L'instabilité de l'espace de Sitter

Vincent Comeau
Département de physique
Université McGill, Montréal

Mémoire soumis à l'Université McGill
en vue de l'obtention du grade de
Maîtrise en sciences – Physique

Août 2020

Tout l'espace brumeux que voit un homme assis sur une hauteur, en regardant la mer couleur de vin, tout cet espace est la portée d'un bond pour les chevaux haut-bruyants des dieux.

Iliade d'Homère (V, 770–772)

Je ne sais pas quand j'aurai le temps de travailler à l'équation du problème des trois corps. En attendant, ne me mandez pas ce que vous avez fait ; je veux m'y essayer à loisir.

D'Alembert, dans une lettre à Lagrange
(16 octobre 1764)

Remerciements

Je tiens à remercier mon superviseur Prof. Robert Brandenberger, notamment pour ses conseils toujours précis, son encadrement souple et libre, ainsi que pour sa persistance louable à vouloir parler le français avec moi. Je remercie également le Fonds de recherche du Québec (Nature et Technologies), de même que l'Université McGill, pour le support financier dont j'ai pu bénéficier durant les deux années de cette maîtrise. Enfin, je remercie Prof. Simon Caron-Huot pour sa lecture attentive de ce mémoire et ses commentaires instructifs.

Résumé

Ce mémoire traite de cosmologie et porte plus particulièrement sur l'instabilité des espaces en expansion, comme celui de Sitter, sous l'effet de petites perturbations de leur métrique. La principale question que l'on tente de discuter dans ce mémoire concerne l'effet des modes infrarouges des perturbations métriques sur le taux d'expansion local de l'espace, ainsi que sur son contenu en énergie-impulsion. Par exemple, on considère un espace en expansion contenant un fluide parfait, ou encore un champ scalaire, et l'on montre que, dans ces cas, le taux d'expansion de l'espace n'est pas modifié par les modes infrarouges des perturbations métriques, lorsque celles-ci sont traitées comme des champs classiques. Ce résultat demeure valide à tous les ordres perturbatifs et pour quasiment tout type de perturbations (sauf pour des perturbations vectorielles). De plus, lorsque les perturbations métriques sont traitées plutôt comme des champs quantiques, elles ont alors un effet sur le taux d'expansion de l'espace, et ce dès le premier ordre dans les corrections quantiques.

Dans ce cas, la correction de premier ordre ne dépend pas directement de la variance des perturbations, mais seulement de sa dérivée par rapport au facteur d'échelle. Elle est donc négligeable dans un espace de Sitter, sans l'être toutefois pour des espaces plus réalistes, tels que ceux contenant un champ scalaire.

Summary

This thesis is about cosmology, and deals more particularly with the instability of expanding spaces, such as de Sitter space, due to small perturbations of their metric. The main question we try to address has to do with the effect of the infrared modes of the metric perturbations on the local expansion rate of the space, and on its content in energy-momentum. For instance, we consider an expanding space filled with a perfect fluid, or with a scalar field, and show that, in these cases, the expansion rate of the space is not modified by the infrared modes of the metric perturbations, when these perturbations are treated as classical fields. This result remains valid at all orders, and for most types of perturbations (except for vector perturbations). Moreover, when the metric perturbations are treated as quantum fields, they then have an effect of the expansion rate of the space, even at first order in the quantum corrections. In that case, the first-order correction to the expansion rate does not depend directly on the two-point function of the perturbations, but only on its derivative with respect to the scale factor. It is therefore negligible for de Sitter space, but not for more realistic spaces, such as those containing a general scalar field.

Table des matières

Introduction

Ce mémoire s'inscrit dans le domaine de la cosmologie et porte plus particulièrement sur la stabilité relative des espaces en expansion, comme celui de Sitter. À cet égard, bien que le titre de ce mémoire fasse mention de l'espace de Sitter, on n'y traitera pas exclusivement de ce cas. D'autres types d'espaces, par exemple ceux contenant un fluide parfait ou encore un champ scalaire, seront aussi considérés en temps et lieux, dans le but de généraliser ou de nuancer les conclusions pouvant être atteintes dans le cas d'un espace purement de Sitter.

Deux principes de la cosmologie. Deux idées centrales de la cosmologie contemporaine joueront un rôle de premier plan dans ce mémoire. D'abord, il est admis depuis au moins un demi-siècle que l'univers dans lequel nous nous trouvons est aujourd'hui en expansion, de sorte que les objets qu'il contient s'éloignent constamment les uns des autres, sans qu'il n'aient eux-mêmes besoin de se mouvoir. C'est plutôt l'espace en tant que tel qui s'étire au fil du temps.

D'un point de vue historique, la première indication expérimentale de cette expansion fut fournie par les observations de Hubble [3], publiées en 1929, qui montrèrent que les galaxies situées assez loin de la nôtre tendent à s'en éloigner davantage. Plus spécifiquement, Hubble a montré que la vitesse d'éloignement des galaxies semble à peu près proportionnelle à leur distance, les plus lointaines s'éloignant d'autant plus rapidement.

Plusieurs hypothèses furent avancées afin d'expliquer cette curieuse observation de Hubble. Par exemple, l'une d'elles consistait à supposer que la lumière émise par les galaxies lointaines, en voyageant jusqu'à nous, perd une partie de son énergie, en traversant notamment certains puits de potentiel desquels elle doit s'échapper. Cette lumière nous parvient ainsi plus rouge qu'elle ne l'était au moment de son émission, donnant l'impression que les galaxies l'ayant produite s'éloignent de nous *.

Il s'agissait là peut-être de l'hypothèse la plus plausible, mais on sait aujourd'hui que ce n'était pas la bonne. Le rougissement des spectres de galaxies avec leur distance semble être causé par un véritable mouvement d'éloignement de celles-ci, provoqué par l'expansion de l'espace dans lequel elles se trouvent plongées. Cette idée fut défendue dès les années 1920 par des physiciens comme Lemaître et Eddington, mais il fallut attendre les années 1960, avec la découverte expérimentale du fonds diffus cosmologique, pour que cette hypothèse soit proprement confirmée et acceptée par la communauté scientifique.

Ce mémoire repose donc notamment sur cette idée que notre univers est en expansion. Tous les espaces tour à tour étudiés dans la suite de ce travail seront de ce type. De manière générale, on dit d'un espace qu'il est en expansion (ou en contraction) si les distances entre ses points varient avec le temps, au lieu de rester constantes, suivant le même facteur d'échelle. Par exemple, si deux points sont séparés par une certaine distance d à un temps t, alors ils seront séparés par une autre distance d' à un temps ultérieur t', selon la règle

$$\frac{d}{a} = \frac{d'}{a'},$$

où $a = a(t)$ est une fonction indépendante des deux points choisis, représentant le facteur d'échelle de tout l'espace. Ce facteur d'échelle n'est qu'une simple constante pour les espaces statiques, dans lesquels les distances sont conservées ($d = d'$ si $a = a'$), alors qu'il dépend nécessairement du temps lorsque l'espace est en expansion. Dans un espace de Sitter, par exemple, le facteur d'échelle augmente de manière exponentielle avec le temps, alors qu'il varie seulement suivant une certaine puissance du temps dans les espaces contenant de la matière froide ou de la radiation. Pour caractériser la dépendance temporelle du facteur d'échelle, on calcule typiquement son taux de variation,

$$H = \frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}.$$

*Sans défendre cette hypothèse, Eddington la résume dans [4], chapitre I §3.

La quantité précédente est fondamentale en cosmologie, car sa valeur peut être directement déterminée à partir des spectres de lumière mesurés pour ces lointaines galaxies en mouvement de récession par rapport à nous. Dans ce mémoire, elle sera désignée alternativement comme le taux d'expansion de l'espace ou le facteur de Hubble, bien que sa définition en termes du facteur d'échelle ait été formulée pour la première fois par Lemaître [2], dès 1927.

L'autre idée centrale qui jouera un rôle dans ce mémoire provient de la relativité générale d'Einstein. Cette dernière sert en effet de support théorique à la cosmologie contemporaine, au même titre que la théorie de Newton servait de base à l'ancienne mécanique céleste. Dans la physique newtonienne, l'espace ne joue qu'un rôle passif, en ne servant que d'enceinte aux diverses particules massives, à l'intérieur de laquelle celles-ci peuvent se mouvoir et interagir entre elles. Que cette enceinte soit plate ou courbée, plane ou sphérique, il ne s'agit là que d'un simple détail dont la physique de Newton peut très bien tenir compte.

La véritable nouveauté conceptuelle introduite par Einstein dans la physique ne concerne donc pas à proprement parler la courbure de l'espace, mais le caractère dynamique de cette courbure. Dans la physique einsteinienne, l'espace joue un rôle actif, au même titre que les particules ou les champs qu'il renferme. Il ne se contente pas de contenir ces particules et ces champs, mais il interagit avec eux, adaptant sa géométrie selon la nature de la matière qu'il contient. De petits changements dans la distribution ou la densité de cette matière entraînent alors des changements conséquents dans la géométrie de l'espace, lesquels modifient en retour les propriétés de la matière qui s'y trouve.

Idées principales de ce mémoire. Les raisonnements présentés dans ce mémoire reposent en quelque sorte sur la combinaison des deux idées que l'on vient d'évoquer. On va considérer des espaces en expansions, en supposant que leur géométrie subit de petites perturbations. Le but sera alors de déterminer les effets résultant de ces perturbations, d'une part sur l'énergie-impulsion contenue dans ces espaces, d'autre part sur la forme de leur facteur d'échelle et de leur taux d'expansion.

Dans le premier chapitre, les perturbations métriques affectant la géométrie de l'espace seront traitées de manière purement classique, alors qu'elles seront considérées comme des champs quantiques dans le dernier chapitre. Cette différence de traitement aura d'ailleurs un impact considérable sur les conclusions tirées au terme de chacune de ces études. On verra que, dans le premier cas, les perturbations métriques en viennent à modifier l'énergie-impulsion contenue dans l'espace, sans toutefois affecter substantiellement son taux d'expansion, et ce à tous les ordres perturbatifs. Dans le second cas, une situation inverse se produit, du moins quand on se limite au premier ordre. Les perturbations métriques modifient alors le taux d'expansion de l'espace, sans trop altérer l'énergie-impulsion qui s'y trouve.

Plus généralement, on s'attend à ce que les perturbations métriques affectant un espace en viennent *nécessairement* à laisser quelque trace sur la géométrie et le contenu en énergie-impulsion de cet espace. Une telle conclusion paraît inévitable : l'espace perturbé, du seul fait des perturbations qu'il contient, cesse d'être rigoureusement identique à l'espace non perturbé auquel il ressemble. Cette ressemblance n'est vraiment qu'approximative, n'étant valide que pour les premiers ordres et pour des perturbations de petite amplitude. Il en va d'ailleurs d'un espace en expansion comme de n'importe quel système physique pouvant être considéré en équilibre. J'adopte ici le point de vue de Lagrange, qu'il a résumé à l'occasion d'une lettre envoyée à son mentor et ami d'Alembert, à propos des états d'équilibre pouvant survenir dans un fluide.

> « En général, il me semble que l'équilibre est un état unique, et qu'un équilibre approché et même aussi approché qu'on voudra sera toujours un non-équilibre, de sorte que pour pouvoir tirer des conclusions exactes sur cette matière il faut absolument pouvoir résoudre le problème en toute rigueur, ou au moins avoir égard aux quantités des différents ordres, en sorte qu'on puisse s'assurer que l'équilibre rigoureux est possible*. »

Ainsi, selon Lagrange, l'équilibre d'un fluide représente un état nécessairement instable, du fait qu'il cesse de représenter rigoureusement le même équilibre dès qu'il subit

*Lettre de Lagrange à d'Alembert datant du 15 juillet 1769 [1].

certaines perturbations. Pour caractériser correctement le nouvel état obtenu après ces perturbations, il faudrait en principe résoudre à nouveau le problème, non seulement au premier ordre, mais « en toute rigueur », c'est-à-dire à tous les ordres.

En appliquant cette idée de Lagrange au cas considéré ici, à savoir celui d'un espace de Sitter, on peut donc dire que cet espace est nécessairement instable, dans la mesure où l'état d'équilibre qu'il représente doit forcément disparaître lorsqu'il est mis en présence de quelques perturbations. En particulier, son taux d'expansion, qui est constant en l'absence de perturbations, doit cesser de l'être à partir d'un certain ordre lorsque l'espace est perturbé. La vraie question n'est donc pas de savoir si l'espace de Sitter est stable ou instable, mais de quelle façon, à quel ordre et dans quelles conditions une telle instabilité en vient à se manifester le plus rapidement.

À cet égard, on va surtout se concentrer, dans ce mémoire, sur les contributions infrarouges des perturbations métriques, c'est-à-dire sur leurs modes de grandes longueurs d'onde, dans le but de déterminer si ces modes peuvent être une cause efficace d'instabilité dans des espaces en expansion. La terminologie employée ici est tirée de la physique optique, où la lumière infrarouge possède de grandes longueurs d'onde, du moins par opposition à la lumière ultraviolette qui en possède de plus petites.

Ces modes infrarouges s'avèrent intéressants entre autres parce qu'ils sont particulièrement faciles à traiter, comme on l'expliquera dans le premier chapitre. Par exemple, des solutions non perturbatives aux équations d'Einstein peuvent être obtenues lorsqu'on se limite à ces modes, en négligeant tous les autres. D'un strict point de vue mathématique, il vaut donc la peine de se concentrer d'abord sur ces modes, pour ensuite peaufiner l'analyse en incluant ceux de plus petites longueurs d'onde.

Les modes infrarouges des perturbations métriques présentent également un intérêt d'un point de vue cosmologique, dans la mesure où leur importance physique augmente au fil du temps, avec l'expansion de l'espace. Par définition, ces modes regroupent toutes les perturbations de grandes longueurs d'onde, mais ne dépassant pas une certaine longueur d'onde maximale, proportionnelle à la taille de l'espace. On peut imaginer, à cet égard, que l'on se restreint à une certaine section d'univers possédant une taille finie, mais augmentant avec le temps en raison de l'expansion de l'univers dans son ensemble. Ainsi, comme cette section s'agrandit au fil du temps, elle parvient à contenir de plus en plus de perturbations métriques de grandes longueurs d'ondes.

Pour être plus précis, supposons que cette section d'univers possède une certaine taille représentée par la longueur λ en coordonnées comobiles, ce qui signifie simplement que cette longueur demeure constante, qu'elle n'est pas affectée par l'expansion de l'espace. De par sa taille finie, cette région de l'univers ne peut contenir que les modes des perturbations métriques dont la longueur d'onde en coordonnées comobiles est inférieure à λ. La longueur d'onde maximale pour les perturbations incluses dans la région est donc $\lambda_{\max} = a\lambda$. Le point à retenir est que cette longueur d'onde maximale augmente avec le temps, étant proportionnelle au facteur d'échelle de l'espace, de sorte que de plus en plus de modes possédant de grandes longueurs d'onde parviennent à se loger dans la région considérée. L'importance de ces modes dans la description d'une telle section d'univers s'accroît ainsi progressivement avec son expansion.

En particulier, on s'attend à ce que les modes infrarouges des perturbations générées dans l'univers primordial, bien qu'initialement insignifiants, en viennent à acquérir plus d'importance au fil de l'évolution de l'univers, au point de produire peut-être des effets considérables aujourd'hui. Une telle idée sera explorée avec quelques détails dans les premier et dernier chapitres de ce mémoire.

Pourquoi l'espace de Sitter. On a déjà mentionné plus haut que ce mémoire ne traitera pas seulement du cas d'un espace de Sitter, c'est-à-dire d'un espace en expansion ne contenant qu'une constante cosmologique. Pourquoi alors, si tel est le cas, faire figurer le nom de cet espace dans le titre de ce travail ? C'est que l'espace de Sitter incarne en quelque sorte l'archétype des espaces en expansion. Il fut le premier espace de ce genre à être découvert (par W. de Sitter en 1917), ainsi que le deuxième modèle cosmologique à être formulé sur les bases de la relativité générale, après celui d'Einstein.

De plus, il s'avère que l'univers physique, en deux moments charnières de son histoire, en vint à ressembler plus ou moins à un espace de Sitter. D'une part, durant la majeure partie de sa période d'inflation, l'univers primordial subissait une expansion fortement accélérée, son facteur d'échelle augmentant alors de manière à peu près exponentielle avec le temps, comme dans un espace de Sitter. D'autre part, notre univers actuel s'apparente lui aussi plus ou moins à un espace de Sitter, dans la mesure où sa composante principale semble être une constante cosmologique.

À cet égard, si la constante cosmologique de l'univers n'est pas rigoureusement nulle, ce qui semble être le cas si l'on en croit les plus récentes données expérimentales, il est alors inévitable qu'elle en vienne à prendre une importance de plus en plus considérable dans la constitution de l'univers. Contrairement aux autres composantes de l'univers comme la matière et la radiation, dont les densités respectives décroissent toutes avec le temps, la constante cosmologique possède par définition une densité constante, de sorte que sa présence n'est pas diluée par l'expansion de l'espace. Elle en vient ainsi, au fil du temps, à dominer toutes les autres composantes de l'univers, au point où ce dernier tend à ressembler de plus en plus à un espace de Sitter, c'est-à-dire à un espace ne contenant rien d'autre qu'une constante cosmologique.

