

Étude du plus long chemin dans les réseaux Apolloniens aléatoires et les arbres ternaires

LEFEBVRE DE LABOULAYE Guillaume



School of Computer Science

McGill University, Montreal

March, 2016

A thesis submitted to the Faculty of Graduate Studies and Research in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science.

© Guillaume Lefebvre de Laboulaye, 2016

Résumé

Les *Réseaux apolloniens aléatoires* sont des graphes planaires aléatoires, formés à partir d'un triangle, en divisant à chaque étape un triangle choisi au hasard en trois plus petits. On peut leur associer des arbres ternaires aléatoires. Plusieurs de leurs propriétés ont déjà été établies, nous nous penchons ici sur le plus long chemin simple réalisable dans un tel graphe. Nous montrons en particulier plusieurs propriétés sur sa structure, et conjecturons qu'il est, en probabilité, de taille comparable au plus grand sous-arbre binaire de l'arbre ternaire associé.

Abstract

Random Apollonian Networks are random planar graphs that are built from a given triangle by dividing, at each step, a randomly chosen triangle into three new smaller ones. We can associate the result with a random ternary tree. Several of its properties have been studied in the literature, but one, in particular, has escaped detailed analysis thus far: the length of the longest simple path. We prove several of the structural properties of Apollonian trees and of the longest path, and conjecture that the length of the longest path is asymptotically comparable to the size of the biggest binary subtree of the ternary tree.

Remerciements

Je tiens à remercier Luc Devroye, pour avoir accepté de me superviser, et pour son aide précieuse tout au long de ma recherche. Ce mémoire ne serait pas ce qu'il est sans lui.

Je remercie également le correcteur, Claude Crépeau, pour ses remarques qui m'ont permis d'améliorer ce texte.

Je remercie enfin Pauline et Elisa pour leur soutien et la motivation qu'elles ont su m'apporter.

Sommaire

1	Introduction, définitions et travaux précédents	5
1.1	Définitions préliminaires et notations	5
1.2	Travaux précédents	7
2	Plus long chemin dans un RAN	10
2.1	Lien entre chemin et arbre T^Δ	10
2.2	Borne inférieure	11
2.3	Première amélioration de la borne supérieure : 7 petits-enfants maximum .	13
2.4	Différents types de triangle, réserve, lien entre les nœuds à 1 enfant et ceux à 3 enfants	14
2.5	T_P^Δ et sous-arbres binaires : exemple d'un chemin beaucoup plus grand que tout sous-arbre binaire	20
3	Arbre T^ν, numérotation des nœuds et formule générale pour les arêtes	23
3.1	Définition	23
3.2	Numérotation des triangles et des nœuds	24
4	Plus long chemin dans un arbre ternaire avec liens supplémentaires	27
4.1	Définitions, et complétion de l'arbre	27
4.2	Arbres faisables et chemins dans T^{3c}	28
4.3	Structure des chemins maximaux	36
4.4	Généralisation aux arbres de degré d	41
5	Conclusion	41

1 Introduction, définitions et travaux précédents

Depuis quelques années, la recherche dans plusieurs domaines en est venue à s'intéresser à des réseaux de grande taille. On peut ainsi citer l'étude des réseaux sociaux, du graphe du web (dans lequel chaque page est un nœud, et les liens entre elles forment les arêtes), d'Internet ou encore des réseaux biologiques. De nombreux chercheurs ont donc tenté de les modéliser par des objets mathématiques aux propriétés similaires, en particulier dont les degrés soient répartis selon une loi de puissance (réseaux *invariants d'échelle*) et avec un effet *small-world*, c'est-à-dire où la distance moyenne entre deux des n nœuds est proportionnelle à $\log n$. La revue [3] et le livre [5] regroupent ainsi plusieurs modèles efficaces. Cependant, pour des raisons de clarté, il peut être utile d'utiliser un modèle planaire. C'est pour cela qu'ont été créés (dans [13]) les *Réseaux apolloniens Aléatoires*, que nous étudions ici. Le terme de réseau Apollonien vient d'Apollonius de Perga, qui a travaillé en particulier sur les sections coniques. Les études précédentes ont déjà prouvé plusieurs de leurs caractéristiques, qui en font de bons modèles de réseaux réels. Nous nous penchons ici sur un de leurs aspects pas encore totalement connus, le plus long chemin réalisable dans un tel graphe. Nous tentons ici d'en déterminer la structure, et d'améliorer ses bornes inférieure et supérieure connues.

1.1 Définitions préliminaires et notations

Avant de décrire les résultats précédents, on donne ici quelques définitions. On définit d'abord les *réseaux Apolloniens* : on considère un triangle dans le plan. A chaque étape, on choisit une face, c'est-à-dire un triangle élémentaire, sans aucun point à l'intérieur, et on y place un point. On relie celui-ci aux trois sommets du triangle. Après t étapes, on obtient un graphe à $n = t + 3$ sommets, reliés par $3n - 6$ arêtes, formant $m = 2n - 5$ faces (triangles élémentaires, non subdivisés). C'est donc un graphe planaire maximal. Par exemple, les graphes complets de taille 3 et 4 sont des réseaux Apolloniens.

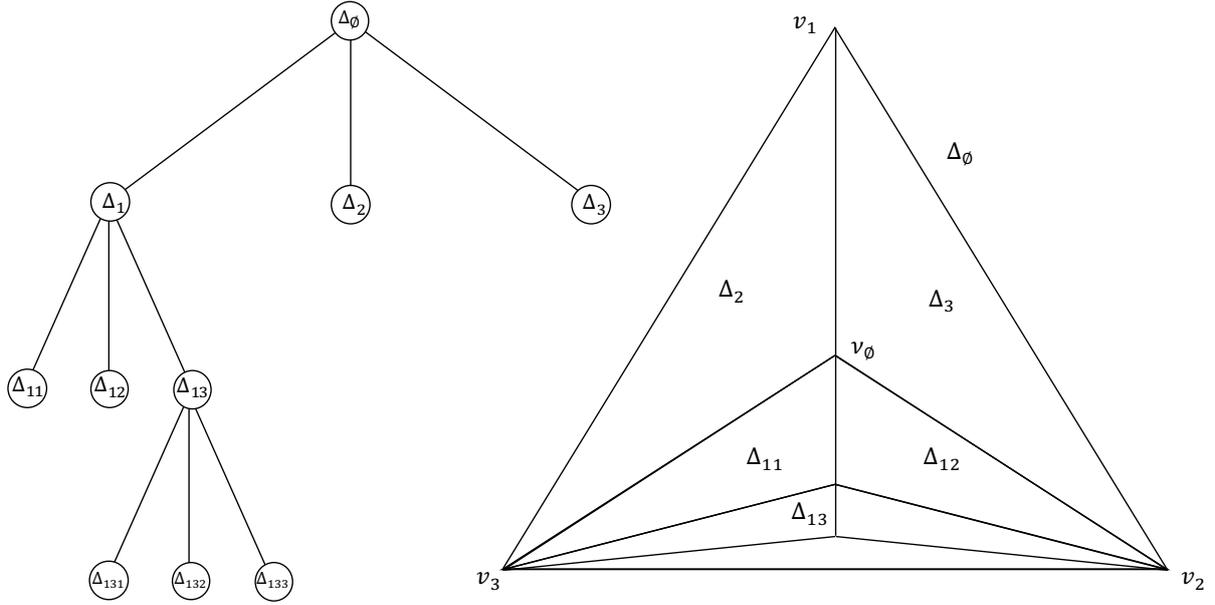


FIGURE 1 – Exemple de réseau apollonien à 6 nœuds, et son Δ -arbre associé

On peut maintenant, à chaque étape, choisir le triangle à subdiviser aléatoirement, uniformément parmi les triangles pas encore divisés. Le résultat est appelé *Réseau apollonien aléatoire* (RAN, pour l'anglais *Random Apollonian Network*). On le notera ici G_n .

Plusieurs auteurs ayant utilisé ces graphes utilisent pour leurs démonstrations une bijection entre les RAN et les arbres ternaires, que nous allons présenter ici avec quelques définitions. Soit G_n un réseau Apollonien de taille $n \geq 3$. On appelle v_1, v_2 et v_3 les trois sommets du triangle initial Δ_\emptyset . Les trois triangles issus de la première division de celui-ci seront notés Δ_1, Δ_2 et Δ_3 , avec Δ_i situé en face de v_i (donc, des trois nouveaux triangles, Δ_i est le seul qui ne contienne pas v_i). Le point au centre de Δ_\emptyset sera noté v_\emptyset . Etant donné un chemin P dans G , on notera $L(P)$ sa longueur (en arêtes). On notera encore \mathcal{L}_n la longueur maximale d'un chemin dans ce graphe.

On définit un arbre ternaire enraciné T_n^Δ , ou T^Δ , appelé Δ -arbre de G_n , comme suit. Il y a une bijection entre les nœuds de T^Δ et les triangles (y compris ceux qui ont été subdivisés) de G_n . A chaque triangle Δ de G_n , correspond un nœud μ^Δ de T^Δ . On construit T^Δ de la façon suivante : on commence avec la racine, qui correspond à Δ_\emptyset . A chaque étape, quand on divise Δ en Δ_1, Δ_2 et Δ_3 , on ajoute leurs nœuds correspondants

μ^{Δ_1} , μ^{Δ_2} et μ^{Δ_3} comme enfants de μ^Δ de façon naturelle. Notons que, pour l’instant, l’ordre des enfants d’un nœud n’est pas vraiment considéré, car il n’y a pas d’ordre clair entre Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 . Chaque nœud de T^Δ a donc zéro ou trois enfants, et T^Δ possède $3n - 8$ nœuds et $2n - 5$ feuilles. Ces feuilles correspondent aux m faces de G , c’est-à-dire aux triangles non encore subdivisés. On utilisera généralement le terme « sommet » pour les nœuds de G , et « nœud » pour ceux de T^Δ . La *profondeur* d’un triangle Δ ou du nœud μ^Δ , correspond à la distance de μ^Δ à la racine. De façon naturelle, on parlera des enfants, parents, descendants et ancêtres d’un triangle Δ de G_n pour désigner les triangles correspondant aux enfants, parents, descendants et ancêtres de μ^Δ . On utilisera abusivement G pour G_n et T^Δ pour T_n^Δ quand il n’y aura pas de confusion possible. Voir la figure 1 pour un exemple de réseau Apollonien.

On remarque que l’on peut aussi définir un RAN à partir de son arbre associé T^Δ . Ainsi, si on génère aléatoirement des arbres ternaires où tous les nœuds ont zéro ou trois enfants, on obtient une façon alternative de générer un graphe Apollonien aléatoire, que l’on pourrait étudier au même titre, et qui n’aurait pas nécessairement les mêmes propriétés. On pourrait ainsi générer un arbre de Galton-Watson à $3n - 8$ nœuds, dont tous les nœuds ont zéro ou trois enfants, uniformément parmi tous les tels arbres. A chacun de ces arbres est associé un réseau Apollonien, et la distribution obtenue diffère de celle des RAN.

1.2 Travaux précédents

Apollonius de Perga a énoncé le problème du remplissage de l’espace par des disques, dont les *cercles d’Apollonius*, ou *baderne d’Apollonius*, sont la solution classique : on commence avec trois disques tangents deux à deux. A chaque étape, pour tout nouveau triplet de disques tangents entre eux, on crée un nouveau disque dans l’espace qui les sépare, lui-même tangent aux membres du triplet. En considérant comme sommets les centres des disques, reliés entre eux si les disques sont tangents, on obtient un *réseau Apollonien*, dans une version déterministe, dans laquelle tous les triangles d’un même niveau

sont subdivisés le même nombre de fois. Celle-ci a été en particulier définie et étudiée indépendamment dans [2] et [8]. [2] et [8] prouvent en particulier plusieurs propriétés des réseaux Apolloniens les rapprochant de graphes réels : ils sont ainsi invariants d'échelle (*scale-free*), de type *small-world*, ils couvrent l'espace (avec les disques). Ils présentent en outre une loi de puissance des degrés des sommets dans le graphe et un grand coefficient de clustering, comme de nombreux réseaux réels.

La version aléatoire a été définie par Zhou et al. dans [13] en 2005. [13] et [11] énoncent les premières propriétés de ces graphes : la loi de puissance des degrés des sommets dans le graphe, un grand coefficient de clustering, et la distance moyenne entre les sommets. Ces résultats sont généralisés pour des graphes Apolloniens aléatoires en dimensions supérieures dans [12]. Frieze et Tsourakakis [10] prouvent formellement que, presque certainement¹, la répartition des degrés suit une loi de distribution de puissance de degré 3 :

Théorème 1.1. *Soit $Z_k(t)$ le nombre de sommets de degré k dans G_n après un temps $t = n - 3$. Alors, pour t assez grand et $k \geq 3$, il existe une constante $b_k = \frac{24}{k(k+1)(k+2)}$ telle que*

$$|\mathbb{E}[Z_k(t)] - b_k t| \leq K,$$

avec $K = 3,6$. En outre,

$$\mathbb{P}[|Z_k(t) - \mathbb{E}[Z_k(t)]| \geq 10\sqrt{t \log t}] = o(1).$$

Ils prouvent encore que le diamètre $d(G_n)$ du graphe G_n a une croissance logarithmique : $d(G_n) \leq \rho \log(n)$, où $\rho = 1/\eta$ et η est l'unique solution supérieure à 1 de $\eta - 1 - \log \eta = \log 3$. Ils utilisent pour cela une bijection entre les RAN et les arbres ternaires aléatoires, et un résultat de Broutin et Devroye sur la profondeur de ceux-ci [4].

