + \bar{u}_{\min}) + c_i^2 + \bar{u}_{\max} \bar{u}_{\min} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} P \, dy$$

Utilisant l'inégalité (II.4) dans l'équation précédente, on obtient:

$$\begin{aligned} |\beta| \left(\frac{\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}}{2 \alpha^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} P \, dy &\geq |\beta| \int_{-\infty}^{\infty} J \, dy \left\{ \bar{u} - \frac{1}{2}(\bar{u}_{\max} + \bar{u}_{\min}) \right\} \geq \\ &\geq \left\{ c_r^2 - c_r(\bar{u}_{\max} + \bar{u}_{\min}) + c_i^2 + \bar{u}_{\max} \bar{u}_{\min} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} P \, dy \end{aligned}$$

Divisant cette équation par $\int_{-\infty}^{\infty} P \, dy$, on voit que l'on obtient la même équation que lorsque $\beta > 0$. Il suffit donc de remplacer β par la

valeur absolue de β dans l'équation (II.3) pour obtenir le demi-cercle
modifié valide pour tout β .

BIBLIOGRAPHIE

- Betchov R., Criminale W.O., 1967 : Stability of Parallel Flows, Academic Press, New York, 330 p.
- Butkov E., 1968: Mathematical Physics, Addison-Wesley, 735 p.
- Carrier G., Krook M., Pearson C., 1966: Functions of a Complex Variable: Theory and Technique, Mc Graw-Hill, New York, 448p.
- Dickinson R.E., Clare F.J., 1973: Numerical study of the unstable modes of a hyperbolic tangent barotropic shear flow. J.Atmos.Sci., 30,1035
- Drazin P.G., Howard L.N., 1966: Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid. Adv.Appl.Mech., 9, 1.
- Foote J.R., Lin C.C., 1950: Some recent investigations in the theory of hydrodynamic stability. Quart.Appl. Math., 8, 265
- Haltiner G.J., Williams R.T., 1980: Numerical Prediction and Dynamic Meteorology. John Wiley And Sons, 447 p.
- Howard L.N., 1961: Note on a paper of John W. Miles, J.Fluid Mech., 10,509.
- Howard L.N., Drazin P.G., 1964: On instability of parallel flow of inviscid fluid in a rotating system with variable Coriolis parameter. J.Math.Phys., 43, 89.
- Johnson L.W., Riess R.D., 1977: Numerical Analysis. Addison-Wesley, 370 p.
- Kuo H.L., 1949: Dynamical instability of two-dimensional nondivergent flow in a barotropic atmosphere. J.Meteor., 6, 105.
- Kuo H.L., 1973: Dynamics of quasi-geostrophic flows and instability theory. Adv.Appl.Mech., 13, 247.
- Lin C.C., 1955: The Theory of Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press, 155 p.
- Lipps F.B., 1962: The barotropic stability of mean winds in the atmosphere. J.Fluid Mech., 12,397.
- Maslowe S.A., 1981: Hydrodynamic instabilities and the transition to turbulence. Topics in Applied Physics. Springer-Verlag, 45, 181.

- Mathews J., Walker R.L., 1970: Mathematical Methods of Physics.
Benjamin/Cummings, 501 p.
- Morse P.M., Feshbach H., 1953: Methods of theoretical Physics (2 vols.).
Mc Graw-Hill , New York
- Pedlosky J., 1963: Baroclinic instability in two layer systems.
Tellus., 15,20
- Pedlosky J., 1979: Geophysical Fluid Dynamics. Springer- Verlag, New York
624 p.
- Spiegel R.M., 1968: Mathematical Handbook of Formulas and Tables.
Mc Graw-Hill, 271 p.
- Tung K.K., 1981: Barotropic instability of zonal flow. J.Atmos.Sci., 38, 308.
- Whitham G.B., 1974: Linear and Nonlinear Waves. Wiley Interscience
New york, 636 p.