Les deux cas que l'on vient d'évoquer, ceux de l'univers primordial en inflation et de l'univers actuel, suffisent pour démontrer l'importance de l'espace de Sitter dans la cosmologie contemporaine. Toutefois, il n'empêche que l'univers physique ne pourrait être légitimement assimilé, à aucun moment de son histoire, à un pur espace de Sitter. Il peut y ressembler parfois, mais sans jamais s'y réduire parfaitement.

C'est ce qui explique pourquoi, dans ce mémoire, on a cru bon de considérer d'autres types d'espace en expansion, notamment ceux contenant un fluide parfait d'équation d'état quelconque, ou encore ceux avec un champ scalaire muni d'un potentiel général. Il importait en effet de vérifier que les conclusions pouvant être établies dans le cas d'un pur espace de Sitter demeurent valides pour des espaces ressemblant à ce dernier, mais ne s'y réduisant pas. Il importait de tester, autrement dit, la stabilité de l'étude sur la stabilité de l'espace de Sitter proposée dans ce mémoire.

Contenu des chapitres de ce mémoire. Disons enfin quelques mots sur le contenu formel de ce mémoire. Celui-ci se compose de quatre chapitres, que l'on peut réunir en deux groupes. Les premier et quatrième chapitres contiennent l'essentiel des raisonnements traitant spécifiquement des modes infrarouges des perturbations métriques, et de leurs effets sur le taux d'expansion de l'espace et son contenu en énergie-impulsion.

C'est également dans ces deux chapitres que l'on retrouve toutes les contributions originales de ce mémoire. Le premier chapitre, par exemple, propose un traitement original des équations d'Einstein, permettant de généraliser un certain nombre de résultats déjà connus, mais qui se trouvaient démontrés seulement sous certaines conditions, pour certains types de perturbations métriques et jusqu'au deuxième ordre. De son côté, le dernier chapitre vise à amender et à étendre les travaux des chercheurs japonais H. Kitamoto et Y. Kitazawa. En me basant sur les idées de ces chercheurs, mais en employant une méthode quelque peu différente, je parviens à une conclusion tout à fait opposée à la leur dans le cas d'un espace purement de Sitter, conclusion que je généralise par la suite au cas d'un espace contenant un champ scalaire.

Les deuxième et troisième chapitres de ce mémoire présentent quant à eux quelques résultats préliminaires, déjà bien connus, dont l'exposition était toutefois nécessaire puisqu'ils sont impliqués dans le dernier chapitre. On n'y trouvera aucune contribution originale, de sorte que le lecteur intéressé par la seule question de la stabilité des espaces en expansion pourra omettre ces chapitres, en ne s'y référant qu'au besoin.

Dans la suite de ce mémoire, je supposerai que le lecteur possède une bonne connaissance de la relativité générale, ainsi qu'une certaine base de mécanique quantique. Les principales idées et équations de la relativité générale seront donc employées dès le départ, sans autre introduction. Je les ai moi-même apprises en lisant notamment l'ouvrage de Wald [5], que je recommande à l'attention du lecteur en guise de référence standard sur le sujet.

Table des notations

Métriques. Dans ce mémoire, on adopte une signature négative pour le temps et positive pour l'espace, de sorte que la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ possède comme composantes $\eta_{\tau\tau} = -1$, $\eta_{\tau i} = 0$ et $\eta_{ij} = \delta_{ij}$.

En général, on considère des espaces en expansion à quatre dimensions possédant une métrique $g_{\mu\nu}$, ainsi qu'un facteur d'échelle $a = a(t)$. Dans le premier chapitre, $g_{\mu\nu} = a^2 \hat{g}_{\mu\nu}$ désigne la métrique de l'espace perturbé, avec $\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, et $h_{\mu\nu}$ sont les petites perturbations qui l'affectent. Dans les deuxième et quatrième chapitres, $g_{\mu\nu} = a^2 \hat{g}_{\mu\nu}$ désigne plutôt la métrique de l'espace de base et $\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}(\delta^\rho_\nu + h^\rho_\nu)$ celle de l'espace perturbé. Dans ce dernier cas, la métrique $\hat{g}_{\mu\nu}$ joue alors le même rôle que celle de Minkowski, sauf qu'elle est tout à fait générale.

Dérivées. La notation de Newton est utilisée exclusivement pour désigner la dérivée par rapport à la coordonnée temporelle τ, qui désigne ici le temps conforme,

$$\dot{a} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau}.$$

La notation de Leibniz est utilisée notamment pour la dérivée par rapport au temps physique. Comme celui-ci est relié au temps conforme par $\mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}\tau$, on a alors

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{a}}{a},$$

ce qui implique notamment que le facteur de Hubble est donné par

$$H = \frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{a}}{a^2}.$$

Il est parfois commode de définir l'équivalent du facteur de Hubble pour le temps conforme,

$$\mathcal{H} = \frac{\dot{a}}{a} = aH.$$

Caractères gras. Les caractères gras sont employés alternativement pour désigner des vecteurs spatiaux ou des matrices, selon le contexte. Par exemple, la métrique $g_{\mu\nu}$ est parfois représentée par la matrice $\mathbf{g}$. De même, le vecteur d'onde associé aux modes de Fourier d'un champ est désigné par $\mathbf{k}$ et sa norme est notée $k = |\mathbf{k}|$.

Notation indicielle. Les lettres grecques (μ, ν, etc.) sont employées pour les coordonnées de l'espace-temps, τ et $\mathbf{x}$. Les coordonnées strictement spatiales $\mathbf{x}$ sont représentées quant à elles avec les caractères latins (i, j, etc.). Comme on a choisi une signature positive pour l'espace, ces indices sont généralement tous ramenés en position inférieure, sans qu'il ne soit nécessaire d'en ajuster le signe.

Symboles pour les équations. Lorsqu'il a fallu faire certaines approximations pour obtenir une équation, on évite d'écrire celle-ci au moyen d'un signe d'égalité stricte. On a tâché d'employer le symbole $\approx$ dans ces équations, afin d'indiquer qu'elles ne sont qu'approximativement valides.

Le symbole $\cong$ est employé quant à lui pour indiquer qu'une dérivée totale a été négligée dans une équation. Ce symbole est donc typiquement utilisé dans les équations impliquant des lagrangiens. Pour être parfaitement rigoureux, il faudrait conserver ces dérivées totales puisqu'elles ne peuvent être proprement négligées qu'au niveau de l'action, mais on se permet de les négliger là où elles apparaissent par souci de concision.

Chapitre 1

Étude perturbative des équations d'Einstein

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier les équations d'Einstein de manière perturbative, dans le cas particulier d'un espace en expansion. On suppose ainsi que l'espace est décrit par une métrique $g_{\mu\nu} = a^2(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})$, où $a = a(t)$ désigne le facteur d'échelle de l'espace et où $h_{\mu\nu}$ sont de petites perturbations. En insérant cette métrique dans les équations d'Einstein, puis en développant selon les différentes puissances des perturbations, on obtient alors une série d'équations que l'on peut résoudre en principe de manière systématique, ordre par ordre.

Les premières équations que l'on rencontre ainsi dans cette série sont celles de premier ordre. Elles ont déjà été abondamment étudiées de manière générale [6], de sorte que l'on ne se propose pas ici de reprendre intégralement leur étude. On va plutôt tenter d'examiner les équations d'Einstein dans l'ensemble de leur série perturbative, ou du moins au-delà du premier ordre, dans le but de déterminer l'effet cumulé des perturbations affectant l'espace. Pour ce faire, on va effectuer certaines approximations, en se concentrant sur les modes infrarouges des perturbations métriques, c'est-à-dire ceux possédant de grandes longueurs d'onde.

Plus spécifiquement, la question que l'on veut examiner dans ce chapitre concerne l'effet des perturbations métriques sur le contenu en énergie-impulsion de l'espace. Typiquement, quand on cherche à résoudre les équations d'Einstein, on suppose qu'il existe dans l'espace un certain contenu en énergie-impulsion, causé par exemple par un fluide ou un champ scalaire. Ce contenu étant donné, on entreprend alors de résoudre les équations d'Einstein afin de déterminer la métrique de l'espace, c'est-à-dire la géométrie appropriée pouvant contenir cette énergie-impulsion.

Dans le contexte de ce mémoire, on suppose que cette première étape du raisonnement a déjà été accomplie et que l'on connaît la forme explicite de la métrique associée à un espace contenant telle ou telle énergie-impulsion. On renverse ici en quelque sorte la procédure : on suppose que la métrique subit de petites perturbations et l'on cherche à déterminer l'effet de ces perturbations sur le contenu en énergie-impulsion de l'espace. Par exemple, si la métrique d'un espace contenant un fluide parfait subit de petites perturbations, celles-ci affectent alors nécessairement la pression et la densité du fluide présent dans l'espace. De la même façon, si la métrique d'un espace de Sitter subit de petites variations, la valeur de la constante cosmologique dans cet espace risque aussi d'être modifiée, au point peut-être de ne plus être constante. Bref, l'étude que l'on se propose d'accomplir ici concerne la stabilité relative des contenus en énergie-impulsion des espaces en expansion, sous l'effet des modes infrarouges des perturbations métriques.

§1.1 Approximations et choix de jauge. Au lieu de développer en série les équations d'Einstein de manière générale, pour ensuite tenter de les résoudre suivant certaines approximations, on va plutôt adopter dès le départ ces approximations, en les appliquant systématiquement à tous les ordres. Les conclusions que l'on va tirer au fil de ce chapitre dépendront donc intimement des approximations que l'on va choisir initialement, bien plus que de tout autre facteur.

La principale difficulté impliquée dans le développement perturbatif des équations d'Einstein réside dans le fait que ce sont des équations différentielles. Il faut donc savoir les résoudre au premier ordre, avant de passer au suivant, ce qui n'est pas toujours possible sans recourir à certaines simplifications. À cet égard, l'approximation la plus brutale que l'on puisse effectuer consiste à négliger complètement toutes les dérivées présentes dans les équations et affectant les perturbations métriques. Cela revient à supposer que les perturbations sont à peu près constantes ou, du moins, que leurs variations dans le temps et l'espace peuvent être négligées face aux autres termes. Dans le cadre de cette approximation, les équations d'Einstein deviennent alors de simples équations algébriques, qu'il est possible de résoudre aisément.

Entrons un peu plus dans les détails de l'approximation que l'on se propose d'adopter. On souhaite d'abord négliger la variation spatiale des perturbations métriques. Plus spécifiquement, il s'agit de décomposer les perturbations selon leurs modes de Fourier, puis de ne conserver que les modes infrarouges, c'est-à-dire ceux possédant de grandes longueurs d'onde ou de petits nombres d'onde. Comme ces modes sont spatialement étendus, ils paraissent alors relativement constants dans une région donnée de l'espace, du moins dans les régions de petites dimensions par rapport à leur longueur d'onde. Mathématiquement, cela implique que l'on peut négliger les dérivées spatiales affectant les perturbations.

On souhaite également négliger leurs dérivées temporelles. Une telle simplification est justifiée si la composante temporelle des perturbations varie lentement ou encore si elle devient de plus en plus négligeable au fil du temps. La première de ces circonstances survient par exemple durant la phase d'inflation de l'univers primordial, lorsque le champ scalaire responsable de l'inflation « roule » lentement vers le creux de son potentiel. La dérivée temporelle de la perturbation du champ devient alors négligeable face aux autres termes.

Une approximation similaire est également justifiée lorsque la composante temporelle des perturbations, sans varier lentement, décroît au contraire rapidement à mesure que le temps passe. Cela survient, par exemple, lorsque les perturbations se composent d'un terme décroissant avec le temps, ainsi que d'un terme constant, ne dépendant que de l'espace,

$$h_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) \approx A_{\mu\nu}(\mathbf{x}) + B_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t), \tag{1.1}$$

où l'on suppose que $B_{\mu\nu}$ tend vers zéro au fil du temps. On sait que cette forme particulière est notamment valide pour les modes infrarouges des perturbations métriques lorsque celles-ci sont de type tensoriel, de même que lorsqu'elles sont de type scalaire, dans la jauge longitudinale [6]. Ainsi, les deux approximations que l'on se propose d'effectuer ici, loin de se contredire, s'avèrent au contraire solidaires l'une de l'autre. En se concentrant sur les modes infrarouges des perturbations, on peut alors du même coup négliger leurs variations temporelles, surtout après qu'un certain temps se soit écoulé et que l'espace ait suffisamment pris de l'expansion.

Dans la suite de ce chapitre, on se propose d'appliquer systématiquement ces deux approximations aux équations d'Einstein, sans imposer aucune autre contrainte aux perturbations. En particulier, aucun choix de jauge ne sera effectué, de sorte que les perturbations seront traitées de manière tout à fait générales. La validité des résultats que l'on va tirer de cette analyse ne dépendra donc pas du choix particulier d'une jauge, mais seulement du type d'approximations invoquées pour les obtenir. D'ailleurs, si une conséquence proprement physique peut être tirée de l'analyse perturbative des équations d'Einstein en fixant la jauge, il devrait être possible de la déduire également sans fixer cette dernière, en supposant des perturbations tout à fait arbitraires.

Enfin, une autre raison incitant à ne pas fixer dès le départ la jauge des perturbations est que leur classification usuelle, en perturbations scalaires, vectorielles et tensorielles, n'est valide qu'au premier ordre. Les trois types de perturbations peuvent être traitées séparément au premier ordre, car elles n'interagissent pas les unes avec les autres, ce qui n'est plus le cas aux ordres supérieurs. Pour cette raison, comme on se propose ici d'étudier les équations d'Einstein au-delà du premier ordre, il serait sans doute mal avisé de fixer trop rapidement la jauge en se basant sur la décomposition linéaire des perturbations métriques.

§1.2 Développement en série des tenseurs de Ricci et d'Einstein. On considère donc un espace en expansion à quatre dimensions, possédant une métrique $g_{\mu\nu}$, ainsi qu'un certain contenu en énergie-impulsion décrit par le tenseur $T_{\mu\nu}$. Les équations d'Einstein pour cet espace s'écrivent

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{1.2}$$

où $\kappa = 8\pi G_N$ est une constante. En l'absence de perturbations, on suppose que l'espace considéré est un univers de Minkowski en expansion, de métrique $g^{(0)}_{\mu\nu} = a^2 \eta_{\mu\nu}$, où $a = a(t)$ est le facteur d'échelle. On fait subir à cet espace de petites perturbations, de sorte que sa métrique devient $g_{\mu\nu} = a^2 \hat{g}_{\mu\nu}$, où $\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. Dans la suite de ce chapitre, il sera parfois commode de noter $f = h_{\tau\tau}$ et $f_i = h_{\tau i}$.

En général, lorsque la métrique d'un espace subit une transformation conforme, induite par un certain facteur d'échelle a, son tenseur de Ricci devient alors

$$R_{\mu\nu} = \hat{R}_{\mu\nu} - 2\hat{\nabla}_\mu a_\nu + 2a_\mu a_\nu - \hat{g}_{\mu\nu}\hat{g}^{\rho\sigma}\big(\hat{\nabla}_\rho a_\sigma + 2a_\rho a_\sigma\big), \tag{1.3}$$

où a_μ désigne un vecteur généralisant en quelque sorte le facteur de Hubble, que l'on peut définir pour exprimer le taux de variation du facteur d'échelle par rapport aux diverses coordonnées,

$$a_\mu = \frac{\partial_\mu a}{a}. \tag{1.4}$$

Lorsque $a = a(t)$ ne dépend que du temps, comme c'est le cas en cosmologie, on a

$$\begin{aligned} a_\tau &= \frac{\dot{a}}{a} = \mathcal{H}, \\ a_i &= 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Similairement, le tenseur d'Einstein pour un espace ayant subi une transformation conforme est donné par

$$G_{\mu\nu} = \hat{G}_{\mu\nu} - 2\hat{\nabla}_\mu a_\nu + 2a_\mu a_\nu + \hat{g}_{\mu\nu}\hat{g}^{\rho\sigma}\big(2\hat{\nabla}_\rho a_\sigma + a_\rho a_\sigma\big). \tag{1.6}$$

On peut maintenant procéder avec l'approximation que l'on a discutée plus haut. On suppose que les perturbations métriques $h_{\mu\nu}$ varient très peu dans l'espace et le temps, de sorte qu'on peut les traiter comme des constantes. Dans ce cas, la métrique $\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ peut être également considérée comme constante, ce qui implique notamment que les symboles de Christoffel qui lui sont associés sont tous nuls, $\hat{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} \approx 0$. Il s'ensuit que $\hat{R}_{\mu\nu} \approx 0$ et $\hat{\nabla}_\mu a_\nu \approx \partial_\mu a_\nu$. Dans le cadre de cette approximation, le tenseur de Ricci de l'espace perturbé se réduit donc à

$$R_{\mu\nu} \approx -2\partial_\mu a_\nu + 2a_\mu a_\nu - \hat{g}_{\mu\nu}\hat{g}^{\rho\sigma}\big(\partial_\rho a_\sigma + 2a_\rho a_\sigma\big), \tag{1.7}$$

c'est-à-dire, pour un facteur d'échelle ne dépendant que du temps,

$$R_{\mu\nu} \approx 2\,\delta_{\mu\tau}\,\delta_{\nu\tau}\,\big(\mathcal{H}^2 - \dot{\mathcal{H}}\big) - \hat{g}_{\mu\nu}\hat{g}^{\tau\tau}\big(\dot{\mathcal{H}} + 2\mathcal{H}^2\big). \tag{1.8}$$