1. Par définition, une propriété A_t est vraie *presque certainement* (p.c.) si $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_t) = 1$. De même, une variable aléatoire $X(n)$ est presque certainement $o(f(n))$ si, pour tout $\epsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X(n) < \epsilon \times f(n)] = 1$. O , Θ , Ω p.c. sont définis de la même façon. $X(n)$ est *presque certainement asymptotiquement égale* à $f(n)$ si, presque certainement, $X(n) \in (1 + o(1))f(n)$

Ils prouvent en outre de nouvelles propriétés concernant les k degrés les plus élevés dans un RAN, et les k plus grandes valeurs propres de la matrice d'adjacence de G_n , pour k fixé. Ils conjecturent entre autres qu'avec forte probabilité, un RAN n'est pas hamiltonien, mais possède un chemin de longueur $\Omega(n)$. Albenque et Marckert [1] montrent également que la distance moyenne entre deux sommets d'un RAN est asymptotiquement égale à $\eta_1 \log n$ avec $\eta_1 = 6/11$. Ebrahimzadeh et al. [9] prouvent enfin que le diamètre du RAN est p.c. asymptotiquement égal à $c \log n$, où la valeur exacte de c est connue en fonction de la solution d'une équation différentielle, et $c \approx 1,668$.

La question de la longueur du plus long chemin simple est celle qui nous intéresse plus particulièrement dans ce papier. D'autres auteurs se sont penchés sur la question, en particulier pour lui donner une borne supérieure aussi précise que possible. Ebrahimzadeh et al. réfutent dans [9] la conjecture de Frieze et Tsourakakis et prouvent que p.c. $\mathcal{L}_n \in o(n)$. Ils montrent également que $\mathcal{L}_n \geq m^{\frac{\log 2}{\log 3}} + 2$ de façon déterministe, et que $\mathbb{E}[\mathcal{L}_n] \in \Omega(m^{0,88})$. Frieze et Cooper améliorent la borne supérieure dans [7], et montrent que, presque certainement, $\mathcal{L}_n \leq ne^{-\log^c n}$ pour toute constante $c < 2/3$. Enfin, Collecchio, Mehrabian et Wormald montrent dans [6] qu'il existe une constante $\delta < 1$ telle qu'au bout d'un certain temps², tout chemin de G_n a une longueur inférieure à n^δ . Ce résultat avait été conjecturé dans [7]. Les auteurs donnent également une valeur possible pour δ : on peut ainsi choisir $\delta = 1 - 4 \times 10^{-8}$.

L'objectif de ce mémoire est de resserrer l'écart entre les bornes inférieure et supérieure trouvées précédemment pour la longueur du plus long chemin, en particulier d'améliorer la borne supérieure en trouvant un nouveau δ plus petit. Pour cela, nous étudions certaines propriétés du chemin le plus long dans T^Δ . On conjecture que sa longueur est approximativement du même ordre de grandeur que le plus grand arbre binaire inclus dans l'arbre ternaire T^Δ . Nous noterons \mathcal{B}_n l'un des sous-arbres binaires maximaux de T^Δ . L'espoir est alors que la taille de \mathcal{B}_n sera plus facile à étudier que \mathcal{L}_n directement.

2. On dit qu'une séquence d'événements A_k se produit au bout d'un certain temps, s'il existe presque certainement un entier N tel que A_k se produit pour tout $k > N$

[6] donne également une borne supérieure possible pour la taille du plus grand arbre de degré r dans un arbre de degré d généré de la même façon que T^Δ . Pour le cas qui nous intéresse, $d = 3$ et $r = 2$, [6] donne une borne numérique possible de $\mathcal{B}_n \in O(n^\delta)$ avec $\delta = 1 - \frac{d-r}{ed^{2d} \log(11d \log d)}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \delta &= 1 - \frac{1}{3^6 e \log(33 \log 11)} \\ &\approx 1 - 3 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

Cette borne pourrait elle-même être ensuite améliorée.

2 Plus long chemin dans un RAN

Dans cette partie, nous donnerons diverses propriétés du plus long chemin dans un graphe Apollonien aléatoire, en utilisant à la fois le graphe G et l'arbre T^Δ .

2.1 Lien entre chemin et arbre T^Δ

Etant donné un chemin P dans G , on peut le visualiser dans T^Δ de la façon suivante : on marque chaque nœud μ^Δ de T^Δ si P visite au moins un nœud à l'intérieur strict du triangle Δ . On appelle le résultat *trace de P dans T^Δ* , noté T_P^Δ . La trace est trivialement un sous-arbre de T^Δ , qui ne contient aucune de ses feuilles mais qui contient sa racine. On a l'inégalité suivante entre la longueur de P , $L(P)$, et la taille de T_P^Δ :

$$L(P) \leq |T_P^\Delta| + 2.$$

En effet, à l'exception des trois sommets originaux du triangle, tout sommet visité par P est centre d'un triangle marqué dans T_P^Δ , et tous ces triangles sont distincts entre eux. Il n'y a pas d'égalité en sens inverse en général : par exemple dans le cas où T^Δ est linéaire (tous les sommets ont été ajoutés à G au même endroit), P pourrait visiter uniquement

le dernier sommet ajouté à G , donc être de taille 1, alors que T_P^Δ est alors de taille $n - 3$.

2.2 Borne inférieure

Théorème 2.1. *Pour tout sous-arbre binaire B de T^Δ , il existe un chemin P dans G de longueur supérieure à $\frac{|B|+1}{2}$ dont la trace dans T^Δ contient B , sans ses feuilles.*

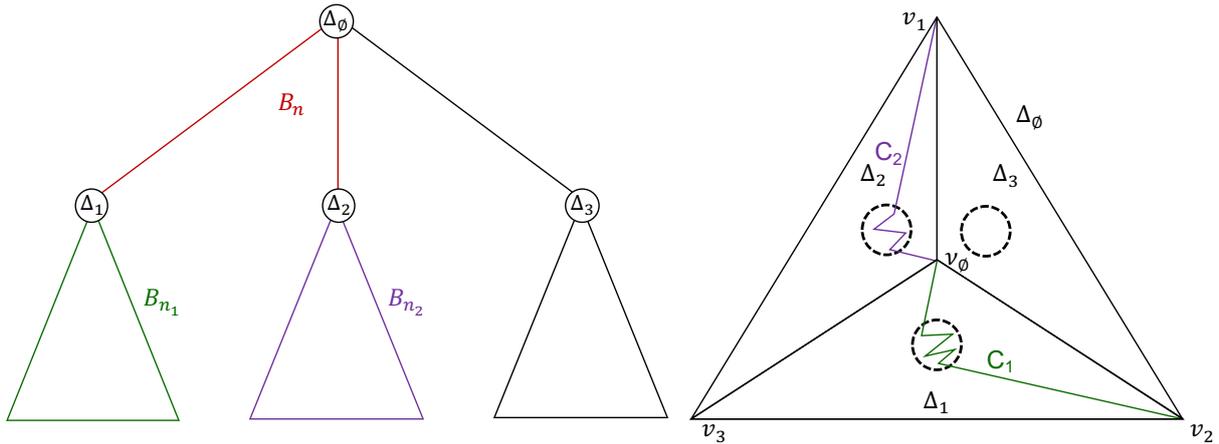


FIGURE 2 – Démonstration du théorème 2.1.

Démonstration. La preuve est la même que pour les bornes inférieures montrées dans [9]. Il s'agit de montrer par récurrence forte qu'il existe trois tels chemins, qui chacun relie deux des trois extrémités du triangle initial, sans passer par le troisième (chaque chemin mettant de côté un sommet différent).

L'initialisation est triviale : pour $n = 3$ (seulement le triangle de départ), T^Δ est uniquement une feuille, donc $B_3 \leq 1$. Chaque arête forme un tel chemin, de longueur $1 \geq (|B_3| + 1)/2$.

Supposons l'existence de tels chemins pour tout RAN de taille $k < n$, avec $n > 3$. $n > 3$ donc Δ_\emptyset est divisé en trois triangles Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 , qui contiennent respectivement $n_1 < n$, $n_2 < n$ et $n_3 < n$ points, avec $n_i \geq 3$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et $n_1 + n_2 + n_3 = n + 5$ (à cause des sommets extérieurs du triangle et de v_\emptyset , comptés plusieurs fois). On considère B_n . Il contient au plus 2 des fils de μ^{Δ_\emptyset} . Par symétrie, on peut supposer qu'il s'agit de μ_1^Δ et μ_2^Δ . On note les sous-arbres de B_n correspondants B_{n_1} et B_{n_2} (voir la figure 2). Par hypothèse de récurrence, il existe deux chemins C_1 et C_2 dans B_{n_1} et B_{n_2} tels que C_1 relie v_2 à v_\emptyset sans passer par v_3 , C_2 relie v_\emptyset à v_1 sans passer par v_3 , et pour $i \in \{1, 2\}$, T^{C_i} contient B_{n_i} sans ses feuilles, et $|C_i| \geq \frac{|B_{n_i}|+1}{2}$. En reliant ces deux chemins en v_\emptyset , on obtient un chemin C , de trace B_n , qui relie v_2 à v_1 sans passer

par v_3 .

On a

$$\begin{aligned} L(C) &= L(C_1) + L(C_2) \\ &\geq \frac{|B_{n_1}| + 1}{2} + \frac{|B_{n_2}| + 1}{2} \\ &= \frac{|B_n| + 1}{2}. \end{aligned}$$

On procède de même pour former des chemins de même longueur, reliant v_1 à v_3 sans passer par v_2 , et v_2 à v_3 sans passer par v_1 , ce qui complète la preuve. \square

On peut même trouver un chemin dont la trace est exactement un sous-arbre binaire donné (plutôt que de le contenir), il faut seulement rajouter quelques lignes à la démonstration pour bien traiter le cas des sous-arbres vides pour le prouver.

On a donc le corollaire suivant (en ajoutant l'arête v_1-v_3 à un tel chemin reliant v_1 à v_2 par exemple) :

Théorème 2.2. *Dans tout RAN G ,*

$$|\mathcal{L}_n| \geq \frac{|\mathcal{B}_n| + 3}{2}.$$

Cette preuve a été utilisée pour les bornes inférieures de [9], en utilisant une suite de sous-arbres binaires particuliers : ceux dont la racine est dans l'arbre, et pour lesquels, pour tout point de T^Δ qui est dans le sous-arbre binaire, ses deux enfants avec le plus de descendants y sont aussi. Ce sont ces arbres qui sont à coup sûr plus grands que $\Theta(m^{\frac{\log 2}{\log 3}})$, et en espérance $\Omega(m^{0,88})$ (démonstrations par récurrence, effectuées par [9]).

En combinant ce résultat et les bornes supérieures connues pour \mathcal{L}_n , on en déduit que, presque certainement, tous les arbres binaires dans un RAN sont de taille $O(n^\delta)$. En revanche, si on changeait la distribution utilisée, ce résultat change fortement. Ainsi, si on génère l'arbre T^Δ uniformément, un résultat (pas encore publié) de Devroye, Holmgren et Sulzbach montre :

Propriété 2.1. *On génère uniformément un arbre de Galton-Watson à n nœuds, ayant chacun 0 ou 3 enfants. Alors, $\exists c > 0$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\mathcal{B}_n \geq cn] = 1$.*

On en déduit qu'avec une telle distribution sur les graphes, il existe presque certainement un chemin de longueur $\Omega(n)$.

2.3 Première amélioration de la borne supérieure : 7 petits-enfants maximum

[9] et [6] font une remarque importante : un chemin P dans un RAN ne peut jamais visiter l'intérieur strict de chacun des 9 petits-enfants d'un triangle du graphe. En effet, quand on divise un triangle en trois, puis chaque sous-triangle en 3, on obtient 9 triangles, et 7 sommets (3 initiaux, 1 au centre, 3 dans les 3 triangles obtenus). Or, pour passer de l'intérieur strict d'un des petits-enfants à un autre, le chemin doit nécessairement passer par l'un de ces 7 points. Donc 8 d'entre eux peuvent être visités au maximum. Ainsi, tout nœud de T_P^Δ a 8 petits-enfants dans T_P^Δ au maximum. Cette observation a mené aux bornes supérieures de [9] et [6] pour le plus long chemin. Voir la figure 3 pour un exemple.

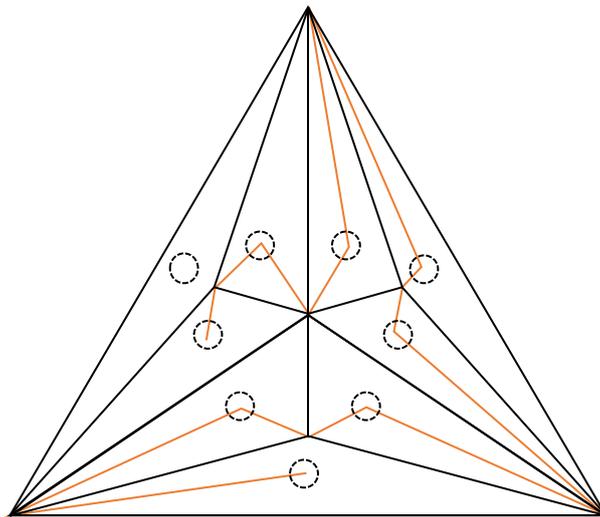


FIGURE 3 – Exemple de chemin visitant huit petits-enfants d'un triangle. On remarque que l'on ne peut pas visiter le neuvième, et que si le chemin sortait du triangle, seuls sept petits-enfants seraient accessibles au maximum.

Nous pouvons légèrement améliorer ce résultat ici :

Propriété 2.2. *Pour tout chemin P dans G , au plus un nœud de T_P^Δ a 8 petits-enfants dans T_P^Δ , et tous les autres en ont 7 au maximum. Ce nœud particulier est le premier, en partant de la racine, à avoir plusieurs enfants dans T_P^Δ .*

Démonstration. Pour avoir 8 petits-enfants dans T_P^Δ , un triangle Δ doit nécessairement contenir entièrement P dans son intérieur (non strict). En effet, si le chemin sort de Δ , il entre dans celui-ci par l'un de ses sommets, puis a 6 nœuds lui permettant de passer de l'un des petits-enfants à un autre, ce qui ne permet de visiter que 7 d'entre eux. Ensuite, pour avoir 8 petits-enfants sur les 9 dans T_P^Δ , il faut nécessairement avoir 3 enfants dedans. Les triangles qui contiennent tous P sont nécessairement tous ancêtres ou descendants les uns des autres. Un seul d'entre eux peut avoir plusieurs enfants dans T_P^Δ : le plus bas parmi eux dans T^Δ . \square

En utilisant la propriété 2.2, on pourrait envisager comme travail futur d'adapter la preuve de [6] pour améliorer leur résultat numérique de borne supérieure, cependant cela implique des calculs encore plus lourds que ceux de [6].

2.4 Différents types de triangle, réserve, lien entre les nœuds à 1 enfant et ceux à 3 enfants

On se propose ici d'étudier plus particulièrement le nombre d'enfants et de petits-enfants qu'un triangle peut avoir dans T^Δ pour un chemin P donné. On va donc s'intéresser à l'interaction entre un chemin P et un triangle Δ , et classer les triangles en fonction de celle-ci. A chaque sommet s du triangle Δ , il y a 3 possibilités concernant la façon dont P le visite, que l'on notera chacune d'une façon différente :

1. s est relié à un sommet strictement hors de Δ , et un dans Δ . On notera ce type de sommets I .
2. s est relié à 2 sommets à l'intérieur de Δ (au sens large). On notera ce type de sommets O .
3. P ne passe pas par s , ou P y passe depuis l'extérieur strict de Δ seulement. On regroupe ces deux cas ensemble, et on note un tel nœud X .

On peut alors coder le type d'un triangle de T_P^Δ comme la concaténation des codes de ses trois sommets, par exemple XIO a un sommet de chaque type. Voir l'exemple en figure 4. En ne tenant pas compte de l'ordre des nœuds, il y a alors 10 possibilités de code pour chaque triangle Δ . L'idée est alors de considérer les types possibles pour chacun des 3 enfants, en fonction du type de Δ et du chemin P . Pour donner un certain type aux enfants, il faut qu'ils possèdent au moins un nœud dans leur intérieur strict. On ne considère donc ici que l'hérédité des types des triangles dont les trois fils sont divisés à leur tour.

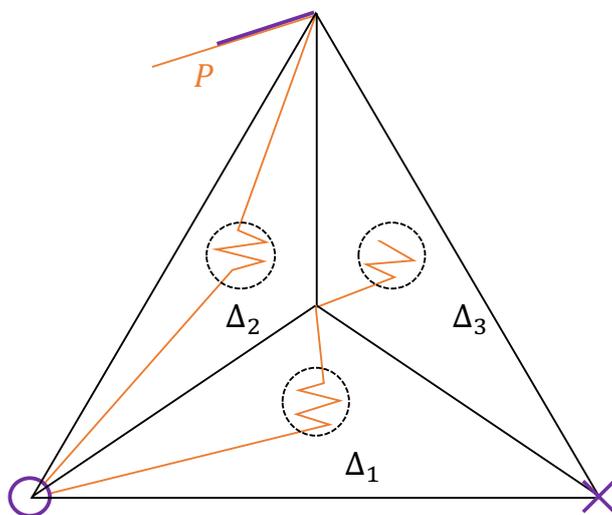


FIGURE 4 – Exemple de triangle de type XIO pour un certain chemin P . Ses trois enfants sont de types $XI-I$ (Δ_1 et Δ_2) et XXI .

Pour certains types de triangle, il y a une distinction à faire entre le cas où P relie deux sommets entre eux par l'intérieur du triangle ou non. On notera un tel lien intérieur au triangle avec un tiret : $XI-I$ et XII sont différents par ce critère. Quand un des cas est impossible, on n'utilisera pas ce tiret, par simplicité.

On peut faire quelques remarques préliminaires sur les différents types de triangles, qui permettent de mieux comprendre quels triangles peuvent contenir lesquels :

- $I-O-I$, $XI-I$ ne contiennent aucune extrémité du chemin (dans leur intérieur strict).
- XXI , XIO , III , IOO contiennent exactement une extrémité du chemin.

- XII et $II-O$ contiennent les deux extrémités de P .
- XXX , XXO , XOO et OOO contiennent entièrement P . Ils peuvent tous coexister, ou seulement certains. Δ_\emptyset est d'un de ces types, celui de réserve égale au nombre de ses sommets qui sont visités par P .
- Il y a un seul OOO au plus.

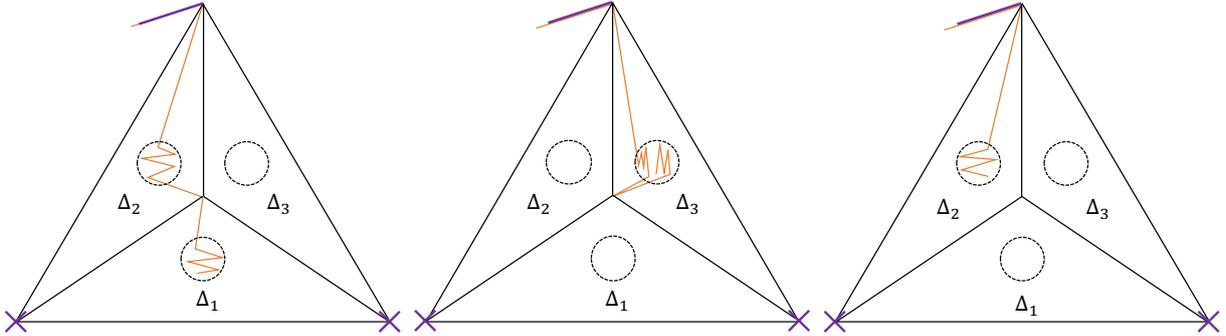


FIGURE 5 – Toutes les possibilités d'hérédité de type pour un triangle XXI . A gauche, on obtient $XI-I$ et XXI . Au centre, seulement un XIO . A droite, XXI .

On montre par exemple toutes les descendance possibles d'un triangle XXI en figure 5. Les résultats plus généraux sont présentés dans le tableau 1. Pour le garder plus succinct, il ne montre l'ensemble des possibilités d'hérédité que pour les chemins *non évidemment prolongeables*. Un chemin est *évidemment prolongeable* s'il s'arrête sur un sommet ayant un voisin non visité par P , ou s'il existe un triangle Δ dans G tel que 2 de ses sommets soient reliés par une arête dans P , mais le 3^e n'est pas dans P (on peut alors évidemment prolonger P en passant par le 3^e sommet entre les deux premiers). Les chemins maximaux sont trivialement non évidemment prolongeables, mais la réciproque est fautive (ce ne sont que des maxima locaux).

On observe que l'on peut classifier les triangles en 4 groupes :

1. XXI , $XI-I$ et XXX : 2 enfants maximum, nécessairement de ce groupe, ou un seul des groupes 1 ou 2.
2. XII , XIO , III , $I-O-I$ et XXO : 3 enfants du groupe 1, ou 2 dont au maximum un du groupe 2 et le reste du groupe 1, ou 1 des groupes 1,2 ou 3.

Type	Sous-type	3 enfants	2 enfants	1 enfant
XXX		Impossible	XXI et XXI	XXX ou XXO
XXI		Impossible	XXI et $XI-I$	XIO ou XXI
XXO		XXI , XXI et $XI-I$	XXI et XIO , ou XXI et XXI , ou $XI-I$ et XII	XOO ou XXO
XII	XII	XXI et $XI-I$ et XXI	$XI-I$ et XII , ou XXI et XXI	$II-O$
	$XI-I$	Impossible	$XI-I$ et $XI-I$	$I-O-I$
XIO	$XI-O$	$XI-I$, $XI-I$ et XXI	XXI ou $XI-I$, et $I-O-I$ ou $I-II$ ou XIO	IOO ou XIO
XOO	$XO-O$	≥ 2 parmi XXI , $XI-I$ et ≤ 1 parmi XII , III et XIO	XXI et XOO , ou XII et $I-O-I$, ou XXI et IOO , ou $XI-I$ et $II-O$, ou XXI et XIO	XOO ou OOO
III	$II-I$	$XI-I$, $XI-I$ et XXI	$XI-I$ et un parmi XXI , III , XIO	Impossible
IIO	$I-O-I$	$XI-I$ 3 fois	$XI-I$, et $XI-I$ ou $I-O-I$	Impossible
	$II-O$	≥ 2 parmi XXI , $XI-I$ et ≤ 1 parmi XIO , III , XII , $I-O-I$	≥ 1 parmi XXI , $XI-I$, et ≤ 1 parmi IOO , $II-O$; ou 2 parmi XII , XIO , III , $I-O-I$	Impossible
IOO	$I-O-O$	≥ 2 parmi XXI , $XI-I$ et ≤ 1 parmi XIO , III , XII , $I-O-I$	≥ 1 parmi XXI , $XI-I$, et ≤ 1 IOO ; ou 2 parmi XIO , III , $I-O-I$	Impossible
OOO	$O-O-O$	≥ 2 parmi XXI , $XI-I$ et ≤ 1 parmi $II-O$, IOO ; ou 1 parmi XXI , $XI-I$ et 2 parmi XII , XIO , III , $I-O-I$	≤ 1 parmi $II-O$, IOO , ≥ 1 parmi XXI , $XI-I$, XII , XIO , III , $I-O-I$	Impossible

TABLE 1 – Les types possibles des enfants d’un triangle, selon son type et leur nombre. Toutes les combinaisons écrites ici ne sont pas possibles, mais tout ce qui est possible est dans le tableau.

3. *II-O, IOO* et *XOO* : 3 enfants dont au maximum 1 du groupe 2 et le reste du groupe 1, ou 2 du groupe 2, ou 2 dont au plus un du groupe 3 et le reste du groupe 1, ou 1 enfant des groupes 1, 2, 3 ou 4. Le groupe 4 ne peut arriver que si le chemin est entièrement contenu (au sens large) dans l'un des enfants de Δ .
4. *OOO* : 3 enfants, dont au maximum 2 du groupe 2 ou 1 du groupe 3, et le reste du groupe 1, ou 2 enfants dont au maximum 1 du groupe 3, ou 1 enfant de n'importe quel groupe sauf 4.

On remarque que les triangles peuvent toujours avoir 2 enfants, dont 1 du même groupe qu'eux-même et l'autre du groupe 1, ou 1 du groupe au-dessus d'eux, ou (sauf pour le groupe 1), 3 mais toujours des groupes en-dessous d'eux. Etre dans un groupe élevé permet donc au chemin de visiter une plus grosse partie de sa descendance, mais pour être dans un groupe élevé il faut avoir des ancêtres à 1 seul fils dans T_P^Δ .

On définit donc la *réserve* d'un triangle Δ relative au chemin P , notée $res_P(\Delta)$, en fonction de son type : le groupe 1 a une réserve de 0, le groupe 2 a une réserve de 1, le groupe 3 de 2, et le groupe 4 de 3. On peut étendre cette définition en notant que, si le chemin ne visite jamais l'intérieur strict de Δ , on a $res_P(\Delta) = -1$. T_P^Δ est alors formé des nœuds de T^Δ de réserve positive. On a la propriété suivante :

Propriété 2.3. *Pour tout RAN G , tout chemin P et tout triangle Δ non vide, de centre ν_Δ , dans G ,*

$$res_P(\Delta_1) + res_P(\Delta_2) + res_P(\Delta_3) \leq res_P(\Delta) - 1.$$

Il y a égalité si et seulement si le centre de Δ est dans P , et on peut aussi écrire :

$$res_P(\Delta_1) + res_P(\Delta_2) + res_P(\Delta_3) + 2 = res_P(\Delta) + \mathbb{1}_{\nu_\Delta \in P}. \quad (1)$$

Ceci reste vrai si $\Delta \notin T_P^\Delta$.

La preuve vient simplement de l'étude de tous les cas possibles, résumés dans le tableau 1. De façon intuitive, plus un triangle a une grande réserve, plus on peut visiter de ses

descendants, et plus P peut visiter de sommets à l'intérieur de Δ . Sans l'hypothèse que P est non évidemment prolongeable, il y a de nouvelles possibilités d'héritage des types (venues de chemins possibles à agrandir d'une façon évidente), et l'égalité redevient une inégalité. Si Δ_1 , Δ_2 ou Δ_3 sont d'intérieur vide, on définit arbitrairement leur réserve comme s'ils ne l'étaient pas, pour garder la formule 1 correcte, mais on ne peut évidemment pas utiliser cette formule sur leurs enfants, puisqu'ils n'en ont pas. Il y a parfois plusieurs possibilités pour leurs réserves, mais pas pour leur somme.