De la même façon, le tenseur d'Einstein se réduit à

$$G_{\mu\nu} \approx 2\,\delta_{\mu\tau}\,\delta_{\nu\tau}\,\big(\mathcal{H}^2 - \dot{\mathcal{H}}\big) + \hat{g}_{\mu\nu}\hat{g}^{\tau\tau}\big(2\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2\big). \tag{1.9}$$

Plus loin dans ce chapitre, on va étudier les équations d'Einstein jusqu'au second ordre dans les perturbations métriques. Il est donc utile de développer les tenseurs de Ricci et d'Einstein également jusqu'à cet ordre. À cet égard, rappelons que la métrique inverse associée à $\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ s'écrit *

$$\hat{g}^{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^{\mu}_{\rho}h^{\nu\rho}, \tag{1.10}$$

où les indices de $h_{\mu\nu}$ sont élevés au moyen de la métrique de Minkowski, $h^{\mu}_{\rho} = \eta^{\mu\nu}h_{\nu\rho}$. On en déduit que

$$\hat{g}_{\mu\nu}\hat{g}^{\tau\tau} \approx -\big(\eta_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}f + h_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}h_{\tau\rho}h^{\tau\rho} + h_{\mu\nu}f\big), \tag{1.11}$$

où l'on a noté $f = h_{\tau\tau}$. Cela implique notamment que les contributions de zéro, de premier et de deuxième ordre pour le tenseur de Ricci s'écrivent respectivement

$$\begin{aligned} R^{(0)}_{\mu\nu} &\approx 2\,\delta_{\mu\tau}\,\delta_{\nu\tau}\,\big(\mathcal{H}^2 - \dot{\mathcal{H}}\big) + \eta_{\mu\nu}\big(\dot{\mathcal{H}} + 2\mathcal{H}^2\big), \\ R^{(1)}_{\mu\nu} &\approx \big(\eta_{\mu\nu}f + h_{\mu\nu}\big)\big(\dot{\mathcal{H}} + 2\mathcal{H}^2\big), \\ R^{(2)}_{\mu\nu} &\approx \big(\eta_{\mu\nu}h_{\tau\rho}h^{\tau\rho} + h_{\mu\nu}f\big)\big(\dot{\mathcal{H}} + 2\mathcal{H}^2\big). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Des formules similaires peuvent être trouvées pour le tenseur d'Einstein,

$$\begin{aligned} G^{(0)}_{\mu\nu} &\approx 2\,\delta_{\mu\tau}\,\delta_{\nu\tau}\,\big(\mathcal{H}^2 - \dot{\mathcal{H}}\big) - \eta_{\mu\nu}\big(2\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2\big), \\ G^{(1)}_{\mu\nu} &\approx -\big(\eta_{\mu\nu}f + h_{\mu\nu}\big)\big(2\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2\big), \\ G^{(2)}_{\mu\nu} &\approx -\big(\eta_{\mu\nu}h_{\tau\rho}h^{\tau\rho} + h_{\mu\nu}f\big)\big(2\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2\big). \end{aligned} \tag{1.13}$$

De telles expressions pour les tenseurs de Ricci et d'Einstein ont pu être obtenues avec aussi peu d'efforts seulement parce qu'on a appliqué dès le départ l'approximation choisie pour la résolution des équations d'Einstein. Sans cette simplification, il aurait fallu ajouter un grand nombre de termes liés aux dérivées des perturbations.

*Une démonstration de ce résultat sera présentée dans le deuxième chapitre de ce mémoire.

§1.3 Deux approches possibles. Dans ce chapitre, on se propose de suivre l'approche classique pour le développement perturbatif d'équations différentielles. On suppose ainsi que les équations d'Einstein sont vérifiées ordre par ordre, et notamment à l'ordre zéro, c'est-à-dire en l'absence de perturbations. Ce faisant, les équations d'Einstein dans l'espace perturbé s'écrivent alors

$$\begin{aligned} G^{(0)}_{\mu\nu} &= \kappa T^{(0)}_{\mu\nu}, \\ G^{(1)}_{\mu\nu} &= \kappa T^{(1)}_{\mu\nu}, \\ G^{(2)}_{\mu\nu} &= \kappa T^{(2)}_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{1.14}$$

et ainsi de suite pour les autres ordres. Bien que standard, cette approche n'est généralement pas celle qui est suivie typiquement en cosmologie, pour l'étude des équations d'Einstein au-delà du premier ordre. Suivant [7], on préfère parfois supposer que seules les équations de premier ordre sont satisfaites, $G^{(1)}_{\mu\nu} = \kappa T^{(1)}_{\mu\nu}$, les contributions d'ordre supérieur servant à modifier l'équation à l'ordre zéro. Celle-ci s'écrit alors en termes d'un nouveau tenseur d'énergie-impulsion, comprenant les termes d'ordre zéro, ainsi que tous ceux qui ne sont pas linéaires dans les perturbations. En se limitant aux seuls termes quadratiques, on trouve dans ce cas

$$G^{(0)}_{\mu\nu} = \kappa\big(T^{(0)}_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}\big), \tag{1.15}$$

où $\delta T_{\mu\nu}$ désigne la modification du tenseur d'énergie-impulsion due aux termes quadratiques dans les perturbations métriques,

$$\kappa\delta T_{\mu\nu} = \kappa T^{(2)}_{\mu\nu} - G^{(2)}_{\mu\nu}. \tag{1.16}$$

Cette approche alternative, moins standard, présente toutefois quelques difficultés. Par exemple, on a souvent insisté sur le fait que l'expression du tenseur $\delta T_{\mu\nu}$ dépend de la jauge choisie pour le calculer, de sorte qu'il ne représente pas un véritable effet physique, mais un pur effet de jauge [8]. De plus, on verra plus loin que cette approche ne se prête pas, en général, au genre d'approximations que l'on se propose de faire ici, sauf dans le cas où les composantes hors diagonale des perturbations métriques sont toutes nulles, ce qui est le cas notamment pour des perturbations scalaires dans la jauge longitudinale. Or, c'est précisément ce genre de perturbations qui sert de base à l'approche moins standard présentée dans [7].

§1.4 Cas d'un fluide parfait. Examinons maintenant le cas particulier où l'espace contient un fluide parfait, de densité ρ et de pression p, et dont l'énergie-impulsion est décrite par le tenseur

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}, \tag{1.17}$$

où u_μ désigne la vitesse du fluide. Comme la norme de cette vitesse est invariante et qu'elle est égale à -1 dans le repère propre du fluide, elle doit donc satisfaire la contrainte

$$g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = -1. \tag{1.18}$$

Il est commode d'extraire de la vitesse du fluide sa dépendance sur le facteur d'échelle, en posant $u_\mu = a\, \hat{u}_\mu$. La contrainte qu'elle doit satisfaire s'écrit alors

$$\hat{g}^{\mu\nu} \hat{u}_\mu \hat{u}_\nu = -1. \tag{1.19}$$

On cherche à déterminer l'effet qu'auraient de petites perturbations de la métrique sur la densité, la pression et la vitesse du fluide contenu dans l'espace. En l'absence de perturbations, il s'avère que le fluide est immobile et donc que la composante spatiale de sa vitesse est nulle, $u_i^{(0)} = 0$. La contrainte sur sa vitesse implique alors que

$$\eta^{\mu\nu} \hat{u}_\mu^{(0)} \hat{u}_\nu^{(0)} = -\big(\hat{u}_\tau^{(0)}\big)^2 = -1, \tag{1.20}$$

de sorte que l'on peut choisir $\hat{u}_\tau^{(0)} = -1$ et ainsi $u_\tau^{(0)} = -a$. Les composantes du tenseur d'énergie-impulsion du fluide dans l'espace non perturbé sont donc $T_{\tau\tau}^{(0)} = a^2 \rho_0$, $T_{\tau i}^{(0)} = 0$ et $T_{ij}^{(0)} = a^2 p_0\, \delta_{ij}$. Comme on adopte ici l'approche perturbative standard, on suppose que les équations d'Einstein à l'ordre zéro sont satisfaites. On en tire alors deux contraintes, permettant de relier la pression et la densité de base du fluide au facteur d'échelle de l'espace,

$$\begin{aligned} \kappa a^2 \rho_0 &= 3\mathcal{H}^2, \\ \kappa a^2 p_0 &= -\big(2\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2\big). \end{aligned} \tag{1.21}$$

Si l'on suppose maintenant que la métrique de l'espace subit de petites perturbations, les propriétés du fluide présent dans cet espace s'en trouvent modifiées par rapport à leurs valeurs de base. Autrement dit, pour que les équations d'Einstein soient vérifiées à tous les ordres, il faut admettre des modifications de la pression, de la densité et de la vitesse du fluide à chacun des ordres,

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \cdots , \\ p &= p_0 + p_1 + p_2 + \cdots , \\ \hat{u}_\mu &= \hat{u}_\mu^{(0)} + \hat{u}_\mu^{(1)} + \hat{u}_\mu^{(2)} + \cdots . \end{aligned} \tag{1.22}$$

Les équations d'Einstein aux premier et deuxième ordres, ainsi que la contrainte devant être satisfaite par la norme de la vitesse, vont permettre de fixer ces diverses quantités, en les exprimant en termes des perturbations métriques. D'abord, rappelons que la vitesse du fluide doit posséder une norme égale à $\hat{g}^{\mu\nu}\hat{u}_\mu\hat{u}_\nu = -1$. En développant cette équation en série, puis en se servant du fait que la même contrainte doit être satisfaite par la vitesse de base du fluide, $\eta^{\mu\nu}\hat{u}_\mu^{(0)}\hat{u}_\nu^{(0)} = -1$, on trouve

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu}\hat{u}_\mu^{(1)}\hat{u}_\nu^{(0)} &= \frac{1}{2}h^{\mu\nu}\hat{u}_\mu^{(0)}\hat{u}_\nu^{(0)}, \\ \eta^{\mu\nu}\hat{u}_\mu^{(2)}\hat{u}_\nu^{(0)} &= -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\hat{u}_\mu^{(1)}\hat{u}_\nu^{(1)} - \frac{1}{2}h^\mu_\rho h^{\nu\rho}\hat{u}_\mu^{(0)}\hat{u}_\nu^{(0)} + h^{\mu\nu}\hat{u}_\mu^{(1)}\hat{u}_\nu^{(0)}. \end{aligned} \tag{1.23}$$

La vitesse du fluide étant nulle dans l'espace de base, $\hat{u}_i^{(0)} = 0$ et $\hat{u}_\tau^{(0)} = -1$, la contrainte de premier ordre s'écrit alors

$$\hat{u}_\tau^{(1)} = \frac{1}{2}f. \tag{1.24}$$

Grâce à cette nouvelle contrainte, celle de deuxième ordre devient

$$\hat{u}_\tau^{(2)} = \frac{1}{8}f^2 - \frac{1}{2}f_i f_i - \frac{1}{2}\hat{u}_i^{(1)}\hat{u}_i^{(1)} + f_i\,\hat{u}_i^{(1)}, \tag{1.25}$$

où l'on a noté $f = h_{\tau\tau}$ et $f_i = h_{\tau i}$. La contrainte sur la norme de la vitesse du fluide permet donc de fixer la composante temporelle de sa vitesse, et ce à chaque ordre perturbatif, tout en laissant complètement libres ses composantes spatiales, $u_i^{(1)}$ et $u_i^{(2)}$. Celles-ci peuvent être déterminées seulement par les équations d'Einstein. Pour établir ces équations, il faut développer le tenseur d'énergie-impulsion du fluide sous la forme d'une série. Les termes de premier et de deuxième ordre pour ce tenseur sont respectivement

$$\begin{aligned}
\hat{T}^{(1)}_{\mu\nu} &= (\rho_0 + p_0)\big(\hat{u}^{(1)}_\mu \hat{u}^{(0)}_\nu + \hat{u}^{(0)}_\mu \hat{u}^{(1)}_\nu\big) + (\rho_1 + p_1)\,\hat{u}^{(0)}_\mu \hat{u}^{(0)}_\nu + p_1\eta_{\mu\nu} + p_0 h_{\mu\nu}, \\
\hat{T}^{(2)}_{\mu\nu} &= (\rho_0 + p_0)\big(\hat{u}^{(2)}_\mu \hat{u}^{(0)}_\nu + \hat{u}^{(0)}_\mu \hat{u}^{(2)}_\nu + \hat{u}^{(1)}_\mu \hat{u}^{(1)}_\nu\big) + (\rho_1 + p_1)\big(\hat{u}^{(1)}_\mu \hat{u}^{(0)}_\nu + \hat{u}^{(0)}_\mu \hat{u}^{(1)}_\nu\big) \\
&\qquad + (\rho_2 + p_2)\,\hat{u}^{(0)}_\mu \hat{u}^{(0)}_\nu + p_2\eta_{\mu\nu} + p_1 h_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{1.26}$$

où l'on a redéfini le tenseur d'énergie-impulsion pour en extraire la dépendance sur le facteur d'échelle, $T_{\mu\nu} = a^2\,\hat{T}_{\mu\nu}$. Plus particulièrement, en se servant des composantes connues pour la vitesse du fluide, on trouve simplement

$$\begin{aligned}
\hat{T}^{(1)}_{\tau\tau} &= \rho_1 - \rho_0 f, \\
\hat{T}^{(1)}_{\tau i} &= -(\rho_0 + p_0)\,\hat{u}^{(1)}_i + p_0 f_i, \\
\hat{T}^{(1)}_{ij} &= p_1\delta_{ij} + p_0 h_{ij}.
\end{aligned} \tag{1.27}$$

On peut maintenant achever le raisonnement que l'on a commencé au début de ce chapitre, en égalant les contributions de premier ordre du tenseur d'Einstein à celles que l'on vient d'obtenir pour le tenseur d'énergie-impulsion, $G^{(1)}_{\mu\nu} = \kappa a^2 \hat{T}^{(1)}_{\mu\nu}$. En supposant que les perturbations métriques sont à peu près constantes, on trouve

$$\begin{aligned}
\rho_1 - \rho_0 f &\approx 0, \\
-\kappa a^2(\rho_0 + p_0)\,\hat{u}^{(1)}_i + \kappa a^2 p_0 f_i &\approx -\big(2\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2\big) f_i, \\
\kappa a^2 p_1\delta_{ij} + \kappa a^2 p_0 h_{ij} &\approx -\big(2\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2\big)\big(\delta_{ij} f + h_{ij}\big).
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Avant de résoudre explicitement ces équations, il faut d'abord remarquer qu'elles ne peuvent pas être complètement satisfaites si l'on n'admet pas que celles à l'ordre zéro le sont également. En prenant $i \neq j$ dans la troisième équation, on trouve en effet

$$\big(\kappa a^2 p_0 + 2\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2\big) h_{ij} \approx 0. \tag{1.29}$$

Si les composantes hors diagonale des perturbations métriques ne sont pas toutes nulles (par exemple, si $h_{xy} \neq 0$), l'équation précédente implique donc que

$$\kappa a^2 p_0 + 2\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2 = 0, \tag{1.30}$$

ce qui correspond à la seconde équation d'Einstein dans l'espace non perturbé. L'approche alternative discutée plus haut, celle consistant à supposer que seules les équations d'Einstein de premier ordre sont satisfaites, mais que celles à l'ordre zéro sont modifiées par l'ajout de termes non linéaires, s'avère donc problématique pour des perturbations métriques générales, possédant au moins une composante hors diagonale non nulle. Elle fonctionne seulement dans le cas particulier de perturbations bloc-diagonales, pour lesquelles $h_{ij} = 0$ dès que $i \neq j$. Il vaut donc mieux, de ce point de vue, suivre l'approche perturbative standard, comme on le fait ici. Dans ce cas, les équations d'Einstein au premier ordre sont satisfaites si

$$\begin{aligned} \rho_1 &\approx \rho_0 f, \\ p_1 &\approx p_0 f, \\ u_i^{(1)} &\approx 0. \end{aligned} \tag{1.31}$$

§1.5 Solution non perturbative. On pourrait procéder de la même façon pour résoudre les équations d'Einstein aux ordres supérieurs. On trouverait alors notamment que l'équation $G_{\tau i}^{(2)} = \kappa T_{\tau i}^{(2)}$ implique que $u_i^{(2)} \approx 0$. Il apparaît ainsi que les modes infrarouges des perturbations métriques ne permettent pas de mettre le fluide en mouvement, de donner aux composantes spatiales de sa vitesse des valeurs non nulles, et ce peu importe l'ordre considéré.

On peut donc supposer que $u_i \approx 0$ à tous les ordres perturbatifs. Dans ce cas, il devient alors possible de résoudre d'un seul coup les équations d'Einstein, sans procéder ordre par ordre. La solution obtenue demeure néanmoins approximative, dans la mesure où on l'obtient en négligeant toutes les dérivées affectant les perturbations. En prenant $\hat{u}_i \approx 0$, la contrainte devant être satisfaite par la vitesse du fluide devient

$$\hat{g}^{\mu\nu}\hat{u}_\mu\hat{u}_\nu = \hat{g}^{\tau\tau}(\hat{u}_\tau)^2 = -1, \tag{1.32}$$

ce qui implique que

$$\hat{u}_\tau = -\frac{1}{\sqrt{-\hat{g}^{\tau\tau}}}. \tag{1.33}$$

Dans ce cas, les équations d'Einstein complètes pour l'espace perturbé s'écrivent

$$\begin{aligned}
\kappa a^2(\rho+p)(\hat{u}_\tau)^2 + \kappa a^2 \hat{g}_{\tau\tau}\, p &\approx -2\dot{\mathcal{H}} + 2\mathcal{H}^2 + \hat{g}_{\tau\tau}\hat{g}^{\tau\tau}\big(2\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2\big), \\
\kappa a^2 \hat{g}_{\tau i}\, p &\approx \hat{g}_{\tau i}\hat{g}^{\tau\tau}\big(2\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2\big), \\
\kappa a^2 \hat{g}_{ij}\, p &\approx \hat{g}_{ij}\hat{g}^{\tau\tau}\big(2\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2\big),
\end{aligned} \tag{1.34}$$

où ρ et p désignent la densité et la pression du fluide dans l'espace perturbé, comprenant les corrections à tous les ordres. Les deux dernières de ces équations peuvent être résolues simultanément ; elles impliquent que

$$\kappa a^2 p \approx \hat{g}^{\tau\tau}\big(2\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2\big), \tag{1.35}$$

c'est-à-dire, en se servant de l'expression pour la pression du fluide en l'absence de perturbations,

$$p \approx -\hat{g}^{\tau\tau} p_0. \tag{1.36}$$

En insérant cette solution pour la pression dans la première équation, on trouve

$$\rho \approx -\hat{g}^{\tau\tau} \rho_0. \tag{1.37}$$

Les petites perturbations affectant la métrique de l'espace modifient donc la pression et la densité du fluide à tous les ordres, les corrections à chaque ordre étant données par celles de la métrique inverse $\hat{g}^{\tau\tau}$. En développant jusqu'au deuxième ordre, on a

$$\rho \approx \big(1 + f + f^2 - f_i f_i\big)\rho_0, \tag{1.38}$$

et similairement pour la pression. En particulier, les corrections de premier ordre pour la densité et la pression sont identiques à celles que l'on a calculées plus haut de manière perturbative, $\rho_1 \approx f\rho_0$ et $p_1 \approx f p_0$. Comme les perturbations métriques sont nulles en moyenne dans tout l'espace*, $\langle f \rangle = 0$, la première véritable correction à la densité moyenne du fluide est donc quadratique dans les perturbations,

$$\langle \rho \rangle \approx \big(1 + \langle f^2 \rangle - \langle f_i f_i \rangle\big)\rho_0. \tag{1.39}$$

*Évidemment, dans le cadre de l'approximation discutée dans ce chapitre, les perturbations ne sont pas nulles en moyenne, car elles sont supposées constantes. Leur moyenne est toutefois nulle en réalité, lorsqu'on tient compte de leurs variations spatiales.

En particulier, dans le cas de perturbations bloc-diagonales, pour lesquelles $f_i = 0$, la densité moyenne est

$$\langle \rho \rangle \approx \big(1 + \langle f^2 \rangle \big) \rho_0. \tag{1.40}$$

Une formule analogue peut être établie pour la pression moyenne du fluide. Comme $\langle f^2 \rangle$ est une quantité positive, il s'ensuit que des perturbations métriques de ce type ont pour effet d'augmenter la densité et la pression du fluide contenu dans l'espace. À l'inverse, si les perturbations sont de nature vectorielle, c'est-à-dire si $f = 0$ et $f_i \neq 0$, alors elles tendent à diminuer la densité et la pression du fluide,

$$\langle \rho \rangle \approx \big(1 - \langle f_i f_i \rangle \big) \rho_0. \tag{1.41}$$

Enfin, il importe de noter que les variations subies respectivement par la pression et la densité du fluide sont tout à fait similaires. En fait, ces variations sont reliées l'une à l'autre exactement comme dans l'espace de base,

$$\frac{p}{\rho} \approx \frac{p_0}{\rho_0}, \tag{1.42}$$

l'égalité étant valide à tous les ordres et pour tout type de perturbations. Si le fluide possède une équation d'état constante en l'absence de perturbations, $p_0 = w\rho_0$, elle demeure donc constante lorsque la métrique de l'espace se trouve perturbée, $p \approx w\rho$.

§1.6 Facteur de Hubble effectif. Il reste maintenant à déterminer si les changements subis par les propriétés du fluide et générés par les perturbations métriques peuvent être mesurés localement par un observateur. On peut en douter, dans la mesure où ces changements sont causés ici par les modes infrarouges des perturbations métriques, c'est-à-dire par les modes possédant de grandes longueurs d'onde et qui sont donc, par définition, non locaux.

En cosmologie, la quantité par excellence pouvant être mesurée localement par un observateur est le taux d'expansion de l'univers, tel que donné par le facteur de Hubble. En l'absence de perturbations, le facteur de Hubble de l'espace est déterminé par la pression et la densité de base du fluide, p_0 et ρ_0, par l'entremise des équations d'Einstein à l'ordre zéro,

$$H = \frac{\mathcal{H}}{a}. \tag{1.43}$$

Ce n'est toutefois pas ce facteur de Hubble qui est mesuré localement par un observateur, car sa valeur ne tient pas compte des perturbations affectant la métrique de l'espace. À cet égard, certains chercheurs [10] ont proposé de définir le facteur de Hubble effectif pour l'espace perturbé comme la divergence de la vitesse du fluide contenu dans l'espace,

$$H_{\text{eff}} = \frac{1}{3}\nabla^\mu u_\mu. \tag{1.44}$$

En l'absence de perturbations, on trouve en effet que $H_{\text{eff}} = H$, ce qui confirme qu'il s'agit bien d'une mesure appropriée pour le taux d'expansion de l'univers. Calculons donc cette quantité pour la vitesse du fluide trouvée précédemment, dans l'approximation où les perturbations métriques sont à peu près constantes. En général, si la métrique d'un espace subit une transformation conforme, $g_{\mu\nu} = a^2\hat{g}_{\mu\nu}$, la divergence d'un vecteur dans cet espace s'écrit alors

$$\nabla^\mu u_\mu = \frac{1}{a^2}\hat{g}^{\mu\nu}\big(\hat{\nabla}_\mu u_\nu + 2a_\mu u_\nu\big), \tag{1.45}$$

où a_μ est défini comme précédemment. En supposant maintenant que l'espace subit de petites perturbations, $\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, et que celles-ci sont à peu près constantes, on a que $\hat{\nabla}_\mu u_\nu \approx \partial_\mu u_\nu$, ce qui implique que

$$\nabla^\mu u_\mu \approx \frac{1}{a^2}\hat{g}^{\mu\nu}\big(\partial_\mu u_\nu + 2a_\mu u_\nu\big). \tag{1.46}$$

En résolvant les équations d'Einstein, on a trouvé que les composantes spatiales de la vitesse du fluide sont nulles à tous les ordres, $u_i \approx 0$, alors que sa composante temporelle est simplement proportionnelle au facteur d'échelle, à une constante près,

$$u_\tau = a\,\hat{u}_\tau \approx -\frac{a}{\sqrt{-\hat{g}^{\tau\tau}}}. \tag{1.47}$$

La divergence de la vitesse du fluide est donc

$$\nabla^\mu u_\mu \approx \frac{1}{a^2}\hat{g}^{\tau\tau}\big(\dot{u}_\tau + 2\mathcal{H}u_\tau\big) \approx 3H\sqrt{-\hat{g}^{\tau\tau}}, \tag{1.48}$$

de sorte que le facteur de Hubble effectif dans l'espace perturbé, tel que mesuré localement par un observateur, est donné par

$$H_{\text{eff}} \approx H\sqrt{-\hat{g}^{\tau\tau}}. \tag{1.49}$$

Ce résultat est valide à tous les ordres, dans l'approximation où les perturbations métriques possèdent de grandes longueurs d'onde et sont à peu près constantes. Avant d'en conclure quoi que ce soit, il faut d'abord exprimer ce facteur de Hubble effectif en termes de variables locales, par exemple en termes du temps propre de l'observateur. En effet, pour un observateur donné, l'univers s'apparente à un espace de Minkowski, de sorte que le temps propre t_p qu'il définit dans son repère est tel que

$$-\,\mathrm{d}t_p^2 = g_{\tau\tau}\,\mathrm{d}\tau^2 = \hat{g}_{\tau\tau}\,\mathrm{d}t^2\,, \tag{1.50}$$

où t est le temps physique dans l'espace perturbé, relié au temps conforme par $\mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}\tau$. Ainsi, on a que

$$\frac{\mathrm{d}t_p}{\mathrm{d}t} = \sqrt{-\hat{g}_{\tau\tau}}. \tag{1.51}$$

Pour calculer la valeur appropriée du facteur de Hubble telle que mesurée par cet observateur, il faut donc y remplacer le temps physique t par le temps propre t_p de l'observateur. En particulier, la valeur du facteur de Hubble dans l'espace de base s'écrit comme

$$H = \frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t_p}\frac{\mathrm{d}t_p}{\mathrm{d}t} = H_p\frac{\mathrm{d}t_p}{\mathrm{d}t}, \tag{1.52}$$

où H_p est le facteur de Hubble dans l'espace de base, exprimé en termes du temps propre. Il s'ensuit donc finalement que

$$H_{\text{eff}} \approx H_p\sqrt{\hat{g}_{\tau\tau}\hat{g}^{\tau\tau}}. \tag{1.53}$$

En développant jusqu'au second ordre, on trouve

$$H_{\text{eff}} \approx H_p\big(1 - f_i f_i\big). \tag{1.54}$$

Il faut remarquer que les termes de premier ordre dans l'expression précédente se simplifient sans qu'il ne soit nécessaire d'en prendre la moyenne. Plus généralement, toutes les corrections dues aux perturbations métriques se simplifient, à tous les ordres, sauf pour celles causées par les composantes vectorielles des perturbations. Pour des perturbations bloc-diagonales, avec $f_i = 0$, le facteur de Hubble effectif dans l'espace perturbé est identique à celui mesuré localement dans l'espace de base, $H_{\text{eff}} \approx H_p$, et ce pour tous les ordres, car dans ce cas $\hat{g}_{\tau\tau}\hat{g}^{\tau\tau} = 1$.

Seules les perturbations vectorielles conduisent à un changement mesurable du facteur de Hubble. Or, il s'avère que des perturbations de ce type deviennent négligeables au fil du temps, à mesure que l'espace prend de l'expansion [6], de sorte que l'effet qu'elles produisent devient lui aussi négligeable. Ainsi, il semble que les modes infrarouges des perturbations métriques ne produisent pas de véritable effet sur le taux d'expansion de l'espace, même s'ils affectent les propriétés du fluide présent dans l'espace.

§1.7 Cas d'un champ scalaire. Passons maintenant au cas où l'espace, plutôt que de contenir un fluide parfait, contient un champ scalaire φ baignant dans un potentiel quelconque. Les propriétés dynamiques de ce champ scalaire sont déterminées par la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\varphi), \tag{1.55}$$

de sorte que l'énergie-impulsion qu'il possède est décrite par le tenseur

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + g_{\mu\nu}\mathcal{L}. \tag{1.56}$$

Comme dans le cas d'un fluide parfait, on cherche à déterminer l'effet de petites perturbations métriques sur les propriétés du champ scalaire présent dans l'espace. On suppose encore une fois que les perturbations subies par la métrique sont à peu près constantes et qu'elles possèdent de grandes longueurs d'onde. La valeur du champ scalaire risque d'être modifiée par ces perturbations non seulement au premier ordre, mais aussi aux ordres supérieurs, comme c'était le cas pour la densité, la pression et la vitesse du fluide. On exprime ainsi la valeur du champ sous la forme d'une série, dont le premier terme est sa valeur dans l'espace non perturbé, à laquelle on ajoute des corrections pour tous les ordres,

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots . \tag{1.57}$$

On adopte ici aussi l'approche standard pour le développement perturbatif des équations d'Einstein, en supposant qu'elles sont vérifiées à chaque ordre. Dans le cas d'un champ scalaire, il est toutefois plus commode de réécrire les équations d'Einstein en termes du tenseur de Ricci. En prenant la trace des équations d'Einstein, on trouve que $R = -\kappa T$, où $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ désigne la trace du tenseur d'énergie-impulsion. Il s'ensuit que

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right). \tag{1.58}$$

On peut ainsi définir un nouveau tenseur d'énergie-impulsion,

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}, \tag{1.59}$$

de façon à ce que les équations d'Einstein s'écrivent $R_{\mu\nu} = \kappa\mathcal{T}_{\mu\nu}$. Dans le cas d'un champ scalaire, ce nouveau tenseur d'énergie-impulsion possède une expression plus simple et plus facile à développer que le tenseur original. La trace de ce dernier est en effet

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - 4V(\varphi), \tag{1.60}$$

de sorte que

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + g_{\mu\nu}V(\varphi). \tag{1.61}$$

Pour que les équations d'Einstein soient satisfaites à l'ordre zéro, il faut que la valeur du champ dans l'espace de base ne dépende que du temps, $\varphi_0 = \varphi_0(t)$. Par ailleurs, reprenant l'approximation suivie jusqu'à présent, on va également supposer que les perturbations du champ, comme celles de la métrique, sont à peu près constantes, de sorte qu'on peut négliger toutes les dérivées qui les affectent, $\partial_\mu\varphi_1 \approx \partial_\mu\varphi_2 \approx 0$. Cette approximation supplémentaire n'était pas nécessaire dans le cas précédent, car le tenseur d'énergie-impulsion d'un fluide parfait n'implique aucune dérivée, contrairement à celui d'un champ scalaire. En développant le tenseur $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ en série, on trouve alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{(0)}_{\mu\nu} &\approx \partial_\mu\varphi_0\partial_\nu\varphi_0 + a^2V_0\eta_{\mu\nu},\\
\mathcal{T}^{(1)}_{\mu\nu} &\approx a^2\big(V_0'\,\varphi_1\eta_{\mu\nu} + V_0h_{\mu\nu}\big),\\
\mathcal{T}^{(2)}_{\mu\nu} &\approx a^2\left(V_0'\,\varphi_2\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}V_0''\varphi_1^2\eta_{\mu\nu} + V_0'\varphi_1h_{\mu\nu}\right),
\end{aligned} \tag{1.62}$$

où $V_0 = V(\varphi_0)$, $V_0' = V'(\varphi_0)$ et $V_0'' = V''(\varphi_0)$ désignent respectivement les valeurs du potentiel et de ses deux premières dérivées dans l'espace de base. Ici, le prime dénote la dérivée par rapport au champ. En se servant maintenant des expressions approximatives obtenues plus haut pour le tenseur de Ricci de l'espace perturbé, on peut alors établir et résoudre les équations d'Einstein jusqu'au second ordre. En l'absence de perturbations, les équations d'Einstein $R_{\mu\nu}^{(0)} = \kappa \mathcal{T}_{\mu\nu}^{(0)}$ mènent à deux contraintes reliant le champ au facteur d'échelle de l'espace,

$$\begin{aligned} \kappa\big(\dot{\varphi}_0^2 - a^2 V_0\big) &= -3\dot{\mathcal{H}}, \\ \kappa a^2 V_0 &= \dot{\mathcal{H}} + 2\mathcal{H}^2. \end{aligned} \tag{1.63}$$

Au premier ordre, les équations d'Einstein $R_{\mu\nu}^{(1)} = \kappa \mathcal{T}_{\mu\nu}^{(1)}$ s'écrivent

$$\begin{aligned} -V_0'\varphi_1 + V_0 f &\approx 0, \\ \kappa a^2 V_0 f_i &\approx \big(\dot{\mathcal{H}} + 2\mathcal{H}^2\big) f_i, \\ \kappa a^2 \big(V_0'\,\varphi_1 \delta_{ij} + V_0 h_{ij}\big) &\approx \big(\dot{\mathcal{H}} + 2\mathcal{H}^2\big)(f\delta_{ij} + h_{ij}). \end{aligned} \tag{1.64}$$

La première de ces équations permet de fixer la première perturbation du champ en la reliant à l'une des perturbations métriques,

$$\varphi_1 \approx \frac{V_0}{V_0'} f, \tag{1.65}$$

alors que les deux autres équations sont identiquement satisfaites si l'on se sert de la contrainte précédente, ainsi que des équations d'Einstein à l'ordre zéro. Enfin, les équations d'Einstein au deuxième ordre s'écrivent

$$\begin{aligned} \kappa a^2 \left(-V_0'\varphi_2 - \frac{1}{2}V_0''\varphi_1^2 + V_0'\varphi_1 f\right) &\approx \big(\dot{\mathcal{H}} + 2\mathcal{H}^2\big)\big(- h_{\tau\mu}h^{\tau\mu} + f^2\big), \\ \kappa a^2 V_0'\varphi_1 f_i &\approx \big(\dot{\mathcal{H}} + 2\mathcal{H}^2\big) f f_i, \\ \kappa a^2 \left(V_0'\varphi_2\delta_{ij} + \frac{1}{2}V_0''\varphi_1^2\delta_{ij} + V_0'\varphi_1 h_{ij}\right) &\approx \big(\dot{\mathcal{H}} + 2\mathcal{H}^2\big)\big(h_{\tau\mu}h^{\tau\mu}\delta_{ij} + f h_{ij}\big). \end{aligned} \tag{1.66}$$

La seconde de ces équations est satisfaite identiquement grâce aux contraintes déjà obtenues aux ordres précédents. La première et la troisième de ces équations conduisent quant à elles à la même contrainte pour la perturbation de deuxième ordre du champ,

$$V_0'\varphi_2 \approx V_0\, h_{\tau\mu}h^{\tau\mu} - \frac{1}{2}V_0''\varphi_1^2, \tag{1.67}$$

c'est-à-dire, en se servant de l'expression trouvée pour φ_1,

$$\varphi_2 \approx \frac{V_0}{V_0'}\left(f^2 - f_i f_i - \frac{V_0''V_0}{2V_0'^2}f^2\right). \tag{1.68}$$

§1.8 Comparaison avec l'approche non standard. Avant d'aller plus loin, il convient de remarquer que l'expression trouvée pour la perturbation de deuxième ordre du champ permet de reproduire le résultat obtenu suivant l'approche alternative discutée plus haut. Dans cette approche, on suppose que seules les équations d'Einstein de premier ordre sont vérifiées. Les contributions d'ordre supérieur sont alors ajoutées au tenseur d'énergie-impulsion de l'espace de base, de façon à produire un nouveau tenseur d'énergie-impulsion conduisant à un facteur d'échelle modifié pour l'espace.