Remarque : on retrouve grâce à la notion de réserve une preuve que seul un triangle (de type OOO) peut avoir huit petits-enfants visités, et les autres 7 maximum. Pour avoir 7 petits-enfants visités il faut avoir une réserve de 2, et avoir 3 enfants de réserves 0, 0 et 1 dans T_P^Δ .

En sommant (1) sur T^Δ , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\Delta \in T^\Delta \setminus Leaves} \mathbb{1}_{\nu_\Delta \in P} &= \sum_{\Delta \in T^\Delta \setminus Leaves} res_P(\Delta_1) + res_P(\Delta_2) + res_P(\Delta_3) + 2 - res_P(\Delta) \\ &= 2 \times |T^\Delta \setminus Leaves| - res_P(\Delta_\emptyset) + \sum_{\Delta \in Leaves} res_P(\Delta) \\ &= 2 \times (n - 3) - res_P(\Delta_\emptyset) - \sum_{\Delta \in Leaves} 1 + \sum_{\Delta \in Leaves} (res_P(\Delta) + 1). \end{aligned}$$

Les feuilles dont le père n'est pas dans T_P^Δ sont de réserve -1. Notons L_P l'ensemble des feuilles dont le père est dans T_P^Δ . On obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{\Delta \in T^\Delta \setminus Leaves} \mathbb{1}_{\nu_\Delta \in P} &= 2 \times (n - 3) - res_P(\Delta_\emptyset) - (2n - 5) + \sum_{\Delta \in L_P} (res_P(\Delta) + 1) \\ &= \sum_{\Delta \in L_P} (res_P(\Delta) + 1) - 1 - res_P(\Delta_\emptyset). \end{aligned}$$

Or $res_P(\Delta_\emptyset)$ est exactement le nombre de sommets de Δ_\emptyset visités par P . On en déduit donc :

Propriété 2.4.

$$L(P) = \sum_{\Delta \in L_P} (res_P(\Delta) + 1) - 1. \quad (2)$$

Rappelons que les réserves des éléments de L_P peuvent prendre toutes les valeurs entières entre -1 et 2.

Par ailleurs, on obtient cette propriété grâce aux réserves :

Propriété 2.5. *Pour tout chemin P et tout entier positif k , un triangle $\Delta \in T_P^\Delta$ de réserve r possède au maximum $a_r \times 2^{k-1}$ descendants d'intérieurs visités par P k niveaux en-dessous de lui dans T_P^Δ , avec $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 3.5$ et $a_3 = 4$.*

Démonstration. Par récurrence sur k , en examinant les différentes possibilités pour le nombre d'enfants et leurs réserves. □

Les propriétés 2.2 et 2.5 montrent immédiatement :

Propriété 2.6. *Si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de graphes Apolloniens de taille n tels que T^Δ est équilibré (c'est-à-dire que toutes ses feuilles sont de profondeur k ou $k - 1$ pour un certain k), ils vérifient $\mathcal{L}_n \in \Theta(\mathcal{B}_n)$.*

En particulier, cela prouve ce résultat dans le cas des graphes Apolloniens déterministes, tels qu'étudiés dans [2] et [8]. Ce n'est en revanche pas vrai en général, comme nous le verrons dans la section suivante.

2.5 T_P^Δ et sous-arbres binaires : exemple d'un chemin beaucoup plus grand que tout sous-arbre binaire

Les résultats du tableau 1 montrent ceci : une fois qu'un triangle a une réserve de 0, on peut toujours visiter deux de ses enfants de son choix, avec une réserve de 0 ; ou alors on peut n'en visiter qu'un (sans avoir le choix duquel en général) avec une réserve de 1. Cela signifie que pour pouvoir visiter les 3 enfants d'un triangle, il faut avoir sacrifié 2 des 3 enfants d'un triangle situé plus haut pour augmenter la réserve disponible (en général, le haut de l'arbre étant une exception avec de la réserve disponible dès le départ). Or, avec forte probabilité, plus un triangle est haut placé dans l'arbre, et plus il a de descendants. En particulier, ne visiter aucun descendant d'un nœud haut placé représente

un gros manque à gagner, probablement plus grand que le bénéfice de visiter tous les descendants d'un descendant dudit nœud.

On conjecture donc que les cas où il est préférable de faire cela sont rares, et qu'en conséquence, si P est un chemin maximal, T_P^Δ ressemble de fait souvent à un arbre binaire, avec une petite proportion de nœuds à 3 enfants, compensés par des ancêtres à 1 seul enfant. Ainsi, si l'on pouvait par exemple prouver que presque certainement moins de F_n (idéalement $F_n \in o(n^\delta)$ pour tout $\delta > 0$) nœuds ont degré 3 dans T_P^Δ pour un chemin P maximal, on aurait immédiatement $\mathcal{L}_n \in O(\mathcal{B}_n \times F_n)$ presque certainement, améliorant ainsi les résultats précédents.

Cette conjecture est cependant fautive d'un point de vue déterministe. En effet, on peut construire une suite de graphes Apolloniens hamiltoniens de taille n , dans lesquels le plus grand sous-arbre binaire de T^Δ est de taille $\Theta(n^{\log_3(2)})$.

Pour cela, on crée récursivement la suite de graphes Γ_k , de taille $n = 3^k + 2$ et en même temps une suite de chemins associée C_k , pour $i \in \{1, 2, 3\}$ dans Γ_k , de longueur $n - 1$, tels que C_k est un chemin dans Γ_k qui en visite tous les sommets sauf v_1 , et a comme extrémités v_2 et v_3 . Un tel chemin peut facilement être agrandi en un chemin hamiltonien par l'arête reliant v_1 à v_3 . On appelle v_1 le sommet exclu de Γ_k , et on remarque que l'on peut choisir le sommet exclu de Γ_k par symétrie. On construit Γ_k et C_k comme suit (voir figure 6) :

1. Γ_0 est un triangle Δ_\emptyset vide, de taille $n = 3^0 + 2 = 3$. C_0 est constitué uniquement de l'arête $v_2 - v_3$. On remarque que l'on peut choisir le sommet exclu de Γ_0 simplement en changeant l'arête qui constitue C_k .
2. Γ_k est constitué d'un triangle Δ_\emptyset , divisé en 3, dont Δ_1 est à nouveau divisé en 3 (on appelle son centre ν_1 et les triangles Δ_{1i} pour $i \in \{1, 3\}$), et chacun des trois triangles obtenus est une copie Γ_{k-1}^i , muni du chemin C_{k-1}^i qui exclut le bon sommet : ν_1 est exclu dans Δ_{11} , v_2 est exclu dans Δ_{12} et v_3 l'est dans Δ_{13} . On

construit alors C_k en reliant C_{k-1}^1 , C_{k-1}^2 et C_{k-1}^3 respectivement en v_\emptyset et v_1 . C_k relie donc v_2 à v_3 en visitant tous les nœuds de Γ_k sauf v_1 (voir figure 6).

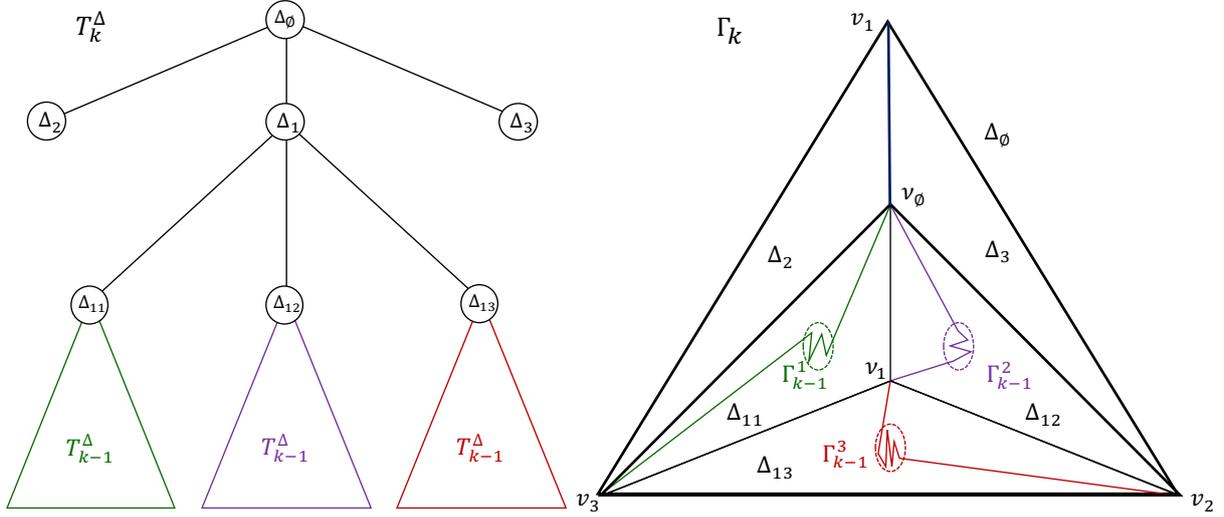


FIGURE 6 – Construction récursive du graphe Γ_k , du chemin C_k , et du Δ -arbre associé.

L'arbre T_k^Δ (de taille $3n - 8 = 3^{k+1} - 2$) associé à Γ_k est construit facilement par récurrence :

1. T_0^Δ est un nœud tout seul.
2. T_k^Δ a une racine avec 3 enfants, dont 2 des enfants sont des feuilles. Le troisième enfant a lui-même 3 enfants, qui sont chacun T_{k-1}^Δ .

La trace de C_k dans T_k^Δ est l'ensemble de l'arbre, moins les feuilles.

On vérifie facilement que le plus grand sous-arbre binaire de T_k^Δ est de taille $b_k = 4 \times 2^k - 3$. Dans cette suite particulière de graphes Apolloniens, on a donc :

$$|\mathcal{B}_n| \in \Theta(n^{\log_3 2})$$

$$\mathcal{L}_n = n.$$

Ainsi, même si jamais il y a bien une borne supérieure pour le plus long chemin, du type $\mathcal{L}_n \in \Theta(\mathcal{B}_n) + F_n$, avec $F_n \in o(\mathcal{B}_n)$, cela ne peut être vrai qu'avec forte probabilité et non pas en général, de façon déterministe.

3 Arbres T^ν , numérotation des nœuds et formule générale pour les arêtes

3.1 Définition

L'arbre T^Δ est utile pour comprendre le comportement d'un chemin maximal, mais il ne permet pas de savoir quel sommet est relié à quel autre. On souhaite donc garder la vision de G comme un arbre, et toujours considérer les sommets. On va donc représenter G sous forme d'un arbre T^ν , dans lequel les nœuds représentent maintenant les sommets de G . On crée T^ν à partir de T^Δ en retirant toutes ses feuilles, et en considérant maintenant chaque nœud non plus comme un triangle, mais comme le centre de ce triangle (les nœuds internes de T^Δ correspondent exactement aux triangles ayant un centre dans G). Il ne manque alors plus que les trois triangles initiaux, que l'on place en chaîne au-dessus de la racine de T^ν (qui représente ν_\emptyset). Arbitrairement, on les place dans cet ordre : $v_1 - v_2 - v_3 - \nu_\emptyset$. Voir figure 7.

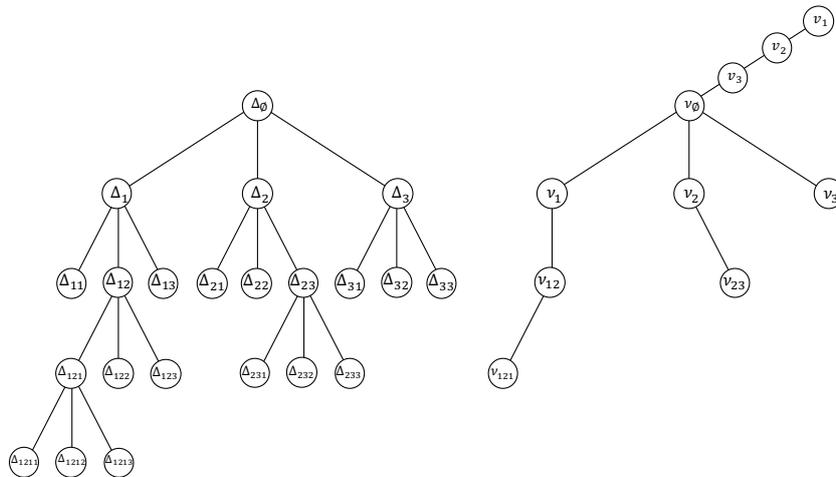


FIGURE 7 – Construction de l'arbre T^ν (à droite) à partir de T^Δ (à gauche).

On remarque que les sommets de T^ν sont toujours reliés, dans G , à exactement trois de leurs ancêtres dans T^ν , dont leur père. T^ν est donc une représentation complète de G si on y ajoute des arêtes entre les nœuds et certains de leurs descendants (mais en particulier aucun entre « cousins »). En levant l'ambiguïté sur la distinction entre les différents fils d'un même nœud (leur numérotation étant jusqu'ici décidée arbitrairement), on peut trouver une formule générale pour savoir si deux nœuds de T^ν sont voisins ou non dans G .

On peut donner quelques autres propriétés de voisinage entre les nœuds : si un nœud ν_1 est relié à son ancêtre ν_2 (dans T^ν) dans G , alors tous les nœuds situés entre les deux dans T^ν sont aussi voisins de ν_2 .

3.2 Numérotation des triangles et des nœuds

On définit récursivement une numérotation des nœuds et des triangles de la façon suivante :

1. Le premier triangle est noté Δ_\emptyset , de centre ν_\emptyset .
2. Quand on divise un triangle Δ_x en 3 parties en y plaçant un nœud, on appelle celui-ci ν_x . On rappelle que les trois sommets de Δ_x sont des ancêtres de ν_x dans T^ν . On les note, du plus haut au plus bas dans l'arbre, ν_{x_1} , ν_{x_2} et ν_{x_3} (ν_{x_3} est donc le père de ν_x). Les trois triangles issus de cette division sont notés $\Delta_{x::1}$, $\Delta_{x::2}$ et $\Delta_{x::3}$ (où $::$ désigne la concaténation), de sorte que $\Delta_{x::i}$ n'a pas pour sommet ν_{x_i} .

On a la propriété suivante :

Propriété 3.1. *Deux nœuds de T^ν , $\nu_{x_1\dots x_i}$ et $\nu_{y_1\dots y_j}$, tels que $i > j$, sont adjacents si et seulement si :*

1. $\forall k \in \{1, \dots, j\}, x_k = y_k$, et
2. $x_{j+1} \dots x_i$ est un préfixe d'une suite de chiffres de la forme $\cdot(1|2)3^*1(2|3)^*$

Voir la figure 8.

On utilise ici des notations d'expressions régulières : \cdot désigne n'importe quel chiffre, $|$ est un « ou », et l'étoile désigne la répétition autant de fois que l'on veut (y compris 0). Cette formule donne directement les descendants d'un nœud auxquels il est relié. Pour trouver les 3 ancêtre voisins d'un nœud ν_x avec $x = x_1 \dots x_k$, on peut utiliser cette règle équivalente qui permet de les trouver à partir du suffixe de x :

1. Le père, d'indice $x_1 \dots x_{k-1}$, en est un.
2. — Si $x_k = 3$, un des ancêtres est $x_1 \dots x_l$ tel que $x = x_1 \dots x_l \cdot 3^*3$, et l'autre est tel que $x = x_1 \dots x_l \cdot (1|2)3^*1(2|3)^*3$.
— Sinon, le deuxième ancêtre est le grand-père de ν_x , d'indice $x_1 \dots x_{k-2}$. Si $x_k = 1$, le dernier est tel que $x = x_1 \dots x_l \cdot (1|2)3^*1$. Si $x_k = 2$, le dernier ancêtre est défini par $x = x_1 \dots x_l \cdot (1|2)3^*1(2|3)^*2$

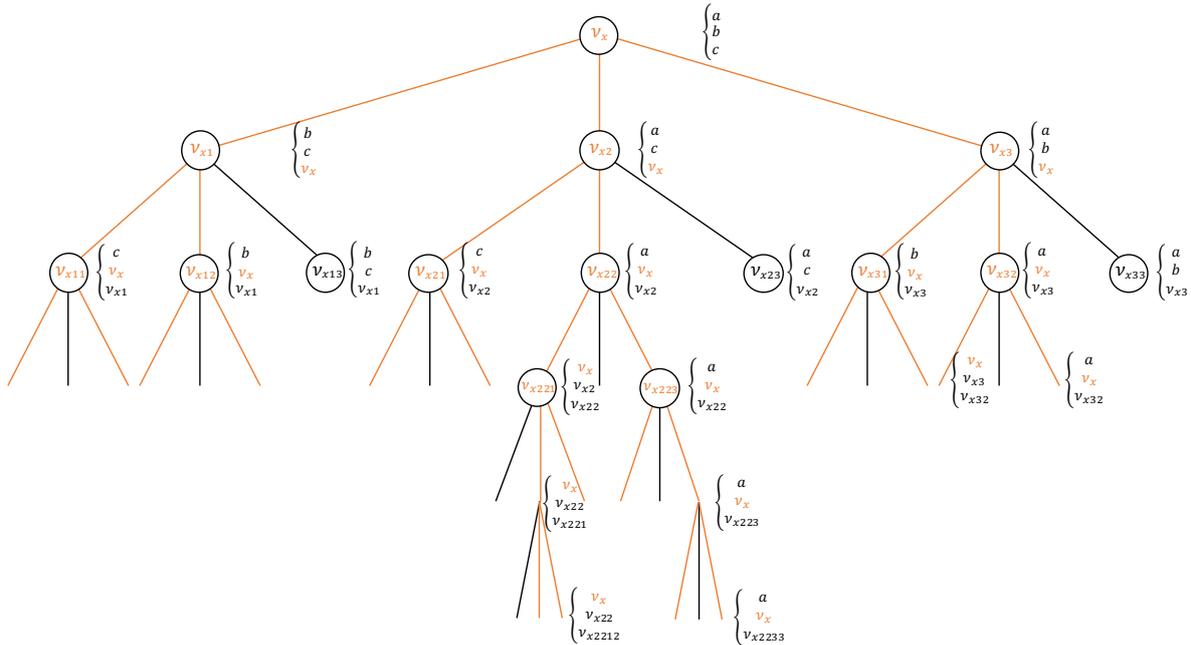


FIGURE 8 – Illustration de la formule de voisinage donnée en propriété 3.1. Les nœuds en orange sont les voisins de la racine ν_x . On indique à droite de certains nœuds la liste de leurs trois ancêtres voisins, dans l'ordre. Le fils numéro i d'un nœud garde la liste de son père, en enlevant le i^e élément, remplacé par le père lui-même, qui est donc en troisième position.

Démonstration. Il est facilement vérifiable que les formules données pour les descendants et les ancêtres voisins d'un nœud sont équivalentes. Il suffit donc de montrer la première. Pour chaque

nœud, on note la liste de ses 3 ancêtres voisins (a.v.), dans l'ordre d'ancienneté dans l'arbre (le plus haut en premier dans la liste). Considérons un nœud ν_x . Ses 3 enfants ont pour a.v. ν_x et les deux a.v. de celui-ci qui ne sont pas de numéro i dans sa liste d'a.v., où i est le numéro du fils en question (chaque a.v. de ν_x est conservé dans 2 de ses 3 enfants). On cherche ici comment ν_x peut rester dans la liste d'a.v. de ses descendants au fur et à mesure qu'on les crée, et qu'on ajoute des chiffres à leur indice :

- ν_x est nécessairement le 3^e élément de la liste des ancêtres-voisins de ses fils, d'où le \cdot .
- A l'étage du dessous, il reste donc a.v. des enfants autres que le numéro 3. Il est alors le 2^e élément sur leur liste de voisins. D'où le $(1|2)$.
- Une fois qu'il est 2^e voisin d'un nœud, toute suite de 3 ajoutée à l'indice remplace systématiquement le 3^e élément de la liste, ce qui laisse ν_x présent et en 2^e position. D'où 3^* .
- S'il y a alors un 2, ν_x est remplacé dans la liste de voisins. S'il y a un 1, le 1^{er} élément de la liste est remplacé, ν_x passe en 1^{re} position sur la liste des a.v.. D'où le 1.
- Une fois ν_x en 1^{re} position sur la liste, il en est retiré s'il y a un 1, et il y reste à la même place tant qu'il y a des 2 ou des 3 qui arrivent. D'où $(2|3)^*$.

On en déduit que ν_x est voisin de tout nœud $\nu_{x::y}$ avec y préfixe d'un nombre de la forme $\cdot(1|2)3^*1(2|3)^*$. □

Les trois nœuds initiaux se comportent exactement de la même façon, et respectent ces règles, si l'on considère qu'ils sont reliés entre eux et à ν_\emptyset par des arêtes marquées 1. On peut donc re-noter v_1 , v_2 et v_3 respectivement comme $\nu_{\setminus 111}$, $\nu_{\setminus 11}$ et $\nu_{\setminus 1}$.

Etant donné un chemin P dans G , il peut être vu comme une suite de nombres, dont 2 éléments consécutifs doivent respecter les règles d'adjacence énoncées ci-dessus dans la propriété 3.1.

On peut aussi suivre le chemin P dans T^ν , en marquant tous les nœuds visités. L'ensemble des nœuds visités par P dans celui-ci est trivialement un sous-ensemble de la trace de P dans T^Δ .

Nous disposons donc maintenant d'une représentation de tout RAN G en arbre ternaire, avec une formule explicite qui donne les arêtes de G qui ne sont pas dans cet arbre. Ces arêtes supplémentaires ne peuvent relier que des ancêtres et des descendants entre eux.

Propriété 3.2. *Une façon alternative de générer un RAN de taille $n \geq 4$ est de générer un arbre ternaire, de la façon suivante : on commence avec un nœud seul. A chaque étape on sélectionne au hasard, de façon uniforme, un nœud externe de l'arbre, et on l'ajoute à l'arbre. Après $n - 4$ étapes, on ajoute les trois nœuds $\nu_{\setminus 111}$, $\nu_{\setminus 11}$ et $\nu_{\setminus 1}$ en ligne comme ancêtres de la racine ν_\emptyset . On connaît ensuite les arêtes supplémentaires qui donnent le RAN avec la formule 3.1.*

On cherche maintenant à comparer un chemin dans G à un sous-arbre binaire de T^ν , en observant ce chemin dans T^ν . Il s'agit d'un chemin dans un arbre ternaire, dans lequel on ne peut passer que d'un nœud à un de ses ancêtres ou à un de ses descendants, avec restrictions sur l'adjacence de deux tels points. Nous allons étudier ce même problème, en enlevant les restrictions d'adjacence. Toute borne supérieure du chemin trouvée pour ce nouveau problème sera trivialement valable également pour les RAN.

4 Plus long chemin dans un arbre ternaire avec liens supplémentaires

4.1 Définitions, et complétion de l'arbre

On modifie légèrement le problème, en travaillant sur une classe légèrement plus générale d'arbres ternaires. On considère ainsi l'arbre ternaire aléatoire T_m^3 généré ainsi :

1. Commencer avec un nœud seul ν_\emptyset .
2. A chaque étape, choisir uniformément un nœud externe aléatoire, et l'ajouter à l'arbre ternaire.
3. Effectuer $m - 1$ étapes. Ajouter des arêtes entre chaque nœud et tous ses descendants (et donc tous ses ancêtres aussi).

On remarque que, si v est un descendant de u dans un tel arbre, tout voisin de v est aussi voisin de u (ce qui est faux dans T^ν).

On considère également l'arbre ternaire complet aléatoire T^{3c} , qui est T^3 complété, c'est-à-dire après ajout de tous ses nœuds externes (tous ses nœuds internes ont donc exactement 3 fils). T^3 est l'ensemble des nœuds internes de T^{3c} . Dans cette partie, on notera $n = |T^{3c}| = 3 \times m + 1$.

On note respectivement \mathcal{L}_n^3 et \mathcal{L}_n^{3c} la longueurs d'un plus long chemin de T^3 et T^{3c} . On a cette propriété préliminaire :

Propriété 4.1.

$$\mathcal{L}_n^3 \leq \mathcal{L}_n^{3c} \leq 2 \times \mathcal{L}_n^3 + 1.$$

Démonstration. La 1^{re} inégalité est triviale, puisque T^3 est contenu dans T^{3c} , donc tout chemin réalisable dans le premier l'est dans le deuxième.

Considérons un chemin P dans T^{3c} . Il ne peut contenir deux feuilles consécutives, car les feuilles ne sont reliées qu'à leurs ancêtres. Considérons maintenant l'ensemble des nœuds internes de T^{3c} visités par P , dans l'ordre. Ils définissent aussi un chemin valide P' dans T^3 . En effet, soient v_1 et v_2 deux nœuds consécutifs de cette liste. S'ils sont reliés dans P , alors ils le sont dans T^3 . S'ils ne le sont pas, ils sont séparés, dans P , par exactement une feuille, qui est donc ancêtre à la fois de v_1 et v_2 (puisque les feuilles ne sont reliées qu'à leurs ancêtres). On en déduit que v_1 et v_2 sont ancêtre et descendant l'un de l'autre, donc on peut aussi les relier dans T^3 . Etant donné qu'il n'y a jamais 2 feuilles consécutives visitées par P , on a $L(P) \leq 2L(P') + 1$. \square

Grâce à cette propriété, on n'étudie que les chemins maximaux dans T^{3c} , et l'on sait qu'ils ne diffèrent que d'un facteur borné de ceux de T^3 . On se place donc pour la suite dans l'arbre ternaire complété T^{3c} .

4.2 Arbres faisables et chemins dans T^{3c}

De même que dans T^Δ , on a cette propriété :

Propriété 4.2. *Pour tout sous-arbre binaire B de T^{3c} , il existe un chemin P dans T^{3c} qui parcourt exactement les nœuds de B .*

On peut même généraliser cette propriété, en définissant les *arbres faisables* : on dira qu'un arbre T est *faisable* s'il respecte les propriétés suivantes :

1. T est un arbre ternaire.
2. Il existe une injection \mathcal{I} de l'ensemble des nœuds de degré 3 dans T dans ceux de degré 1, telle que pour tout nœud v , $\mathcal{I}(v)$ est un ancêtre de v .

On remarque en particulier que tout arbre binaire est faisable.

La figure 9 donne un exemple de sous-arbre faisable, en vert, et de chemin associé.