Comme les équations d'Einstein au deuxième ordre n'ont pas à être satisfaites dans cette approche, mais qu'elles s'ajoutent au contraire à celles d'ordre zéro, il n'est pas nécessaire d'admettre une perturbation de deuxième ordre pour le champ. Ce serait même mal avisé de le faire, car il n'y aurait aucune équation permettant d'en fixer la valeur. La perturbation de deuxième ordre φ_2 joue donc ici le rôle de la contribution de second ordre $\delta T_{\mu\nu}$ ajoutée au tenseur d'énergie-impulsion de l'espace de base dans l'approche alternative. Plus précisément, on a que

$$\delta T_{\mu\nu} \approx V_0'\,\varphi_2\, g_{\mu\nu}^{(0)}, \tag{1.69}$$

où $g_{\mu\nu}^{(0)} = a^2\eta_{\mu\nu}$ désigne la métrique de l'espace en l'absence de perturbations. Ainsi, peu importe la jauge choisie pour les perturbations métriques, celles-ci en viennent à modifier l'énergie-impulsion de l'espace par une quantité assimilable à une constante cosmologique. On peut en effet écrire $\kappa\delta T_{\mu\nu} = -\delta\Lambda\, g_{\mu\nu}^{(0)}$, avec

$$\delta\Lambda \,\approx\, -\kappa V_0'\,\varphi_2 \,\approx\, \kappa V_0\left(f_i f_i + \frac{V_0''V_0}{2V_0'^2}f^2 - f^2\right). \tag{1.70}$$

En particulier, dans le cas de perturbations métriques bloc-diagonales, on trouve

$$\delta\Lambda \approx \kappa V_0 \left(\frac{V_0'' V_0}{2V_0'^2} - 1 \right) f^2, \tag{1.71}$$

ce qui coïncide avec l'expression obtenue dans [7], suivant l'approche alternative mentionnée plus haut *. Pour la plupart des potentiels typiquement employés dans les modèles de champs scalaires, la quantité entre parenthèses dans l'expression précédente est négative. Par exemple, pour un potentiel proportionnel à une certaine puissance du champ, $V(\varphi) \sim \varphi^n$, on a que

$$\frac{V''V}{2V'^2} - 1 = -\frac{n+1}{2n}, \tag{1.72}$$

de sorte que cette quantité est négative dès que $n > -1$, peu importe la valeur du champ. Il s'ensuit alors que des perturbations métriques de ce genre en viennent à diminuer la constante cosmologique de l'espace. À l'inverse, pour des perturbations métriques de nature vectorielle, avec $f = 0$ et $f_i \neq 0$, on a plutôt

$$\delta\Lambda \approx \kappa V_0\, f_i f_i. \tag{1.73}$$

Cette quantité étant positive, on en conclut que des perturbations vectorielles tendent à augmenter la constante cosmologique de l'espace. Dans un cas comme dans l'autre, l'effet des perturbations métriques sur le contenu de l'espace s'apparente à celui d'une constante cosmologique. Cet effet n'est d'ailleurs pas surprenant, quand on se rappelle qu'un champ scalaire s'apparente lui-même, sous certaines conditions, à une constante cosmologique. En effet, si l'on suppose que le champ présent dans l'espace de base varie lentement avec le temps, de façon à ce que la valeur de $\dot{\varphi}_0^2$ soit petite face à celle du potentiel V_0, son énergie-impulsion est alors donnée approximativement par

$$T^{(0)}_{\mu\nu} \approx -V_0\, g^{(0)}_{\mu\nu}. \tag{1.74}$$

Cela correspond à l'énergie-impulsion d'une constante cosmologique, celle-ci étant donnée par la valeur à peu près constante du potentiel, $\Lambda_0 = \kappa V_0$. Ainsi, dans le cas d'un espace contenant un champ scalaire, l'énergie-impulsion générée par de petites perturbations de la métrique présente la même forme que celle déjà contenue dans l'espace non

*Il faut poser $f = -2\phi$ pour se conformer à la notation de cet article.

perturbé, à savoir celle d'une constante cosmologique. La même situation survient aussi dans le cas où l'espace contient un fluide parfait : la nouvelle pression et la nouvelle densité du fluide générées par les perturbations métriques possèdent la même équation d'état que dans l'espace de base, $\delta p \approx w\,\delta\rho$ si $p_0 = w\rho_0$.

§1.9 Facteur de Hubble effectif. Il reste maintenant à déterminer si cet effet des perturbations métriques sur la constante cosmologique de l'espace peut être localement mesuré par un observateur. Pour le décider, il convient de reprendre l'analyse précédente de manière non perturbative, comme on l'a fait dans le cas d'un fluide parfait, puis de calculer le facteur de Hubble effectif pouvant être mesuré par un observateur. Si l'on conserve les contributions de tous les ordres perturbatifs, les équations d'Einstein $R_{\mu\nu} = \kappa\mathcal{T}_{\mu\nu}$ pour un espace contenant un champ scalaire s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \kappa\dot{\varphi}^2 + \kappa a^2 \hat{g}_{\tau\tau}\, V(\varphi) &\approx 2\mathcal{H}^2 - 2\dot{\mathcal{H}} - \hat{g}_{\tau\tau}\hat{g}^{\tau\tau}\big(\dot{\mathcal{H}} + 2\mathcal{H}^2\big), \\ \kappa a^2 \hat{g}_{\tau i}\, V(\varphi) &\approx -\hat{g}_{\tau i}\hat{g}^{\tau\tau}\big(\dot{\mathcal{H}} + 2\mathcal{H}^2\big), \\ \kappa a^2 \hat{g}_{ij}\, V(\varphi) &\approx -\hat{g}_{ij}\hat{g}^{\tau\tau}\big(\dot{\mathcal{H}} + 2\mathcal{H}^2\big), \end{aligned} \tag{1.75}$$

où $\varphi = \varphi(t)$ désigne ici la valeur totale du champ scalaire dans l'espace perturbé, que l'on suppose ne dépendre que du temps. Les deux dernières de ces équations peuvent être résolues de la même façon ; elles impliquent que le potentiel du champ est relié au facteur d'échelle par

$$\kappa a^2 V(\varphi) \approx -\hat{g}^{\tau\tau}\big(\dot{\mathcal{H}} + 2\mathcal{H}^2\big), \tag{1.76}$$

de sorte que la première équation se réduit alors à

$$\kappa\dot{\varphi}^2 \approx 2\mathcal{H}^2 - 2\dot{\mathcal{H}}. \tag{1.77}$$

On peut supposer comme précédemment que le champ scalaire varie lentement dans le temps, se trouvant par exemple dans une région peu changeante du potentiel. Une telle circonstance survient notamment au début de la phase d'inflation de l'univers primordial, durant laquelle le champ roule lentement le long de son potentiel. Dans ce cas, sa dérivée temporelle est négligeable face au taux d'expansion de l'univers, de sorte qu'on a approximativement $2\mathcal{H}^2 - 2\dot{\mathcal{H}} \approx 0$, soit $\dot{\mathcal{H}} \approx \mathcal{H}^2$. En intégrant cette équation, on trouve que le facteur d'échelle de l'espace est

$$a \approx -\frac{1}{H\tau}, \tag{1.78}$$

ce qui coïncide avec le facteur d'échelle d'un espace de Sitter. Il n'y a là rien de surprenant, car on a montré plus haut qu'un espace contenant un champ scalaire s'apparente, sous des conditions de roulement lent, à un espace contenant une simple constante cosmologique, comme c'est le cas pour de Sitter. On avait tiré cette conclusion pour l'espace de base, mais il s'avère qu'elle demeure valide même en présence des modes infrarouges des perturbations métriques, et ce à tous les ordres. Enfin, avec $\dot{\mathcal{H}} \approx \mathcal{H}^2$, l'équation reliant le potentiel au facteur d'échelle devient

$$\kappa a^2 V(\varphi) \approx -3\mathcal{H}^2 \hat{g}^{\tau\tau}, \tag{1.79}$$

de sorte que le facteur de Hubble de l'espace s'écrit

$$H = \frac{\mathcal{H}}{a} \approx \sqrt{\frac{\kappa V(\varphi)}{-3\hat{g}^{\tau\tau}}}. \tag{1.80}$$

Comme un champ scalaire représente quelque chose de physiquement bien réel, pouvant se manifester sous la forme d'excitations ou de particules, sa valeur peut donc être mesurée localement par un observateur. Ainsi, au lieu d'exprimer le facteur de Hubble effectif en termes du temps propre de l'observateur, comme on l'a fait précédemment dans le cas d'un fluide parfait, on va plutôt l'exprimer ici en termes du champ, qui peut être également mesuré par l'observateur. Reprenant l'expression calculée plus haut pour le facteur de Hubble effectif, on trouve

$$H_{\text{eff}} \approx H\sqrt{-\hat{g}^{\tau\tau}} \approx \sqrt{\frac{\kappa V(\varphi)}{3}}, \tag{1.81}$$

ce qui correspond au facteur de Hubble dans l'espace de base, mais avec φ remplaçant φ_0. En particulier, les facteurs de $\hat{g}^{\tau\tau}$ impliquant les perturbations métriques se sont exactement simplifiés, prouvant ainsi de manière définitive que l'effet de ces perturbations ne se répercute pas sur la valeur du facteur de Hubble mesurée localement par un observateur. La simplification est exacte, valide non seulement au deuxième ordre et pour des perturbations scalaires, comme on l'a montré dans [10], mais à tous les ordres et pour des perturbations métriques tout à fait générales.

§1.10 Remarques finales. Au terme de l'étude des équations d'Einstein que l'on a menée dans ce chapitre, il apparaît donc que les modes infrarouges des perturbations subies par la métrique d'un espace ne produisent aucun effet localement mesurable sur le taux d'expansion de l'espace. Cette conclusion est parfaitement générale dans le cas d'un univers contenant un champ scalaire ; elle l'est un peu moins lorsque l'espace contient un fluide parfait, dans la mesure où les composantes vectorielles des perturbations métriques peuvent alors en principe affecter le facteur de Hubble effectif de l'espace perturbé.

Par contre, même si leurs effets ne peuvent pas être mesurés par un observateur, les modes infrarouges des perturbations métriques en viennent tout de même à modifier sensiblement le contenu en énergie-impulsion de l'univers. Ils modifient la valeur du champ scalaire, ou encore la pression, la densité et la vitesse du fluide présent dans l'espace. Leur effet sur l'énergie-impulsion de l'espace n'est d'ailleurs pas arbitraire, mais présente toujours la même forme, peu importe le type de perturbations ou la jauge choisie pour les représenter.

Les modes infrarouges modifient les propriétés du fluide contenu dans l'espace, mais n'altèrent pas son équation d'état. Par exemple, si l'espace renferme une constante cosmologique, de sorte que $p_0 = -\rho_0$, alors les corrections à son énergie-impulsion induites par les modes infrarouges des perturbations métriques prennent également la forme d'une constante cosmologique, $\delta p \approx -\delta\rho$. Il s'agit là d'une conséquence découlant de l'analyse des équations d'Einstein, non d'une hypothèse qu'on aurait admise a priori. Il serait donc faux de prétendre que l'équation d'état reliant la pression et la densité générées par les perturbations métriques dépend sensiblement de la jauge choisie pour exprimer ces dernières, comme certains l'ont soutenu dans un article paru récemment [11].

Enfin, il ne faut pas conclure de l'analyse présentée dans ce chapitre que les perturbations métriques ne produisent aucun effet localement mesurable sur le taux d'expansion de l'univers. On peut seulement en conclure que ces effets, pour se manifester, requièrent des perturbations métriques qu'elles varient quelque peu dans le temps et l'espace. Autrement dit, pour mettre en évidence des effets proprement physiques dus aux perturbations métriques au-delà du premier ordre, il faut tenir compte de leurs dérivées, et ne pas les négliger complètement comme on l'a fait ici *.

§1.11 Critique d'un article paru récemment. Je veux terminer ce chapitre par quelques remarques sur un article paru récemment, par un groupe de chercheurs coréens [11]. Dans cet article, il est dit que l'équation d'état décrivant l'énergie-impulsion générée par les perturbations métriques n'est pas invariante de jauge, même dans la limite des modes infrarouges. Les auteurs de cet article prétendent montrer, par exemple, que dans un espace contenant de la radiation, c'est-à-dire pour lequel $p_0 = \frac{1}{3}\rho_0$, les modes infrarouges des perturbations métriques mènent à diverses équations d'état, selon la jauge choisie. Ils trouvent notamment

$$\begin{aligned} \delta p &\approx \frac{19}{39}\,\delta\rho \qquad \text{(jauge longitudinale)}, \\ \delta p &\approx \frac{2}{15k^2}\,\delta\rho \qquad \text{(jauge comobile)}. \end{aligned} \tag{1.82}$$

où k désigne le nombre d'onde des perturbations métriques. Non seulement ces résultats diffèrent l'un de l'autre, mais en plus aucun d'eux ne coïncide avec celui obtenu plus haut. Selon l'analyse précédente, on s'attendrait en effet à ce que les modes infrarouges des perturbations produisent la même équation d'état que dans l'espace de base, $\delta p \approx \frac{1}{3}\delta\rho$. Je vais montrer que les résultats précédents, qui semblent démontrer une dépendance radicale sur la jauge choisie pour les perturbations, sont en fait le produit d'une erreur d'approximation. En corrigeant cette erreur, on retombe alors naturellement sur l'équation d'état appropriée, à savoir celle de l'espace de base.

Suivant ainsi l'article des chercheurs coréens, on considère un espace en expansion dont la métrique subit de petites perturbations de type scalaire. On adopte ici l'approche non standard décrite plus haut, de sorte qu'on cherche à calculer la correction au tenseur d'énergie-impulsion générée par les termes de deuxième ordre. Si l'on choisit la jauge

*La même conclusion est énoncée dans [9], sur la base de l'analyse conduite dans [8].

longitudinale pour les perturbations, et qu'on se concentre sur leurs modes de grandes longueurs d'onde, on trouve alors

$$
\begin{aligned}
\kappa\delta T_{\tau\tau} &= \kappa a^2 \delta\rho \approx -3\dot{\psi}^2 - 12\mathcal{H}^2\psi^2, \\
\kappa\delta T_{ij} &= \kappa a^2 \delta p\, \delta_{ij} \approx \Big(8\mathcal{H}\psi\dot{\psi} + \dot{\psi}^2 + \big(8\dot{\mathcal{H}} + 4\mathcal{H}^2\big)\psi^2\Big)\delta_{ij},
\end{aligned}
\tag{1.83}
$$

où ψ représente la perturbation métrique scalaire. On a négligé toutes ses dérivées spatiales puisqu'on s'intéresse ici à ses modes infrarouges. En résolvant les équations d'Einstein au premier ordre, on trouve que les modes de ψ, dans un espace contenant de la radiation, sont donnés par

$$
\psi_k(\tau) = \frac{A_k}{\tau^3}\left[\frac{k\tau}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{k\tau}{\sqrt{3}}\right) - \sin\left(\frac{k\tau}{\sqrt{3}}\right)\right] + \frac{B_k}{\tau^3}\left[\frac{k\tau}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{k\tau}{\sqrt{3}}\right) + \cos\left(\frac{k\tau}{\sqrt{3}}\right)\right], \tag{1.84}
$$

où A_k et B_k sont les deux constantes d'intégration, lesquelles peuvent dépendre arbitrairement de k. L'expression précédente est exacte, mais on peut la développer en série pour de petites valeurs de k, de sorte qu'elle devient alors

$$
\psi_k(\tau) \approx C_k + \frac{B_k}{\tau^3}, \tag{1.85}
$$

où l'on a redéfini la première constante d'intégration en posant $C_k = -\frac{1}{9\sqrt{3}}\, k^3 A_k$, ce qui est tout à fait justifié puisque A_k dépend déjà arbitrairement de k. C'est ce fait que les chercheurs coréens semblent avoir oublié, car ils ont cru bon de négliger complètement le premier terme de ψ_k. Notons au passage que les modes infrarouges de la perturbation métrique prennent ici exactement la forme que je leur ai supposée au début de mon analyse. Ils se composent d'un terme indépendant du temps, ainsi que d'un terme décroissant avec le temps. Les chercheurs coréens ont négligé le premier terme, en conservant le second, alors que j'ai fait l'inverse, ce qui m'apparaît plus adéquat. Dans tous les cas, on trouve en général, avec $\mathcal{H} = \frac{1}{\tau}$ pour de la radiation,

$$
\begin{aligned}
\kappa a^2 \delta\rho &\approx -\frac{12}{\tau^2}\, C_k^2 - \frac{24}{\tau^5}\, C_k B_k - \frac{39}{\tau^8}\, B_k^2, \\
\kappa a^2 \delta p &\approx -\frac{4}{\tau^2}\, C_k^2 - \frac{32}{\tau^5}\, C_k B_k - \frac{19}{\tau^8}\, B_k^2,
\end{aligned}
\tag{1.86}
$$

ce qui permet d'obtenir les deux expressions citées plus haut pour l'équation d'état induite par les modes infrarouges des perturbations métriques. Selon qu'on néglige les termes en C_k ou ceux en B_k dans l'expression précédente, on trouve en effet

$$\begin{aligned} \delta p &\approx \frac{1}{3}\,\delta\rho \qquad \text{(termes en } B_k \text{ négligés)}, \\ \delta p &\approx \frac{19}{39}\,\delta\rho \qquad \text{(termes en } C_k \text{ négligés)}. \end{aligned} \tag{1.87}$$

Tout bien considéré, il est clair que l'équation d'état obtenue par les chercheurs coréens est erronée, les termes impliquant B_k diminuant beaucoup plus rapidement avec le temps que ceux en C_k^2, de sorte que ces derniers dominent les premiers au fil de l'expansion de l'espace. Par ailleurs, lorsqu'on corrige leur erreur d'approximation, les équations d'état qu'on obtient pour les trois jauges considérées s'avèrent toutes identiques à celle de l'espace de base, invalidant ainsi l'idée principale de leur article. Pour mettre en doute la réalité physique des effets générés par les modes infrarouges des perturbations métriques, il faut donc employer des arguments plus subtils que celui consistant à calculer l'équation d'état induite par ces perturbations selon différents choix de jauge.