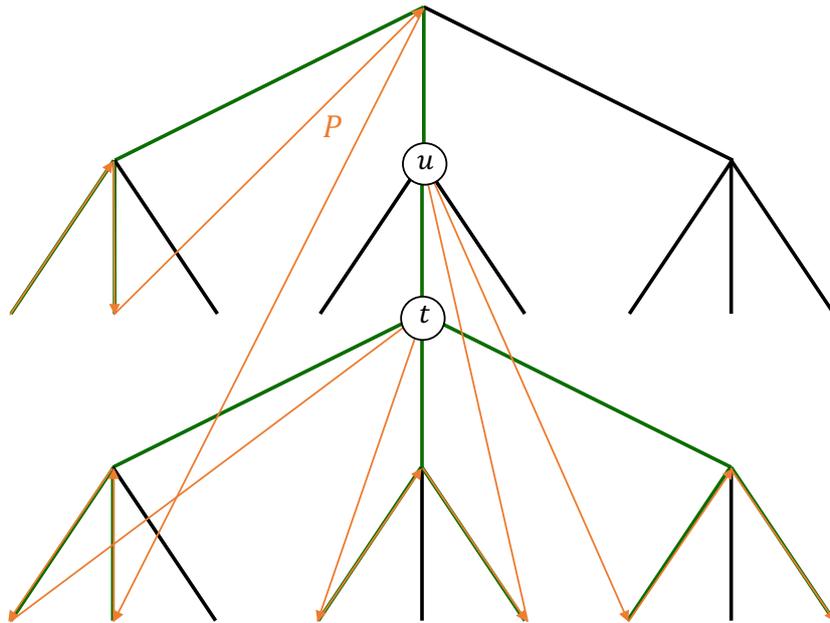


FIGURE 9 – Exemple d'un sous-arbre faisable, en vert, et d'un chemin qui le parcourt, en orange. A cet arbre est associée l'injection \mathcal{I} telle que $\mathcal{I}(t) = u$. On remarque que ce chemin est un chemin maximal de l'arbre noir, et est bien constitué d'une alternance de feuilles et de nœuds internes, comme ce sera prouvé dans le théorème 4.1.

Propriété 4.3. *Pour tout sous-arbre faisable T de T^{3c} , il existe un chemin P dans T^{3c} qui visite exactement les nœuds de T .*

De plus, il existe un tel chemin qui parcourt les feuilles de T de droite à gauche.

Démonstration. Par récurrence.

C'est évidemment vrai pour un arbre vide, ou un arbre réduit à une feuille.

Considérons maintenant un arbre faisable T de racine r , et une injection \mathcal{I} associée. On commence par réarranger \mathcal{I} de la sorte : tant qu'il existe deux nœuds ternaires t_1 et t_2 dans T ancêtres l'un de l'autre, t_1 ancêtre de t_2 , dont les images respectives u_1 et u_2 par \mathcal{I} sont tels que u_2 est ancêtre de u_1 (qui est ancêtre de t_1), on échange leurs images. L'injection résultat est toujours valable, et a cette propriété : si $\mathcal{I}(t) = r$, alors t est le premier (et seul) nœud ternaire sur la branche entre r et t .

On différencie les cas selon le degré de r :

1. Si r est de degré 1 : si r n'est pas dans l'image de \mathcal{I} , le sous-arbre de T formé en retirant r est faisable. L'hypothèse de récurrence donne un chemin P' que l'on peut augmenter trivialement en reliant une de ses extrémités à la racine. Supposons qu'il existe un nœud ternaire t de T tel que $\mathcal{I}(t) = r$. Il n'y a donc aucun autre nœud ternaire entre r et t . On note T_i , pour $i \in \{1, 2, 3\}$, les sous-arbres qui en sont issus, de gauche à droite (à tout instant de l'algorithme suivant). On construit maintenant un arbre T' à partir de T en faisant remonter t jusqu'à être un fils de r , en répétant cette opération : considérer le père p de t ,
 - Si $p = r$, s'arrêter.
 - Si p est de degré 2, notons ses fils gauche et droit T_g et T_d . Par symétrie, on suppose $t \in T_d$. On remplace alors T_1 par un arbre de racine p , de fils gauche T_g , et de fils droit l'ancien T_1 . On place t , avec sa nouvelle descendance, à la place de p .
 - Si p est de degré 1 : on suppose $\mathcal{I}(t_2) = p$ pour un certain t_2 . Soit i tel que t_2 est dans T_i (si t_2 n'existe pas on choisit $i=1$ arbitrairement). On remplace le i^{e} enfant de t , T_i , par p , ayant un seul enfant, l'ancien T_i . On place t , avec sa nouvelle descendance, à la place de p .

Cet algorithme est illustré en figure 10. On appelle T' le résultat de cette transformation. On remarque que les T_i sont tous faisables, car les nœuds de degré 1 ont toujours été placés du côté de leur antécédent par \mathcal{I} . On leur applique l'hypothèse de récurrence, qui donne des chemins P_i . On crée alors le chemin P' de la façon suivante : $P_1 - t - P_2 - r - P_3$, en reliant de sorte à bien visiter les feuilles de gauche à droite. Voir figure 11.

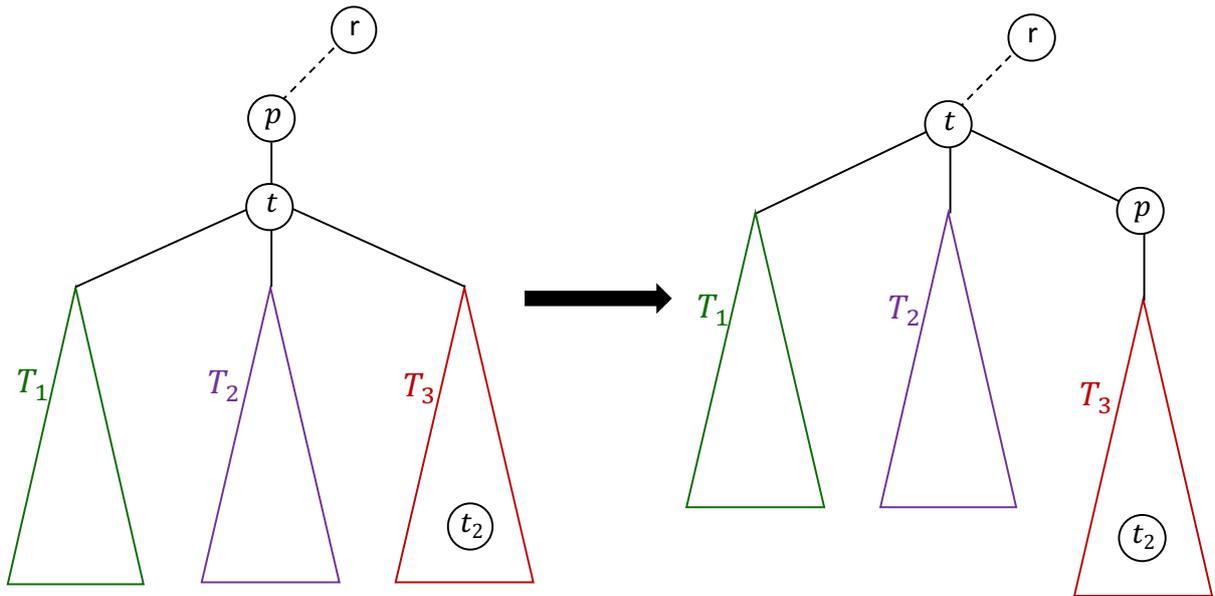


FIGURE 10 – Modification d'un sous-arbre faisable, pour faire remonter un nœud ternaire vers la racine. On voit ici le cas d'un père de degré 1. Algorithme utilisé dans la démonstration de la propriété 4.3.

On prouve alors aisément que la suite de nœuds qui définit P' dans T' définit également un chemin valide P dans T , qui visite exactement les points de T .

2. Si r est de degré 2, les deux sous-arbres T_1 et T_2 issus de r sont faisables, d'injections associées $\mathcal{I}_{|T_1}$ et $\mathcal{I}_{|T_2}$. Par hypothèse de récurrence il existe des chemins P_1 et P_2 parcourant chacun d'eux, et tels que les feuilles de chacun sont parcourues de gauche à droite. Il suffit de relier l'extrémité de P_1 reliée à la feuille la plus à droite de celui-ci, à r , et r à l'extrémité de P_2 reliée à la feuille de T_2 située la plus à gauche.
3. Si r est de degré 3, T n'est pas faisable, car $\mathcal{I}(r)$ ne peut pas être son ancêtre.

□

Etant donné un chemin P dans T^{3c} , on appelle maintenant *trace de P dans T^{3c}* , notée T_P^{3c} , le plus petit sous-arbre de T^{3c} qui contienne la racine de T^{3c} et tous les points visités par P . Elle est donc formée des nœuds de P et de tous leurs ancêtres. On a cette propriété, réciproque de 4.3 :

Propriété 4.4. *Pour tout chemin P dans T^{3c} , sa trace est un arbre faisable.*

Autrement dit, il existe une injection \mathcal{I} de l'ensemble des nœuds de degré 3 dans T_P^{3c} dans

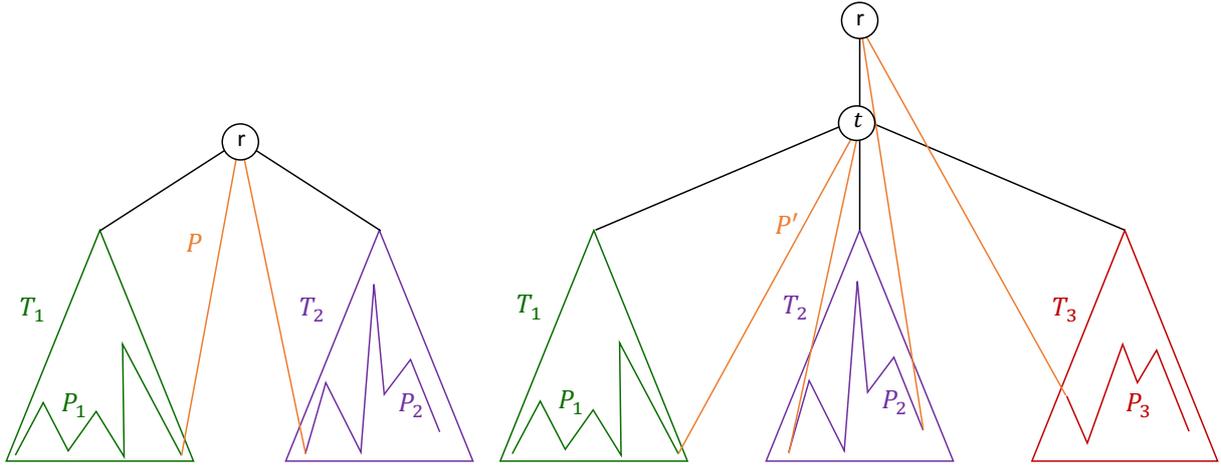


FIGURE 11 – Construction récursive d'un chemin ayant pour trace un sous-arbre faisable de T^{3c} , visitant ses feuilles de gauche à droite, dans les cas d'une racine de degré 2 et de degré 1.

ceux de degré 1, telle que pour tout nœud v de degré 3, $\mathcal{I}(v)$ est un ancêtre de v .

La figure 9 illustre l'existence d'une telle injection.

Démonstration. Nous allons procéder par récurrence sur le nombre de nœuds de degré 3 dans T_P^{3c} .

S'il y en a 0, l'existence d'une telle injection est évidente.

Supposons la propriété vraie pour tout arbre ternaire complet et tout chemin P contenant $\tau \geq 0$ nœuds ternaires. Soit T un arbre ternaire complet, avec arêtes supplémentaires entre chaque nœud et tous ses descendants, et soit P un chemin dans ce graphe, de trace T_P , contenant $\tau + 1$ nœuds à 3 fils. Considérons un tel nœud dans T_P , de profondeur $k - 1$ minimale (donc aucun de ses ancêtres n'est de degré 3 dans T_P).

On considère la branche située entre la racine et ce nœud, et on numérote ses nœuds ν_i , $i \in \{1, \dots, k\}$, tel que ce nœud est ν_k et la racine est ν_1 . Les ν_i pour $i < k$ sont de degré 2 au plus. P visite donc au plus 2 de leurs enfants, dont ν_{i+1} . On notera le sous-arbre issu de l'autre éventuel enfant T_i , et les 3 sous-arbres issus de ν_k T_k^{dir} , avec $dir \in \{g, c, d\}$. Voir figure 12.

On considère maintenant P . Il est constitué de tronçons inclus strictement dans l'un des T_i^{dir} , avec $i \in \{1, \dots, k\}$ et $dir \in \{\emptyset, g, c, d\}$, reliés entre eux par un passage par l'un des ν_i . On note n_i^{dir} le nombre de tels tronçons inclus dans T_i^{dir} . Un tronçon situé dans T_i^{dir} et un autre dans

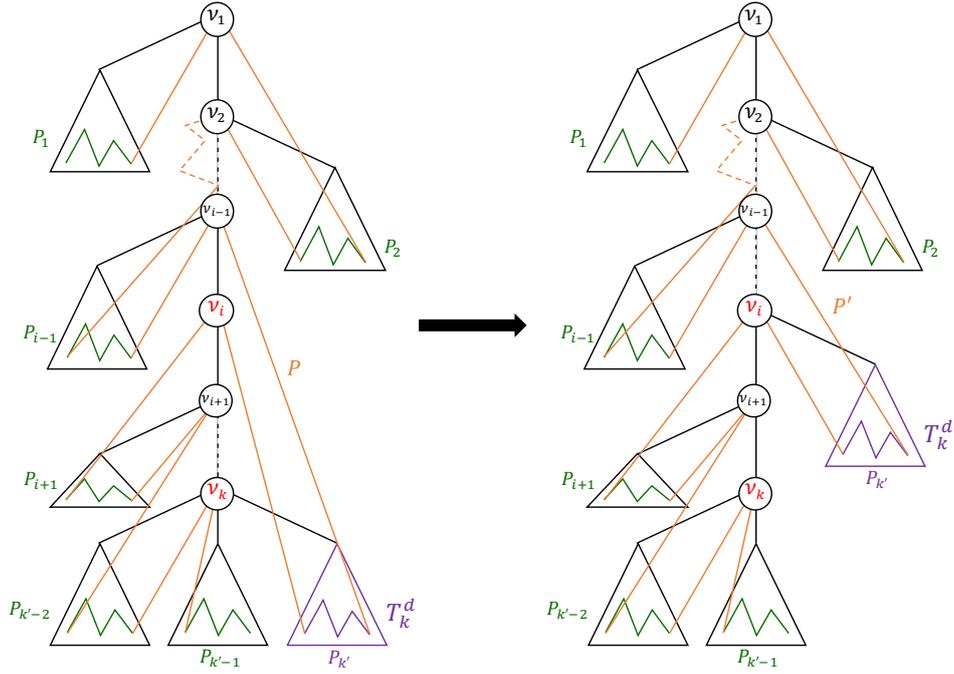


FIGURE 12 – Preuve par récurrence de la propriété 4.4.

On déplace le sous-arbre T_k^d comme fils d'un nœud unaire ν_i ancêtre de ν_k , tout en gardant un chemin P' proche de P , ce qui diminue le nombre de nœuds ternaires dans l'arbre, permettant ainsi d'utiliser l'hypothèse de récurrence. Pour P on définit finalement $\mathcal{I}(\nu_k) = \nu_i$.

T_j^{dir} consécutifs dans P ne peuvent être reliés que par ν_l avec $l \leq \min(i, j)$. Ces nœuds étant visités au plus une fois chacun, on a :

$$\forall k' < k, \sum_{1 \leq i \leq k'} n_i \leq k' \quad (3)$$

$$\sum_{1 \leq i \leq k, dir} n_i^{dir} \leq k + 1. \quad (4)$$

On en déduit que l'on peut numéroter les $k' \leq k + 1$ tronçons de P en partant du plus haut jusqu'au plus bas (en fonction du point du tronçon situé le plus haut), et les noter P_j , $1 \leq j \leq k' \leq k + 1$, avec $\forall j \in \{1, \dots, k'\}, P_j \subset T_{j'} | j \leq j'$ (le tronçon P_j est dans l'arbre T_j ou plus bas).

On suppose pour l'instant $n_k^d = 1$, donc $P_{k'}$ est le seul tronçon dans le fils droit de ν_k .

ν_k est de degré 3, donc $\forall dir, n_k^{dir} \geq 1$, donc d'après l'équation (4) $\sum_{1 \leq i \leq k-1} n_i \leq k - 2$. Nécessairement, $\exists i \leq k - 1 | n_i = 0$. Autrement dit, il existe $i \leq k - 1$ tel que ν_i est de degré 1 dans T_P . On fixe un tel i .

On construit un nouveau chemin P' à partir de P de la façon suivante :

$$P_1 - \nu_1 - P_2 - \nu_2 - \dots - P_{i-1} - \nu_{i-1} - P_{k'} - \nu_i - P_{i+1} - \dots - P_{k'-2} - \nu_k - P_{k'-1}.$$

Cela est possible grâce à la remarque ci-dessus : P_i et P_{i+1} sont toujours descendants de ν_i . P' est un chemin valide de même trace que P . Maintenant on modifie simultanément T et P' , en échangeant T_k^d et T_i . On note l'arbre résultant T' , et P'' le chemin naturellement obtenu dans T' à partir de P' , qui utilise donc un $P_{k'}$ situé dans T_k^d , à l'emplacement de l'ancien T_i .

Dans T' et P' , on a donc $n_k^d = 0$, donc ν_k est maintenant de degré 2 pour P'' . Les autres nœuds de degré 3 dans $T'_{P''}$ sont exactement ceux de T_P (éventuellement déplacés). On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à P'' dans T' . Il existe donc une injection \mathcal{I}' pour P'' . Cette injection se transfère facilement à P' , puisque si un nœud unaire est ancêtre d'un ternaire dans T' , alors c'est le cas aussi des nœuds correspondants dans T . Puis on étend cette injection à P et T_P en définissant $\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}'(t)$ pour tout nœud ternaire t de T' , et $\mathcal{I}(\nu_k) = \nu_i$. \mathcal{I} fait de T_P un sous-arbre faisable de T .

Cas général : supposons maintenant $n_k^d > 1$. Plusieurs portions de chemin sont donc dans T_k^d . On adapte la preuve précédente : maintenant $\sum_{1 \leq i \leq k-1} n_i \leq k - 1 - n_k^d$, donc il existe $i_1 < \dots < i_{n_k^d}$ tels que les ν_{i_j} sont tous unaires dans T_P . On adapte donc P' en plaçant chacun des n_k^d derniers tronçons juste avant les nœuds ν_{i_j} . Puis on construit T' en échangeant T_k^d avec $T_{i_{n_k^d}}$, (donc en fils du nœud unaire connu situé le plus bas), et on peut conclure comme ci-dessus. \square

On a donc en particulier prouvé, pour tout chemin P , l'existence de l'injection \mathcal{I} telle que décrite dans la définition des arbres faisables, relative à la trace de P . Cette injection est la généralisation de la notion de *réserve* au cas de T^{3c} . De même que dans le cas des RAN, un nœud ne peut voir ses 3 enfants visités par un chemin, que s'il a un ancêtre associé dont seulement 1 sous-arbre est visité par ce chemin. Cela signifie donc encore qu'il faut sacrifier une branche qui a de fortes chances d'avoir plus de descendants que celle que l'on ajoute au chemin.

De même que la réserve avait permis de démontrer la propriété 2.5, on obtient ici cette variante :

Propriété 4.5. *Pour tout chemin P , et tout entier positif k , le nombre de nœuds visités par P à distance k de la racine dans T_P^{3c} est inférieur à 2^k . L'égalité ne peut être atteinte que si T_P^{3c} est un arbre binaire jusqu'au niveau k .*

Démonstration. Par récurrence sur k . □

Les propriétés précédentes ont une autre conséquence immédiate : la trace d'un chemin maximal est exactement l'ensemble des points qu'il visite.

Propriété 4.6. *Les nœuds visités par un chemin maximal dans T^{3c} forment exactement un sous-arbre faisable de celui-ci, égal à sa trace.*

Démonstration. Etant donné un chemin maximal P , sa trace est faisable (d'après 4.4), donc il existe un chemin P' visitant tous ses nœuds (d'après la propriété 4.3). On a donc :

$$L(P) + 1 \leq |T_P^{3c}| \leq L(P') + 1 \leq L(P) + 1.$$

Donc toutes ces quantités sont égales, et donc P visite tous les nœuds de sa trace. □

Remarque : toutes les propriétés ci-dessus sont vraies aussi dans T^3 non complété, les démonstrations restent identiques.

S'intéresser aux chemins dans T^{3c} revient donc exactement à s'intéresser à ses sous-arbres faisables. On s'intéresse maintenant plus particulièrement à un chemin maximal dans T^{3c} , et à ses propriétés.

Propriété 4.7. *Pour tout chemin P de longueur maximale dans T^{3c} , les injections associées \mathcal{I} sont des bijections.*

Démonstration. Supposons que ça ne soit pas le cas. Il existe un nœud u de degré 1 dans T_P^{3c} sans antécédent par \mathcal{I} . On considère $T' = T \setminus \{u\}$, en remplaçant u par son fils qui est dans T_P^{3c} . On considère P' , un chemin qui parcourt tout T' (donné par la propriété 4.3). Ce chemin est

toujours valide dans T , de longueur $L(P') \geq L(P) - 1$. On considère donc maintenant P' dans T (de trace identique à celle de P , ne contenant pas u).

- Si u est la racine de T , on augmente P' en reliant une de ses extrémités à u , puis à f , un des fils de u non encore présent dans P' (existe car T^{3c} est complet et u est de degré 1).
- Sinon, il existe une arête reliant un ancêtre a de u à un de ses descendants d . On la remplace par $a - f - u - d$. Dans les deux cas, le résultat est strictement plus long que P .

□

Contrairement aux propriétés 4.3 à 4.6, on a ici besoin que l'arbre de départ soit complet, donc de se placer dans T^{3c} .

4.3 Structure des chemins maximaux

Les chemins maximaux ont une structure particulière, caractérisée par certaines propriétés immédiates :

Propriété 4.8. *Soit P un chemin maximal dans T^{3c} , v un nœud visité par P , et w un nœud non visité par P . Alors :*

1. *Tous les ancêtres de v sont visités par P , et aucun descendant de w ne l'est. En particulier la racine de T^{3c} est dans P .*
2. *Si v est relié à un de ses ancêtres dans P , alors tous ses descendants sont dans P .*
3. *Si v est une extrémité de P , alors toute sa descendance est dans P .*
4. *Si v n'est pas une feuille, au moins deux feuilles parmi ses descendants sont visitées par P .*
5. *Si $n \geq 4$, P n'est pas hamiltonien.*

Remarque : les trois premières sont vraies aussi dans T^3 .

Démonstration. 1. Ceci est simplement une reformulation de la propriété 4.6.

2. Supposons que c'est faux. Il existe un descendant d de v non visité par P , et v est relié à un de ses ancêtres, a . On peut remplacer l'arête reliant a à v dans P par le chemin $a - d - v$, ce qui augmente strictement la longueur du chemin.

3. Sinon, on prolonge facilement P en visitant un descendant d de v non présent dans P .
4. Si v est relié à l'un de ses ancêtres ou est une extrémité du chemin, les points précédents montrent que tous les descendants de v (dont au moins trois feuilles) sont dans P . Sinon, v est relié à deux de ses descendants. Ou bien v est relié à deux feuilles dans ses descendants (ce qui finit la preuve), ou bien il est relié à un descendant non-feuille v' , qui est donc relié à un de ses ancêtres : par le point 2, toute sa descendance, dont au moins trois feuilles, sont dans P .
5. Cela vient trivialement du fait que la racine ne peut pas être de degré 3 dans T_P^{3c} , car elle n'aurait pas d'image par \mathcal{I} .

□

On peut poursuivre dans cette voie, et également prouver les deux propriétés suivantes :

Propriété 4.9. *Les extrémités d'un chemin maximal sont des feuilles.*

Démonstration. Supposons que c'est faux. Soit v une extrémité de P qui est un nœud interne. Nécessairement toute sa descendance est visitée par P (propriété 4.8). On parcourt P en partant de v . On considère la 1^{re} arête de la forme $a_1 - d_1$ telle que a_1 soit un ancêtre de v , ou v lui-même, et d_1 un descendant strict de v . On note P_1 la portion (éventuellement vide) de P entre v et a_1 . On continue de suivre le chemin, jusqu'à la 1^{re} arête entre d_2 (éventuellement égal à d_1), descendant strict de v , et a_2 , son ancêtre strict. On note P_2 la portion $a_1 - a_2$ de P . Après une portion P_3 de P sans jamais revenir dans la descendance de v , on a nécessairement une arête de la forme $a_3 - d_3$, le premier étant un ancêtre et le second un descendant de v (notons que a_3 et v sont nécessairement distincts). Puis le chemin se finit par une portion P_4 (autorisée à retourner dans les ancêtres de v). Voir la figure 13.

On crée le chemin P' en supprimant l'arête $a_3 - d_3$, et en la remplaçant par $v - d_3$. P' commence en a_3 , puis réalise le parcours suivant :

$$a_3 - P_3 - a_2 - d_2 - P_2 - d_1 - a_1 - P_1 - v - d_3 - P_4.$$

Ce parcours est valable (avec P_1 , P_2 et P_3 parcourus en sens inverse par rapport au parcours dans P), et de même longueur que P . Son point de départ est a_3 , nécessairement situé strictement

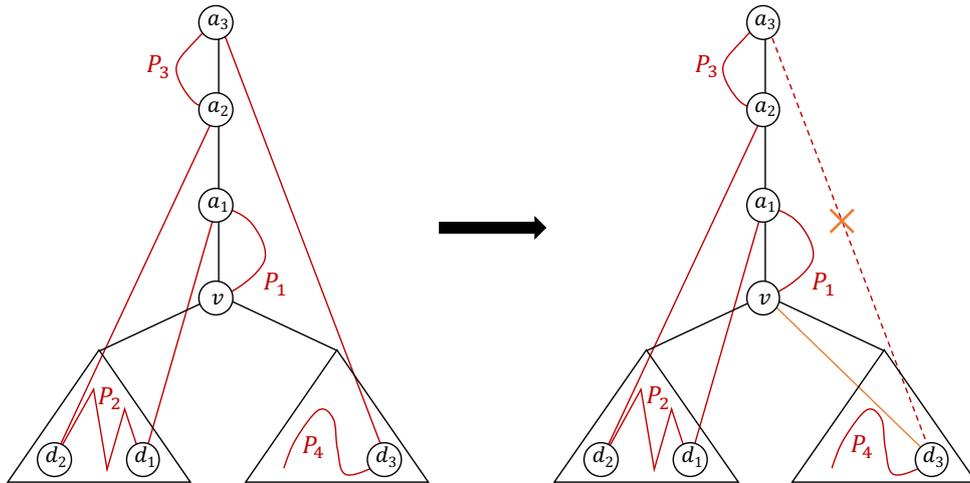


FIGURE 13 – Preuve de la propriété 4.9. On considère un chemin P dont une des extrémités, v , est un nœud interne de l'arbre. On crée un nouveau chemin P' à partir de P dont une extrémité, a_3 , est un ancêtre strict de v . On peut répéter l'opération indéfiniment, ce qui est une contradiction, puisqu'au bout d'un moment il n'y a plus d'ancêtres stricts.

au-dessus de v . On peut donc recommencer, et ainsi créer une suite de chemins maximaux ayant une extrémité strictement plus haute à chaque étape. Une telle suite est impossible (la suite des profondeurs de l'extrémité en question est une suite strictement décroissante dans \mathbb{N}), d'où une contradiction. \square

Théorème 4.1. *Tout chemin maximal P est une alternance de feuilles et de nœuds internes, dont les extrémités sont des feuilles.*

Démonstration. La démonstration repose sur le même principe que la propriété 4.9. Nous allons prouver que deux nœuds internes ne peuvent pas être reliés entre eux dans un chemin maximal P , en faisant remonter strictement une telle liaison dans l'arbre. Il est trivial que 2 feuilles ne peuvent pas être reliées entre elles, donc cela est suffisant.