Chapitre 2

Développement en série de l'action gravitationnelle

Dans ce chapitre, on reprend le développement perturbatif entrepris dans le chapitre précédent, mais en l'appliquant cette fois-ci directement à l'action gravitationnelle, plutôt qu'aux équations d'Einstein qui en découlent. On va supposer que la métrique de l'espace subit une petite variation, puis on va calculer l'effet de cette variation sur la valeur de l'action gravitationnelle. Les termes de premier ordre dans ce développement redonneront simplement les équations d'Einstein, de sorte que, pour étudier la perturbation de ces équations, il importe de conserver les termes au moins jusqu'au deuxième ordre.

§2.1 Intérêt de cette approche. Plus spécifiquement, on considère ici un espace tout à fait général, de métrique $g_{\mu\nu}$ quelconque, à laquelle on joint de petites perturbations $h_{\mu\nu}$, de sorte que la nouvelle métrique pour cet espace s'écrit $\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. Il importe de souligner que les perturbations $h_{\mu\nu}$ ainsi définies ne coïncident pas tout à fait avec celles considérées dans le chapitre précédent ; il faudrait en extraire la dépendance sur le facteur d'échelle pour que la correspondance soit exacte. En insérant la nouvelle métrique dans l'action gravitationnelle, on retrouve l'action pour l'espace initial, plus des corrections suivant les différentes puissances des perturbations métriques,

$$\bar{S} = S + S^{(1)} + S^{(2)} + \cdots \,. \tag{2.1}$$

On sait à l'avance que les termes dans $S^{(1)}$ sont donnés par les équations d'Einstein pour l'espace de base. L'action gravitationnelle est en effet définie de façon à ce que sa variation de premier ordre par rapport à la métrique conduise directement aux équations classiques vérifiées dans l'espace de base. En particulier, si le contenu en énergie-impulsion de l'espace est représenté par le tenseur $T_{\mu\nu}$, on trouve alors

$$S^{(1)} = -\int \mathrm{d}^4x \, \sqrt{g} \, \big(G_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu}\big) h^{\mu\nu}. \tag{2.2}$$

Plus généralement, le développement de l'action gravitationnelle prend la forme d'une série d'opérations différentielles sur la métrique et ses perturbations. Ce sont d'ailleurs les mêmes opérations différentielles que l'on rencontre lorsqu'on développe de manière perturbative les équations d'Einstein, comme on l'a fait dans le chapitre précédent. Pour retrouver les équations d'Einstein et ses perturbations à partir du développement de l'action, il suffit de poser chacun des termes de ce développement égal à zéro. Ainsi, $S^{(1)} = 0$ redonne les équations d'Einstein, $S^{(2)} = 0$ conduit à la première perturbation de ces équations, et ainsi de suite pour les ordres supérieurs. L'approche proposée ici s'avère donc parfaitement équivalente, d'un point de vue classique, à celle suivie dans le chapitre précédent.

L'intérêt majeur de l'approche basée sur l'action est que l'on peut alors inclure certaines corrections qui ne sont pas classiques, en l'occurence des corrections quantiques à la gravitation d'Einstein. Typiquement, dans la théorie quantique, on ne postule pas que les équations classiques sont partout et toujours rigoureusement satisfaites par les champs. Cela est particulièrement évident dans la formulation de la théorie quantique en termes d'intégrales de chemin, où il clair que l'équation classique n'est qu'une équation plus ou moins probable parmi toutes les équations possibles. Même dans les formulations les plus élémentaires de la théorie quantique, on évite de se restreindre au cas classique, en admettant par exemple que les particules échangées lors d'un processus peuvent posséder des quantités de mouvement ne satisfaisant pas l'équation classique (on dit alors que ces particules sont « off shell »).

Pour cette raison, si l'on souhaite tenir compte de certaines corrections quantiques pour les phénomènes gravitationnels, l'approche suivie dans le chapitre précédent ne semble pas convenir, car elle repose sur l'idée que les équations d'Einstein sont rigoureusement satisfaites. Il est nécessaire de procéder autrement, en développant l'action plutôt que les équations d'Einstein. Au niveau de l'action, rien n'impose en effet aux termes de premier ordre d'être rigoureusement nuls, $S^{(1)} \neq 0$, ce qui permet ainsi aux équations d'Einstein pour l'espace de base de ne pas être vérifiées, $G_{\mu\nu} \neq \kappa T_{\mu\nu}$.

On peut néanmoins faire disparaître ces termes de premier ordre en prenant la valeur moyenne de l'action. En effet, si l'on suppose que les perturbations de la métrique s'annulent en moyenne, $\langle h_{\mu\nu} \rangle = 0$, ce qui est le cas par exemple lorsque la géométrie de l'espace est perturbée de manière aléatoire, sans qu'aucune tendance ou direction ne soit privilégiée, on trouve alors

$$\left\langle S^{(1)} \right\rangle = -\int \mathrm{d}^4x \sqrt{g} \left(G_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu} \right) \langle h^{\mu\nu} \rangle = 0, \tag{2.3}$$

ce qui implique que

$$\left\langle \bar{S} \right\rangle = S + \left\langle S^{(2)} \right\rangle + \cdots . \tag{2.4}$$

Ainsi, en moyenne, l'action pour l'espace perturbé est égale à l'action de l'espace de base, plus certaines corrections, dont la première est quadratique dans les perturbations métriques. Cette idée servira notamment de point de départ à l'analyse menée dans le dernier chapitre de ce mémoire.

§2.2 Métrique inverse et déterminant. Au terme de ce travail, on compte poursuivre le raisonnement que l'on vient d'amorcer, en calculant explicitement la première correction quantique due aux perturbations affectant la métrique. Comme cette correction est donnée par les termes de deuxième ordre dans l'action, il faut donc commencer par déterminer l'expression générale de ces termes. C'est ce qu'on se propose d'accomplir dans ce chapitre.

On va se concentrer sur la partie purement gravitationnelle de l'action, en repoussant à plus tard le développement de sa partie représentant le contenu en énergie-impulsion de l'espace. Dans l'espace de base, l'action purement gravitationnelle est donnée par

$$S = \int \mathrm{d}^4x \sqrt{g}\, R. \tag{2.5}$$

Pour développer cette action dans l'espace perturbé, suivant les différentes puissances des perturbations, il faut connaître notamment le développement en série du déterminant de la nouvelle métrique et de son inverse. Pour ce faire, il est commode de réécrire la nouvelle métrique comme

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}(\delta^{\rho}_{\nu} + h^{\rho}_{\nu}), \tag{2.6}$$

où $h^{\nu}_{\mu} = g^{\nu\rho}h_{\mu\rho}$. Plus généralement, dans ce chapitre, les indices des différents tenseurs seront toujours élevés et abaissés au moyen de la métrique de l'espace de base. L'astuce consiste maintenant à exprimer la métrique et ses perturbations par de simples matrices, de façon à que le développement de son inverse et de son déterminant se réduise à celui de fonctions matricielles. En termes de matrices, la nouvelle métrique s'écrit

$$\bar{\mathbf{g}} = \mathbf{g}(\mathbf{1} + \mathbf{h}), \tag{2.7}$$

où les éléments de la matrice $\mathbf{g}$ correspondent aux composantes de la métrique de l'espace de base, $g_{\mu\nu}$, et similairement pour $\bar{\mathbf{g}}$, alors que les éléments de $\mathbf{h}$ désignent les perturbations h^{ν}_{μ}. L'inverse de la nouvelle métrique est donc

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{g}}^{-1} &= \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{1} \,+\, \mathbf{h})^{-1} \\ &\approx \mathbf{g}^{-1}\left(\mathbf{1} - \mathbf{h} + \mathbf{h}^2\right), \end{aligned} \tag{2.8}$$

où l'on a simplement développé en série la fonction inverse jusqu'au deuxième ordre. Les composantes de la métrique inverse sont ainsi

$$\bar{g}^{\mu\nu} \approx g^{\mu\rho}(\delta^{\nu}_{\rho} - h^{\nu}_{\rho} + h^{\sigma}_{\rho}h^{\nu}_{\sigma}) = g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^{\mu}_{\rho}h^{\rho\nu}. \tag{2.9}$$

Suivant un raisonnement similaire, il serait facile d'obtenir les termes d'ordre supérieur dans le développement en série pour la métrique inverse, ce qu'il ne serait d'ailleurs pas si aisé d'accomplir en raisonnant sans recourir aux matrices. De la même façon, il est possible de développer en série le déterminant de la nouvelle métrique. Dans ce cas-ci, on se sert du fait que le déterminant de l'exponentielle d'une matrice carrée quelconque $\mathbf{A}$ est égal à l'exponentielle de sa trace,

$$\det e^{\mathbf{A}} = e^{\operatorname{tr}\mathbf{A}}. \tag{2.10}$$

Cette proposition peut être succinctement démontrée si la matrice $\mathbf{A}$ est réelle et symétrique, comme c'est le cas notamment pour la métrique d'un espace. Dans ce cas, la matrice est diagonalisable, de sorte que $e^{\mathbf{A}} = \mathbf{U}\, e^{\mathbf{D}}\, \mathbf{U}^{-1}$, où $\mathbf{D}$ est une matrice diagonale dont les éléments sont les valeurs propres de $\mathbf{A}$. Prenant le déterminant, on trouve que

$$\det e^{\mathbf{A}} = \det e^{\mathbf{D}} = \prod_n e^{A_n}, \tag{2.11}$$

où A_n désigne les valeurs propres de $\mathbf{A}$. Comme la trace d'une matrice diagonalisable est égale à la somme de ses valeurs propres, il s'ensuit donc que $\det e^{\mathbf{A}} = e^{\sum_n A_n} = e^{\operatorname{tr}\mathbf{A}}$, ce qui achève de prouver la proposition, du moins dans le cas d'une matrice symétrique. Cette proposition se montre particulièrement utile, car elle permet de réduire le calcul passablement compliqué d'un déterminant à celui d'une simple trace. Ainsi, le déterminant de la nouvelle métrique est donné par

$$\det \bar{\mathbf{g}} = \det \mathbf{g}\, \det(1 + \mathbf{h}) = \det \mathbf{g}\, \det e^{\ln(\mathbf{1} + \mathbf{h})}. \tag{2.12}$$

En appliquant la proposition générale que l'on vient de démontrer, on obtient

$$\begin{aligned} \det \bar{\mathbf{g}} &= \det \mathbf{g}\, e^{\operatorname{tr}\ln(\mathbf{1} + \mathbf{h})} \\ &\approx \det \mathbf{g} \left(1 + \operatorname{tr}\ln(1 + \mathbf{h}) + \frac{1}{2}\big(\operatorname{tr}\ln(1 + \mathbf{h})\big)^2 \right) \\ &\approx \det \mathbf{g} \left(1 + \operatorname{tr}\mathbf{h} + \frac{1}{2}(\operatorname{tr}\mathbf{h})^2 - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{h}^2) \right), \end{aligned} \tag{2.13}$$

où l'on s'est servi de la série usuelle pour le logarithme. En prenant la valeur absolue de l'équation précédente, puis en revenant à la notation habituelle, on trouve finalement

$$\bar{g} \approx g \left(1 + h + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}h^{\nu}_{\mu}h^{\mu}_{\nu} \right). \tag{2.14}$$

L'action gravitationnelle n'implique pas directement le déterminant de la métrique, mais sa racine carrée, qui est donnée plutôt par

$$\sqrt{\bar{g}} \approx \sqrt{g} \left(1 + \frac{1}{2}h + \frac{1}{8}h^2 - \frac{1}{4}h^{\nu}_{\mu}h^{\mu}_{\nu} \right). \tag{2.15}$$

§2.3 Tenseur et scalaire de Ricci. L'action gravitationnelle implique également le scalaire de Ricci, de sorte qu'il faut aussi connaître son développement en série au moins jusqu'au deuxième ordre. Or, comme le scalaire de Ricci du nouvel espace est donné par $\bar{R} = \bar{g}^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\nu}$, et que l'on sait déjà comment développer la métrique inverse, il ne reste donc plus qu'à faire de même pour le tenseur de Ricci. Ce dernier peut être calculé à partir des symboles de Christoffel du nouvel espace,

$$\bar{R}_{\mu\nu} = \partial_\rho \bar{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu \bar{\Gamma}^\rho_{\mu\rho} + \bar{\Gamma}^\rho_{\rho\sigma}\bar{\Gamma}^\sigma_{\mu\nu} - \bar{\Gamma}^\rho_{\nu\sigma}\bar{\Gamma}^\sigma_{\mu\rho}. \tag{2.16}$$

Il faut développer les symboles de Christoffel du nouvel espace au moins jusqu'au deuxième ordre. En repoussant ce calcul à plus tard, on peut néanmoins écrire symboliquement

$$\bar{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\mu\nu} + A^\rho_{\mu\nu} + B^\rho_{\mu\nu} + \cdots , \tag{2.17}$$

où $A^\rho_{\mu\nu}$ et $B^\rho_{\mu\nu}$ comprennent respectivement les termes de premier et de deuxième ordre dans le développement en série des symboles de Christoffel. À ce stade, il n'est pas nécessaire de calculer explicitement ces variations, car cela rendrait les calculs encore plus touffus qu'ils ne le sont déjà. Par ailleurs, on s'attend à ce que la deuxième variation des symboles de Christoffel ne figure pas dans l'expression finale de l'action au deuxième ordre perturbatif, dans la mesure où elle n'apparaît pas non plus quand on perturbe les équations d'Einstein au premier ordre. Ainsi, en se servant de l'expression précédente pour les symboles de Christoffel du nouvel espace, on trouve

$$\begin{aligned}\bar{R}_{\mu\nu} \approx\, & \partial_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} + \partial_\rho A^\rho_{\mu\nu} + \partial_\rho B^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\rho} - \partial_\nu A^\rho_{\mu\rho} - \partial_\nu B^\rho_{\mu\rho} \\ & + \Gamma^\rho_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} + A^\rho_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\rho_{\rho\sigma}A^\sigma_{\mu\nu} + A^\rho_{\rho\sigma}A^\sigma_{\mu\nu} + B^\rho_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\rho_{\rho\sigma}B^\sigma_{\mu\nu} \\ & - \Gamma^\rho_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\rho} - A^\rho_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\rho} - \Gamma^\rho_{\nu\sigma}A^\sigma_{\mu\rho} - A^\rho_{\nu\sigma}A^\sigma_{\mu\rho} - B^\rho_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\rho} - B^\rho_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\rho}.\end{aligned} \tag{2.18}$$

Tous les termes dans lesquels ne figure aucun facteur de la perturbation métrique correspondent évidemment au tenseur de Ricci de l'espace de base. Sans perturbation, il s'ensuivrait en effet que $\bar{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$. De plus, il s'avère que les termes de premier ordre impliquant $A^\rho_{\mu\nu}$, de même que ceux de second ordre impliquant $B^\rho_{\mu\nu}$, peuvent être regroupés pour produire deux dérivées covariantes. Par exemple, les termes de premier ordre impliquant $A^\rho_{\mu\nu}$ sont donnés par

$$\begin{aligned}\nabla_\rho A^\rho_{\mu\nu} - \nabla_\nu A^\rho_{\mu\rho} = \partial_\rho A^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu A^\rho_{\mu\rho} + A^\rho_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\rho_{\rho\sigma}A^\sigma_{\mu\nu} \\ - A^\rho_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\rho} - \Gamma^\rho_{\nu\sigma}A^\sigma_{\mu\rho},\end{aligned} \tag{2.19}$$

et similairement pour ceux impliquant $B^\rho_{\mu\nu}$. Le développement du tenseur de Ricci jusqu'au deuxième ordre se réduit alors à seulement quelques termes,

$$\bar{R}_{\mu\nu} \approx R_{\mu\nu} + \nabla_\rho A^\rho_{\mu\nu} - \nabla_\nu A^\rho_{\mu\rho} + \nabla_\rho B^\rho_{\mu\nu} - \nabla_\nu B^\rho_{\mu\rho} + A^\rho_{\rho\sigma}A^\sigma_{\mu\nu} - A^\rho_{\nu\sigma}A^\sigma_{\mu\rho}. \tag{2.20}$$

Il est commode d'identifier séparément les contributions de premier et de deuxième ordre dans le développement précédent, en écrivant le tenseur de Ricci du nouvel espace comme $\bar{R}_{\mu\nu} \approx R_{\mu\nu} + R^{(1)}_{\mu\nu} + R^{(2)}_{\mu\nu}$, où $R^{(1)}_{\mu\nu}$ et $R^{(2)}_{\mu\nu}$ comprennent respectivement tous les termes de premier et de deuxième ordre,

$$\begin{aligned} R^{(1)}_{\mu\nu} &= \nabla_\rho A^\rho_{\mu\nu} - \nabla_\nu A^\rho_{\mu\rho}, \\ R^{(2)}_{\mu\nu} &= \nabla_\rho B^\rho_{\mu\nu} - \nabla_\nu B^\rho_{\mu\rho} + A^\rho_{\rho\sigma}A^\sigma_{\mu\nu} - A^\rho_{\nu\sigma}A^\sigma_{\mu\rho}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

On peut obtenir une série similaire pour le scalaire de Ricci du nouvel espace,

$$\bar{R} = \bar{g}^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\nu} \approx \big(g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^\mu_\rho h^{\rho\nu}\big)\big(R_{\mu\nu} + R^{(1)}_{\mu\nu} + R^{(2)}_{\mu\nu}\big). \tag{2.22}$$

Encore une fois, on identifie séparément les contributions de premier et de deuxième ordre, en écrivant $\bar{R} \approx R + R^{(1)} + R^{(2)}$, avec

$$\begin{aligned} R^{(1)} &= g^{\mu\nu}R^{(1)}_{\mu\nu} - h^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \\ R^{(2)} &= g^{\mu\nu}R^{(2)}_{\mu\nu} - h^{\mu\nu}R^{(1)}_{\mu\nu} + h^\mu_\rho h^{\rho\nu}R_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

§2.4 Développement de l'action. On peut maintenant revenir au problème initial et développer l'action gravitationnelle jusqu'au deuxième ordre, en se servant des séries que l'on vient d'établir notamment pour le scalaire de Ricci et le déterminant de la nouvelle métrique,

$$\begin{aligned}\bar{S} = \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{\bar{g}}\bar{R} &\approx \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{g}\left(1 + \frac{1}{2}h + \frac{1}{8}h^2 - \frac{1}{4}h^\sigma_\rho h^\rho_\sigma\right)\big(R + R^{(1)} + R^{(2)}\big) \\ &\approx \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{g}\Big(R + \mathcal{L}^{(1)}_R + \mathcal{L}^{(2)}_R\Big),\end{aligned} \tag{2.24}$$

La contribution de premier ordre dans ce développement s'écrit

$$\mathcal{L}_R^{(1)} = R^{(1)} + \frac{1}{2}hR = -h^{\mu\nu}G_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}^{(1)}, \tag{2.25}$$

où $G_{\mu\nu}$ désigne le tenseur d'Einstein. Le second terme présent dans cette expression correspond à une pure divergence dans l'espace de base,

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}^{(1)} = \nabla_\rho\big(g^{\mu\nu}A_{\mu\nu}^\rho - g^{\mu\rho}A_{\mu\nu}^\nu\big). \tag{2.26}$$

Ce terme peut donc être négligé, dans la mesure où il se réduit à une intégrale de surface dans l'action. En général, pour éviter de retranscrire de tels termes inutilement, on va se permettre de les négliger dès qu'ils apparaissent dans les raisonnements, en ajoutant un « tilde » au-dessus du symbole d'égalité, afin de signifier que l'égalité est valide à l'exception de certaines divergences qu'on a laissé tomber. Par exemple, on peut écrire dans ce cas-ci $\mathcal{L}_R^{(1)} \cong -h^{\mu\nu}G_{\mu\nu}$, ce qui confirme d'ailleurs le résultat bien connu, selon lequel la première variation de l'action gravitationnelle est donnée par le tenseur d'Einstein. La contribution de deuxième ordre est quant à elle donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_R^{(2)} &= R^{(2)} + \frac{1}{2}hR^{(1)} + \left(\frac{1}{8}h^2 - \frac{1}{4}h_\rho^\sigma h_\sigma^\rho\right)R \\ &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}^{(2)} - \left(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}hg^{\mu\nu}\right)R_{\mu\nu}^{(1)} + \left(h_\rho^\mu h^{\rho\nu} - \frac{1}{2}hh^{\mu\nu} + \frac{1}{8}h^2g^{\mu\nu} - \frac{1}{4}h_\rho^\sigma h_\sigma^\rho g^{\mu\nu}\right)R_{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{2.27}$$

On veut réécrire ce lagrangien directement en termes des perturbations métriques, qui figurent implicitement dans les facteurs $R_{\mu\nu}^{(1)}$ et $R_{\mu\nu}^{(2)}$ présents dans les deux premiers termes. D'une part, on a que

$$\begin{aligned}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}^{(2)} &= \nabla_\rho\big(g^{\mu\nu}B_{\mu\nu}^\rho - g^{\mu\rho}B_{\mu\nu}^\nu\big) + g^{\mu\nu}A_{\rho\sigma}^\rho A_{\mu\nu}^\sigma - g^{\mu\nu}A_{\nu\sigma}^\rho A_{\mu\rho}^\sigma \\ &\cong g^{\mu\nu}A_{\rho\sigma}^\rho A_{\mu\nu}^\sigma - g^{\mu\nu}A_{\nu\sigma}^\rho A_{\mu\rho}^\sigma,\end{aligned} \tag{2.28}$$

où l'on a laissé tomber tous les termes impliquant $B_{\mu\nu}^\rho$, car ils constituaient une pure divergence. La seconde variation des symboles de Christoffel n'apparaît donc pas dans le développement de l'action au second ordre, comme on l'avait pressenti initialement, même s'il était a priori nécessaire d'en tenir compte. Une situation similaire est également survenue au premier ordre, où les termes impliquant $A^\rho_{\mu\nu}$ ont pu être négligés pour la même raison, de sorte qu'une telle simplification risque aussi de se produire à tous les ordres perturbatifs. D'autre part, on a que

$$\begin{aligned}\left(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}hg^{\mu\nu}\right) R^{(1)}_{\mu\nu} &= \left(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}hg^{\mu\nu}\right) \left(\nabla_\rho A^\rho_{\mu\nu} - \nabla_\nu A^\rho_{\mu\rho}\right) \\ &\cong -\nabla_\rho \left(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}hg^{\mu\nu}\right) A^\rho_{\mu\nu} + \nabla_\nu \left(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}hg^{\mu\nu}\right) A^\rho_{\mu\rho}.\end{aligned} \tag{2.29}$$

Il ne reste plus qu'à remplacer $A^\rho_{\mu\nu}$ par son expression en termes de la perturbation métrique. Tel que défini précédemment, ce facteur correspond à la première variation des symboles de Christoffel, $A^\rho_{\mu\nu} \approx \bar{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}$. Ainsi, en prenant $\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, et en ne conservant que les termes de premier ordre, on trouve

$$A^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\nabla_\mu h^\rho_\nu + \nabla_\nu h^\rho_\mu - \nabla^\rho h_{\mu\nu}\right). \tag{2.30}$$

Avec cette expression pour $A^\rho_{\mu\nu}$, on peut alors exprimer les termes de deuxième ordre dans l'action gravitationnelle directement en termes des perturbations métriques. Il suffit d'effectuer un certain nombre de multiplications pour obtenir notamment

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} R^{(2)}_{\mu\nu} &\cong \frac{1}{4}\nabla_\rho h^\nu_\mu \nabla^\rho h^\mu_\nu - \frac{1}{2}\nabla_\mu h^\rho_\nu \nabla^\nu h^\mu_\rho + \frac{1}{2}\nabla_\mu h \nabla^\nu h^\mu_\nu - \frac{1}{4}\nabla_\mu h \nabla^\mu h, \\ \left(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}hg^{\mu\nu}\right) R^{(1)}_{\mu\nu} &\cong \frac{1}{2}\nabla_\rho h^\nu_\mu \nabla^\rho h^\mu_\nu - \nabla_\mu h^\rho_\nu \nabla^\nu h^\mu_\rho + \nabla_\mu h \nabla^\nu h^\mu_\nu - \frac{1}{2}\nabla_\mu h \nabla^\mu h, \end{aligned} \tag{2.31}$$

de sorte que la seconde variation de l'action gravitationnelle s'écrit finalement *

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(2)}_R \cong &-\frac{1}{4}\nabla_\rho h^\nu_\mu \nabla^\rho h^\mu_\nu + \frac{1}{2}\nabla_\mu h^\rho_\nu \nabla^\nu h^\mu_\rho - \frac{1}{2}\nabla_\mu h \nabla^\nu h^\mu_\nu + \frac{1}{4}\nabla_\mu h \nabla^\mu h \\ &+ h^\mu_\rho h^{\rho\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}hh^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \left(\frac{1}{8}h^2 - \frac{1}{4}h^\sigma_\rho h^\rho_\sigma\right) R.\end{aligned} \tag{2.32}$$

Il s'agit là de l'équation la plus importante de ce chapitre. Pour l'obtenir, rien n'a été présumé quant à la nature des perturbations métriques subies par l'espace, ou quant à la forme même de cet espace. Ce résultat général servira notamment de point de départ

*Si l'on se restreint au cas où l'espace de base est Minkowski, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, l'expression que l'on vient d'obtenir se réduit alors à celle fréquemment citée dans les ouvrages sur la relativité générale, par exemple dans [12], chapitre 7.

à l'étude présentée dans le dernier chapitre de ce mémoire, où il sera appliqué au cas particulier d'un espace en expansion.

Même si elle peut sembler lourde d'un point de vue mathématique, l'expression que l'on vient d'obtenir pour les termes de deuxième ordre dans l'action gravitationnelle prend une forme assez simple, quand on l'interprète physiquement comme le lagrangien d'un ensemble de champs. Elle comprend en effet des termes quadratiques dans les dérivées des perturbations métriques, termes assimilables à l'énergie cinétique de ces champs. Elle comprend aussi des termes sans dérivée, quadratiques dans les perturbations et représentant en quelque sorte la masse de ces champs.

On aura l'occasion de revenir sur cette interprétation physique dans le dernier chapitre. Il convient de noter pour l'instant que la masse associée aux perturbations métriques diffère substantiellement de celle d'un champ de matière. Elle ne leur est pas assignée dès le départ, comme un simple paramètre plus ou moins arbitraire, mais elle émerge plutôt avec le développement en série de l'action, se trouvant directement liée à la géométrie de l'espace par le biais de son tenseur et de son scalaire de Ricci.

§2.5 Autres formes pour la deuxième variation de l'action. Il est possible de réécrire l'expression que l'on vient d'obtenir pour les termes de deuxième ordre dans l'action gravitationnelle en l'intégrant par parties. Le seul terme susceptible d'être sensiblement modifié de cette façon est celui impliquant $\nabla_\mu h^\rho_\nu \nabla^\nu h^\mu_\rho$, qui peut être réécrit de façon à intervertir les deux dérivées y affectant les perturbations métriques. En intégrant une première fois par parties, on trouve

$$\nabla_\mu h^{\nu\rho} \nabla_\nu h^\mu_\rho \cong -h^{\nu\rho} \nabla_\mu \nabla_\nu h^\mu_\rho. \tag{2.33}$$

On ne peut toutefois pas intervertir les deux dérivées présentes dans ce terme comme on le ferait pour des dérivées ordinaires. Elles ne commutent pas l'une avec l'autre, de sorte que leur échange fait apparaître leur commutateur,

$$\begin{aligned} \nabla_\mu h^{\nu\rho} \nabla_\nu h^\mu_\rho &\cong -h^{\nu\rho} \big(\nabla_\nu \nabla_\mu + [\nabla_\mu, \nabla_\nu]\big) h^\mu_\rho \\ &\cong \nabla_\nu h^{\nu\rho} \nabla_\mu h^\mu_\rho - h^{\nu\rho} [\nabla_\mu, \nabla_\nu] h^\mu_\rho \end{aligned} \tag{2.34}$$

où l'on a intégré par parties une seconde fois, afin de compléter l'échange des deux dérivées. De manière générale, le commutateur de deux dérivées est intimement lié à la courbure de l'espace et donc au tenseur de Riemann qui lui est associé. Ainsi, on s'attend à ce que le second terme présent dans l'expression précédente n'ajoute aucune nouvelle dérivée à l'action, n'engendrant seulement qu'une combinaison de tenseurs de Riemann multipliant les perturbations métriques. Le commutateur de deux dérivées covariantes appliqué à un tenseur de second rang A_μ^ν est en effet donné par

$$\left[\nabla_\mu,\, \nabla_\nu\right] A^\sigma_\rho = R^\sigma_{\alpha\mu\nu} A^\alpha_\rho - R^\alpha_{\rho\mu\nu} A^\sigma_\alpha. \tag{2.35}$$

En appliquant cette identité, on trouve

$$\nabla_\mu h^{\nu\rho} \nabla_\nu h^\mu_\rho \cong \nabla_\nu h^{\nu\rho} \nabla_\mu h^\mu_\rho - h^{\nu\rho} h^\sigma_\rho R_{\sigma\nu} + h^{\nu\rho} h^\mu_\sigma R^\sigma_{\rho\mu\nu}, \tag{2.36}$$

où l'on a pris $R^\mu_{\sigma\mu\nu} = R_{\sigma\nu}$. Les termes de deuxième ordre dans l'action gravitationnelle peuvent donc aussi s'écrire comme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R^{(2)} \cong & -\frac{1}{4}\nabla_\rho h^\nu_\mu \nabla^\rho h^\mu_\nu + \frac{1}{2}\nabla_\mu h^\mu_\rho \nabla^\nu h^\rho_\nu - \frac{1}{2}\nabla_\mu h \nabla^\nu h^\mu_\nu + \frac{1}{4}\nabla_\mu h \nabla^\mu h \\ & + \frac{1}{2} h^{\nu\rho} h^\mu_\sigma R^\sigma_{\rho\mu\nu} + \frac{1}{2} h^\mu_\rho h^{\nu\rho} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h h^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \left(\frac{1}{8}h^2 - \frac{1}{4}h^\sigma_\rho h^\rho_\sigma\right) R. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Cette dernière expression est celle que l'on rencontre le plus souvent dans la littérature*. Pourtant, elle est peu pratique d'un point de vue calculatoire, dans la mesure où elle implique le tenseur de Riemann de l'espace de base, qui est souvent pénible à calculer même pour des espaces relativement simples, comme ceux en expansion. Dans le contexte de la cosmologie, on préfère donc remplacer ce tenseur par celui de Weyl, qui est plus facile à calculer puisqu'il est invariant sous transformation conforme, de sorte qu'il ne se trouve pas du tout affecté par l'expansion de l'espace.

En effet, si la métrique d'un espace quelconque subit une transformation conforme, étant multipliée par un certain facteur d'échelle, $\bar{g}_{\mu\nu} = a^2 g_{\mu\nu}$, on peut montrer que le tenseur de Weyl de cet espace ne se trouve pas modifié par la transformation, $\bar{C}^\sigma_{\rho\mu\nu} = C^\sigma_{\rho\mu\nu}$, contrairement au tenseur de Riemann. Il s'ensuit donc en particulier qu'un espace en

*On peut comparer, par exemple, avec l'équation 3.7 dans [26].

expansion de métrique $g_{\mu\nu} = a^2\eta_{\mu\nu}$, comme celui de Sitter, possède un tenseur de Weyl identiquement nul, ce dernier étant nul notamment pour un espace de Minkowski. C'est pourquoi on préfère recourir à ce tenseur plutôt qu'à celui de Riemann dans le contexte de la cosmologie.

Le tenseur de Weyl est défini par comme la partie sans trace du tenseur de Riemann. Il possède les mêmes symétries indicielles que ce tenseur, en plus d'être identiquement nul dès qu'on contracte l'un de ses indices, $C^{\mu}_{\rho\mu\nu} = 0$. Dans un espace à quatre dimensions, il est donné par

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = C_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{2}\big(g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma}\big) - \frac{1}{6}R\big(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}\big), \tag{2.38}$$

où $R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\alpha}R^{\alpha}_{\nu\rho\sigma}$ et similairement pour le tenseur de Weyl. De cette équation, on obtient directement

$$h^{\nu\rho}h^{\mu}_{\sigma}R^{\sigma}_{\rho\mu\nu} = h^{\nu\rho}h^{\mu}_{\sigma}C^{\sigma}_{\rho\mu\nu} + hh^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - h^{\mu}_{\rho}h^{\nu\rho}R_{\mu\nu} - \frac{1}{6}R\big(h^2 - h^{\nu}_{\mu}h^{\mu}_{\nu}\big), \tag{2.39}$$

ce qui permet de réécrire le terme de second ordre dans le développement de l'action gravitationnelle comme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)}_R \cong -\frac{1}{4}\nabla_\rho h^{\nu}_{\mu}\nabla^\rho h^{\mu}_{\nu} + \frac{1}{2}\nabla_\mu h^{\mu}_{\rho}\nabla^\nu h^{\rho}_{\nu} - \frac{1}{2}\nabla_\mu h\nabla^\nu h^{\mu}_{\nu} + \frac{1}{4}\nabla_\mu h\nabla^\mu h \\ + \frac{1}{2}h^{\nu\rho}h^{\mu}_{\sigma}C^{\sigma}_{\rho\mu\nu} + \left(\frac{1}{24}h^2 - \frac{1}{6}h^{\sigma}_{\rho}h^{\rho}_{\sigma}\right)R. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Il convient de rappeler que cette dernière équation n'est valide que pour un espace à quatre dimensions. Dans ce cas, la masse pouvant être associée aux perturbations métriques prend alors une forme particulièrement simple : elle comprend seulement deux termes, l'un donné par la trace du tenseur de Riemann (c'est-à-dire le scalaire de Ricci), l'autre par la partie sans trace de ce tenseur, qui s'avère identiquement nulle pour les espaces en expansion typiquement considérés en cosmologie.