Supposons que c'est possible. Soient v_1 et v_2 deux nœuds internes reliés entre eux. Par symétrie, on peut supposer que v_2 est l'ancêtre de v_1 . Par la propriété 4.8, toute la descendance de v_1 (donc au moins 1 élément) est visitée par P . On appelle *sens direct* le sens de parcours de P où l'on visite v_1 avant v_2 .

On a deux cas à considérer, selon que l'on visite ou non des descendants de v_1 après v_2 , quand on parcourt P en sens direct.

- 1^{er} cas : on visite bien des descendants de v_1 après v_2 en sens direct. On parcourt P dans ce sens à partir de v_1 . On note $v_3 - v_4$ la première arête reliant un ancêtre de v_1 (v_3) à un de ses descendants (v_4). Puis on note $v_5 - v_6$ la première arête qui suit entre un descendant de v_1 et un de ses ancêtres. On note encore v_0 et v_7 le départ et l'arrivée du parcours de P en sens direct. On note P_{ij} le morceau (éventuellement vide si $v_i = v_j$) de parcours de P entre v_i et v_j . On crée alors le parcours P' en supprimant les arêtes $v_1 - v_2$ et $v_5 - v_6$, et en les remplaçant par $v_1 - v_5$ et $v_2 - v_6$ comme suit :

$$v_0 - P_{01} - v_1 - v_5 - P_{54} - v_4 - v_3 - P_{32} - v_2 - v_6 - P_{67} - v_7.$$

P' est de même longueur que P . On a alors fait remonter l'arête qui liait 2 nœuds internes, $v_1 - v_2$, remplacée par la nouvelle $v_2 - v_6$. v_6 est nécessairement un ancêtre strict de v_1 (car ils sont séparés par au moins un descendant strict de v_1 dans P). Voir la figure 14.

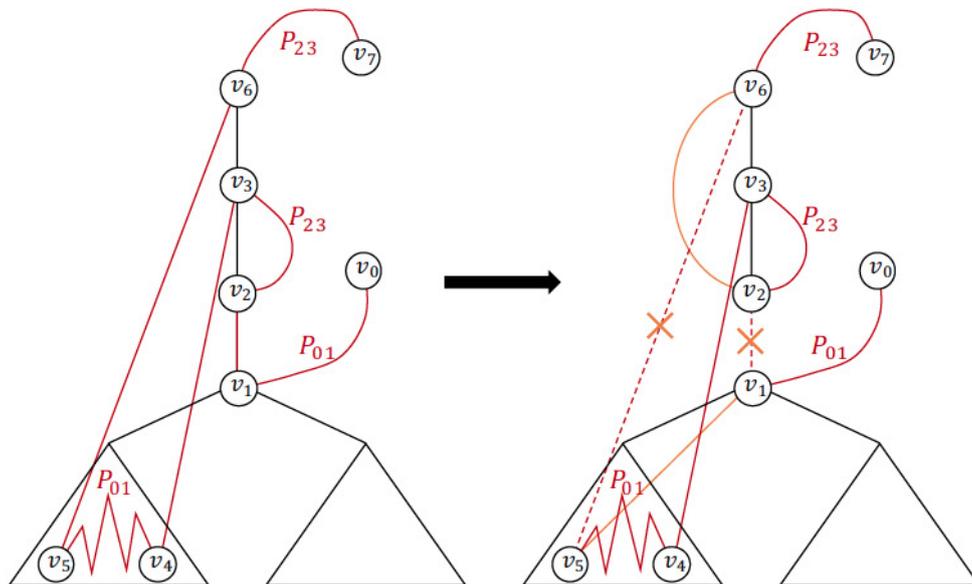


FIGURE 14 – Cas 1 de la démonstration du théorème 4.1. On considère un chemin P dans lequel deux nœuds internes sont reliés entre eux par une arête. On crée un chemin P' à partir de P ayant la même propriété, mais où le nœud le plus bas de l'arête en question remonte strictement dans l'arbre. On obtient la même contradiction que pour la propriété 4.9.

- 2^e cas : on ne visite aucun descendant de v_1 après v_2 en sens direct. Comme ils sont tous visités, on les visite après v_1 en sens indirect. On se place dans le sens indirect, à

partir de v_1 . On définit alors les v_i , pour $i \in \{0, 3, 4, 5, 6, 7\}$ exactement comme dans le cas précédent, à une exception près : entre v_1 et v_3 , on exige au moins 1 passage dans la descendance stricte de v_1 (et une remontée, v_3 est donc un ancêtre strict de v_1). (On sait que les 3 fils de v_1 sont visités). On construit P' de la façon suivante :

$$v_7 - P_{72} - v_{23} - P_{31} - v_1 - v_4 - P_{45} - v_5 - v_6 - P_{60} - v_0.$$

P' est de même longueur que P , et on a essentiellement remplacé $v_1 - v_2$ par $v_2 - v_3$. Or v_3 est un ancêtre strict de v_1 (ils sont séparés au moins par un descendant strict de ce dernier dans P).

Dans les deux cas, on a créé un chemin P' de même longueur que P , avec une arête reliant v_2 à un ancêtre strict de v_1 . On crée ainsi une suite de chemins maximaux et d'arêtes reliant 2 nœuds internes dans ceux-ci, telle que l'extrémité la plus basse de l'arête en question remonte strictement à chaque étape. On a donc à nouveau créé une suite strictement décroissante d'entiers naturels, ce qui est impossible. Donc deux nœuds internes ne peuvent pas être reliés dans un chemin maximal. \square

Les conditions nécessaires pour être un chemin maximal, montrées dans cette partie, ne sont pas suffisantes en général. En effet, tout sous-arbre binaire de T^{3c} est parcouru de façon naturelle par un chemin respectant toutes ces propriétés, mais on a vu (en 2.5) que ces sous-arbres sont parfois beaucoup plus petits que les chemins maximaux. Les chemins respectant les propriétés 4.8, 4.9 et l'alternance entre feuilles et nœuds internes sont des minima locaux, l'équivalent pour ce problème des chemins non évidemment prolongeables.

Nous avons donc prouvé que les chemins maximaux dans T^{3c} sont constitués d'une alternance de feuilles et de nœuds internes, dont les deux extrémités sont des feuilles. On peut en outre choisir de parcourir ces feuilles de gauche à droite. Nous avons également prouvé que, pour chaque nœud de degré 3 dans l'arbre associé au chemin, il y a un nœud de degré 1 parmi ses ancêtres, ce qui empêche de visiter 2 de ses enfants. Ce qui n'est souvent pas une bonne idée, étant donné que les branches les plus hautes de l'arbre ont le plus de descendants. Ainsi, le nombre maximum de nœuds de profondeur k visités par

un même chemin est inférieur à 2^k , atteints uniquement avec un haut d'arbre binaire. Toutes ces propriétés confortent donc la conjecture que les choix non binaires sont rares avec forte probabilité, et ont lieu vers le bas de l'arbre, et que donc presque certainement $\mathcal{L}_n \in \Theta(\mathcal{B}_n \times F_n)$ avec F_n pas trop grand ($F_n \in o(n^\delta)$ pour tout $\delta > 0$ par exemple).

4.4 Généralisation aux arbres de degré d

On observe que toutes les propriétés ci-dessus sont en fait vraies (ou facilement adaptables) pour un arbre de degré $d \geq 2$ quelconque, plutôt que 3 ($d = 2$ manque d'intérêt cependant, il y a évidemment un chemin hamiltonien dans ceux-là). Cela correspond à l'utilisation de graphes Apolloniens aléatoire multi-dimensionnels, en $d - 1$ dimensions, tels que décrits dans [12]. Toute notre étude se généralise donc bien aux cas des dimensions supérieures.

5 Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons prouvé de nombreuses propriétés du plus long chemin dans un RAN. Nous avons notamment défini la notion de réserve, qui formalise le fait que, si un chemin visite les trois enfants d'un triangle, alors il n'a visité qu'un seul enfant d'un ancêtre de ce triangle, ce qui représente en général un manque plus grand que le gain. Nous avons également trouvé une formule pour savoir si deux nœuds sont adjacents, à partir de leur numérotation. Grâce à cela nous avons pu nous ramener au cas plus général du plus long chemin dans un arbre ternaire complet, où chaque nœud est en plus relié à tous ses ancêtres. Nous avons montré plusieurs propriétés du plus long chemin dans ce cas, en particulier qu'il est constitué d'une alternance de feuilles et de nœuds internes, et qu'il est soumis au même type de contrainte que la réserve des RAN.

Beaucoup de ces propriétés sont communes avec le plus grand sous-arbre binaire de l'arbre T^Δ associé au graphe. On conjecture donc que l'on pourrait trouver une relation entre \mathcal{L}_n , \mathcal{B}_n , et une troisième quantité F_n tenant compte du nombre de fois où un chemin

fait un choix « non binaire », comme emmagasiner de la réserve sur un triangle, pour qu'un descendant ait ses trois enfants visités. Cette relation pourrait par exemple être de la forme $\mathcal{L}_n \in \Theta(\mathcal{B}_n + F_n)$, avec $F_n \in o(\mathcal{B}_n)$ presque certainement, mais pas de façon déterministe, puisqu'on a exhibé un contre-exemple. Trouver une telle quantité F_n et prouver cette conjecture formeraient un travail futur intéressant.

Bibliographie

- [1] Marie Albenque and Jean-François Marckert. Some families of increasing planar maps. *Electronic Journal of Probability*, pages 1624–1671., 2008.
- [2] José S. Andrade, Hans J. Herrmann, Roberto F. S. Andrade, and Luciano R. da Silva. Apollonian networks : Simultaneously scale-free, small world, euclidean, space filling, and with matching graphs. *Phys. Rev. Lett.*, 94 :018702, Jan 2005.
- [3] Anthony Bonato. *Combinatorial and Algorithmic Aspects of Networking : First Workshop on Combinatorial and Algorithmic Aspects of Networking, CAAN 2004, Banff, Alberta, Canada, August 5-7, 2004, Revised Selected Papers*, chapter A Survey of Models of the Web Graph, pages 159–172. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2005.
- [4] Nicolas Broutin and Luc Devroye. Large deviations for the weighted height of an extended class of trees. *Algorithmica*, 46(3) :271–297, 2006.
- [5] Fan Chung and Linyuan Lu. *Complex Graphs and Networks (Cbms Regional Conference Series in Mathematics)*. American Mathematical Society, Boston, MA, USA, 2006.
- [6] A. Collecchio, A. Mehrabian, and N. Wormald. Longest paths in random Apollonian networks and largest r -ary subtrees of random d -ary recursive trees. *ArXiv e-prints*, April 2014.
- [7] Colin Cooper and Alan Frieze. Long paths in random Apollonian networks. *Internet Mathematics*, 11(4-5) :308–318, 2015.

- [8] Jonathan P. K. Doye and Claire P. Massen. Self-similar disk packings as model spatial scale-free networks. *Phys. Rev. E*, 71 :016128, Jan 2005.
- [9] Ehsan Ebrahimzadeh, Linda Farczadi, Pu Gao, Abbas Mehrabian, Cristiane M. Sato, Nick Wormald, and Jonathan Zung. On longest paths and diameter in random Apollonian networks. *Random Structures & Algorithms*, 45(4) :703–725, 2014.
- [10] Alan Frieze and Charalampos E. Tsourakakis. On certain properties of random Apollonian networks. In *Algorithms and Models for the Web Graph*, volume 7323 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 93–112. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [11] Z. X. Wu, X. J. Xu, and Y. H. Wang. Comment on "Maximal planar networks with large clustering coefficient and power-law degree distribution". Maximal planar networks with large clustering coefficient and power-law degree distribution. Technical Report cond-mat/0509174, Sep 2005.
- [12] Zhongzhi Zhang, Lili Rong, and Francesc Comellas. High-dimensional random Apollonian networks. *Phys. A*, 2006.
- [13] Tao Zhou, Gang Yan, and Bing-Hong Wang. Maximal planar networks with large clustering coefficient and power-law degree distribution. *Phys. Rev. E*, 71 :046141, Apr 2005.