§2.6 Ajout d'une constante cosmologique. Enfin, on peut également modifier le développement en série de l'action gravitationnelle en ajoutant dans l'espace un certain contenu en énergie-impulsion, par exemple une constante cosmologique. Le lagrangien approprié pour une constante cosmologique Λ est simplement $\mathcal{L}_\Lambda = -2\Lambda$, de sorte qu'il ne se trouve pas modifié lorsqu'on fait subir une légère variation à la métrique de l'espace. Le développement en série de l'action associée à une constante cosmologique est donc essentiellement le même que celui du déterminant de la métrique,

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{g}\,(-2\Lambda) &\approx \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{g}\left(1+\frac{1}{2}h+\frac{1}{8}h^2-\frac{1}{4}h^\nu_\mu h^\mu_\nu\right)(-2\Lambda)\\ &\approx \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{g}\Big(-2\Lambda+\mathcal{L}^{(1)}_\Lambda+\mathcal{L}^{(2)}_\Lambda\Big),\end{aligned} \tag{2.41}$$

où $\mathcal{L}^{(1)}_\Lambda$ et $\mathcal{L}^{(2)}_\Lambda$ désignent respectivement

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(1)}_\Lambda &= -\Lambda h,\\ \mathcal{L}^{(2)}_\Lambda &= -\Lambda\left(\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{2}h^\nu_\mu h^\mu_\nu\right).\end{aligned} \tag{2.42}$$

On peut maintenant combiner ce développement à celui obtenu plus haut pour l'action gravitationnelle dans le vide, de façon à obtenir l'action totale associée à un espace contenant une constante cosmologique. Au premier ordre, les deux contributions s'additionnent pour donner $\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}^{(1)}_R + \mathcal{L}^{(1)}_\Lambda = -h^{\mu\nu}(G^{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu})$, ce qui confirme que la première variation de l'action reproduit bel et bien le membre de gauche des équations d'Einstein contenant une constante cosmologique, $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$. De même, on peut combiner les deux contributions de second ordre, $\mathcal{L}^{(2)} = \mathcal{L}^{(2)}_R + \mathcal{L}^{(2)}_\Lambda$, de façon à obtenir

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(2)} \cong{}& -\frac{1}{4}\nabla_\rho h^\nu_\mu \nabla^\rho h^\mu_\nu + \frac{1}{2}\nabla_\mu h^\rho_\nu \nabla^\nu h^\mu_\rho - \frac{1}{2}\nabla_\mu h \nabla^\nu h^\mu_\nu + \frac{1}{4}\nabla_\mu h \nabla^\mu h\\ &+ h^\mu_\rho h^{\rho\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h h^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \left(\frac{1}{8}h^2 - \frac{1}{4}h^\sigma_\rho h^\rho_\sigma\right)\big(R-2\Lambda\big),\end{aligned} \tag{2.43}$$

c'est-à-dire, si l'on réécrit le tout en termes du tenseur de Weyl,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(2)} \cong{}& -\frac{1}{4}\nabla_\rho h^\nu_\mu \nabla^\rho h^\mu_\nu + \frac{1}{2}\nabla_\mu h^\mu_\rho \nabla^\nu h^\rho_\nu - \frac{1}{2}\nabla_\mu h \nabla^\nu h^\mu_\nu + \frac{1}{4}\nabla_\mu h \nabla^\mu h\\ &+ \frac{1}{2}h^{\nu\rho} h^\mu_\sigma C^\sigma_{\rho\mu\nu} + \frac{1}{4}h^2\left(\frac{1}{6}R-\Lambda\right) - \frac{1}{2}h^\sigma_\rho h^\rho_\sigma\left(\frac{1}{3}R-\Lambda\right).\end{aligned} \tag{2.44}$$

Chapitre 3

Théorie quantique dans l'espace de Sitter

Dans ce chapitre, on s'écarte quelque peu des sujets traités depuis le début de ce mémoire, en abordant la théorie quantique des champs scalaires dans des espaces en expansion. Un tel détour est nécessaire si l'on veut apporter des corrections quantiques à l'action gravitationnelle, comme on se propose de le faire par la suite.

En effet, dans le prochain chapitre, on va traiter les perturbations métriques affectant un espace en expansion comme des champs quantiques, immergés dans un espace purement classique. Autrement dit, ce n'est pas tout l'espace qui sera quantifié, mais seulement les petites perturbations qui en altèrent la forme. De plus, on va se limiter aux seules contributions de deuxième ordre dans le développement de l'action gravitationnelle, en négligeant tous les termes des ordres supérieurs. Dans le cadre de cette approximation, les perturbations métriques s'apparentent alors à des champs scalaires libres, possédant des masses déterminées par la courbure de l'espace de base. C'est pourquoi on se propose d'étudier, dans ce chapitre, la théorie des champs scalaires libres se trouvant dans des espaces en expansion. Des termes d'interaction pour les perturbations métriques apparaissent seulement lorsqu'on développe l'action gravitationnelle au-delà du deuxième ordre, à commencer par le troisième ordre qui fournit des interactions cubiques.

Les résultats présentés dans ce chapitre sont bien connus, de sorte qu'on les peut les retrouver aisément dans les ouvrages de référence sur le sujet, par exemple [14] et [22]. Pour le cas particulier d'un champ scalaire dans un espace de Sitter, j'ai également consulté l'un des articles originaux par Bunch et Davies [13].

§3.1 Champ scalaire dans un univers en expansion. On commence par considérer un espace en expansion général de métrique $g_{\mu\nu} = a^2\eta_{\mu\nu}$, où $a = a(t)$ désigne le facteur d'échelle. Dans cet espace se trouve un certain champ scalaire φ, possédant une masse quelconque m et décrit dynamiquement par l'action

$$S = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{g}\Big(-g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\,\partial_\nu\varphi - m^2\varphi^2\Big). \tag{3.1}$$

En termes du facteur d'échelle de l'espace, l'action du champ s'écrit

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\Big(-a^2\partial^\mu\varphi\,\partial_\mu\varphi - m^2a^4\varphi^2\Big) \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\Big(a^2\dot{\varphi}^2 - a^2(\nabla\varphi)^2 - m^2a^4\varphi^2\Big), \end{aligned} \tag{3.2}$$

où ∇ désigne ici les dérivées par rapport aux coordonnées spatiales. Le but est de quantiser le champ scalaire décrit par cette action, en l'élevant au rang d'opérateur et en exigeant qu'il satisfasse la relation de commutation canonique prescrite par la mécanique quantique. Pour ce faire, il convient de s'inspirer de la procédure bien établie pour le cas d'un champ scalaire dans un espace de Minkowski statique, avec $a = 1$. D'ailleurs, pour se rapprocher le plus possible de la situation rencontrée dans ce dernier cas, on choisit parfois de réécrire l'action précédente en termes d'un champ auxiliaire χ, de façon à ce que le facteur d'échelle disparaisse des termes cinétiques, pour ne plus figurer que dans le terme de masse. En posant $\chi = a\,\varphi$, on trouve en effet

$$\begin{aligned} a^2\partial^\mu\varphi\,\partial_\mu\varphi &= \partial^\mu\chi\,\partial_\mu\chi - \frac{\partial^\mu a}{a}\,\partial_\mu(\chi^2) + \frac{\chi^2}{a^2}\partial^\mu a\,\partial_\mu a \\ &\cong \partial^\mu\chi\,\partial_\mu\chi + \frac{\chi^2}{a}\,\partial^\mu\partial_\mu a, \end{aligned} \tag{3.3}$$

où l'on a négligé un terme de surface, de sorte que l'action du champ scalaire s'écrit maintenant

$$S = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\left(-\partial^\mu\chi\partial_\mu\chi - m^2a^2\chi^2 + \frac{\ddot{a}}{a}\chi^2\right). \tag{3.4}$$

Ainsi, en termes du champ auxiliaire χ, l'action ressemble de près à celle d'un champ scalaire dans un espace de Minkowski statique, la seule différence étant que le champ possède ici une masse effective variant avec le temps [22],

$$m_{\text{eff}}^2 = a^2m^2 - \frac{\ddot{a}}{a}. \tag{3.5}$$

Il est possible que ce champ en vienne à acquérir une masse effective négative, en particulier lorsque l'espace connaît une expansion accélérée, avec $\ddot{a} > 0$, comme c'est le cas notamment dans un espace de Sitter. L'intérêt principal de ce champ est de permettre une comparaison étroite entre la situation présente, où le champ existe dans un espace en expansion, et celle bien connue où il se trouve dans un espace plat.

Toutefois, il ne faudrait pas en conclure que ce champ auxiliaire est véritablement indispensable à la procédure de quantification que l'on compte entreprendre : on peut en effet tout aussi bien quantifier φ que χ, dans la mesure où ces deux champs sont reliés l'un à l'autre par le facteur d'échelle, c'est-à-dire par une simple fonction qu'on n'entend pas élever au rang d'opérateur. Si l'un de ces champs est quantifié, l'autre l'est aussi, et ils possèdent alors des relations de commutation et des fonctions de corrélation identiques, à certaines puissances du facteur d'échelle près. Comme φ est le champ d'intérêt, on choisit donc de quantifier ce champ-là, en gardant toutefois en mémoire que sa comparaison avec le cas de Minkowski est facilitée quand on le multiplie par le facteur d'échelle.

L'équation classique satisfaite par le champ φ est celle d'Euler-Lagrange, que l'on obtient en posant la première variation de l'action par rapport à φ égale à zéro. On trouve alors

$$- \partial_\mu\big(a^2\partial^\mu\varphi\big) + m^2a^4\varphi = 0, \tag{3.6}$$

c'est-à-dire, sachant que le facteur d'échelle ne dépend que du temps,

$$\ddot{\varphi} - \nabla^2\varphi + \frac{2\dot{a}}{a}\,\dot{\varphi} + m^2a^2\varphi = 0. \tag{3.7}$$

Il suffit maintenant de trouver la solution de cette équation en l'exprimant en termes de ses modes de Fourier, pour pouvoir ensuite quantifier ces différents modes comme on le fait typiquement dans le cas d'un oscillateur harmonique quantique. On commence donc par écrire le champ en termes de sa transformée de Fourier spatiale,

$$\begin{aligned}\varphi(\tau,\mathbf{x}) &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\Big(a_{\mathbf{k}}\,\varphi_k(\tau)\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a^*_{\mathbf{k}}\,\varphi^*_k(\tau)\,e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\Big)\\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,\Big(a_{\mathbf{k}}\,\varphi_k(\tau) + a^*_{-\mathbf{k}}\,\varphi^*_k(\tau)\Big).\end{aligned} \tag{3.8}$$

où il suffit de remplacer $\mathbf{k}$ par $-\mathbf{k}$ dans le second terme pour passer d'une ligne à l'autre. La transformée de Fourier du champ comprend deux termes, l'un étant le conjugué complexe de l'autre, de façon à garantir que le champ lui-même demeure réel, $\varphi^* = \varphi$.

Les deux termes de la transformée de Fourier du champ sont eux-mêmes donnés par le produit de deux facteurs : un coefficient $a_{\mathbf{k}}$ que l'on suppose constant, multipliant une fonction φ_k qui varie avec le temps. Ce sont les coefficients $a_{\mathbf{k}}$ et $a^*_{\mathbf{k}}$ que l'on va élever au rang d'opérateurs quantiques, en traitant les fonctions φ_k qu'ils multiplient de manière purement classique. Chacun de ces facteurs joue donc un rôle qui lui est propre : l'un contient le caractère quantique du champ et l'autre sa dépendance temporelle.

Dans le cas d'un champ situé dans un espace de Minkowski, les coefficients $a_{\mathbf{k}}$ et $a^*_{\mathbf{k}}$ représentent respectivement les opérateurs d'annihilation et de création de particules ou d'excitations du champ. Cette interprétation devient toutefois quelque peu ambiguë dès qu'on se situe dans un espace en expansion, où la notion de vide ne peut être définie de manière univoque [14]. On suppose néanmoins que ces deux opérateurs satisfont ici les mêmes relations de commutation que dans le cas de Minkowski. Les opérateurs de même espèce, ainsi que ceux associés à des modes de Fourier différents, commutent tous les uns avec les autres ; seuls les opérateurs $a_{\mathbf{k}}$ et $a^*_{\mathbf{k}}$ associés au même mode ne commutent pas entre eux,

$$\begin{aligned} \big[a_{\mathbf{k}},\, a_{\mathbf{k}'}\big] &= 0, \\ \big[a^*_{\mathbf{k}},\, a^*_{\mathbf{k}'}\big] &= 0, \\ \big[a_{\mathbf{k}},\, a^*_{\mathbf{k}'}\big] &= (2\pi)^3\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Enfin, la fonction $\varphi_k = \varphi_k(\tau)$ contient toute la dépendance temporelle du champ φ. Elle satisfait donc la même équation différentielle que ce dernier, lorsqu'on l'écrit dans l'espace de Fourier. L'équation satisfaite par cette fonction ne dépend d'ailleurs que de la norme du vecteur d'onde, $k = |\mathbf{k}|$, et non de sa direction, ce qui explique pourquoi on a choisi d'écrire φ_k plutôt que $\varphi_{\mathbf{k}}$. En insérant la transformée de Fourier du champ dans l'équation qu'il vérifie, ou en y remplaçant plus simplement ∇^2 par $-k^2$, on trouve

$$\ddot{\varphi}_k + \frac{2\dot{a}}{a}\,\dot{\varphi}_k + \big(k^2 + m^2 a^2\big)\varphi_k = 0. \tag{3.10}$$

§3.2 Relation de commutation canonique. Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation précédente, afin de déterminer explicitement la dépendance temporelle de φ_k. Toutefois, comme cette fonction satisfait une équation différentielle linéaire du deuxième ordre, sa forme la plus générale sera donc donnée par la combinaison linéaire de deux solutions indépendantes. Elle impliquera, autrement dit, deux constantes pouvant dépendre arbitrairement de k, qu'il faudra fixer d'une manière ou d'une autre.

Une contrainte pouvant être naturellement imposée aux deux constantes arbitraires impliquées dans l'expression du champ consiste à exiger que celui-ci et son moment conjugué soient des variables proprement canoniques, satisfaisant la relation de commutation prescrite par la mécanique quantique. Dans ce cas-ci, le moment conjugué p_φ associé au champ φ est défini par

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = a^2 \dot{\varphi}. \tag{3.11}$$

En mécanique quantique, un champ et son moment conjugué sont des variables canoniques si leur commutateur est nul, sauf lorsque les deux variables sont évaluées précisément au même point de l'espace,

$$\big[\varphi(\tau, \mathbf{x}),\, p_\varphi(\tau, \mathbf{x}')\big] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \tag{3.12}$$

c'est-à-dire, en prenant $p_\varphi = a^2\dot{\varphi}$,

$$\big[\varphi(\tau, \mathbf{x}),\, \dot{\varphi}(\tau, \mathbf{x}')\big] = \frac{i}{a^2}\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \tag{3.13}$$

Il convient de remarquer que le champ et son moment conjugué sont ici évalués au même moment dans le temps, mais à deux points différents dans l'espace. On voudrait pouvoir transporter cette relation de commutation dans l'espace de Fourier, afin de traduire la contrainte qu'elle impose en termes de la fonction φ_k. En insérant la transformée de Fourier du champ dans l'équation précédente, on trouve directement

$$\begin{aligned}
\big[\varphi(\tau, \mathbf{x}),\, \dot{\varphi}(\tau, \mathbf{x}')\big] &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')} \big[a_\mathbf{k}\, \varphi_k + a^*_{-\mathbf{k}}\, \varphi^*_k,\, a_{\mathbf{k}'} \dot{\varphi}_{k'} + a^*_{-\mathbf{k}'} \dot{\varphi}^*_{k'}\big] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')} \Big(\varphi_k \dot{\varphi}_{k'} \big[a_\mathbf{k},\, a_{\mathbf{k}'}\big] + \varphi_k \dot{\varphi}^*_{k'} \big[a_\mathbf{k},\, a^*_{-\mathbf{k}'}\big] \\
&\qquad - \varphi^*_k \dot{\varphi}_{k'} \big[a_{\mathbf{k}'},\, a^*_{-\mathbf{k}}\big] + \varphi^*_k \dot{\varphi}^*_{k'} \big[a^*_{-\mathbf{k}},\, a^*_{-\mathbf{k}'}\big]\Big),
\end{aligned} \tag{3.14}$$

où l'on a laissé tomber la mention explicite de τ pour les fonctions φ_k et leurs dérivées temporelles, celles-ci étant toutes évaluées au même moment dans le temps. En se servant des relations de commutation quantiques pour les opérateurs $a_{\mathbf{k}}$ et $a^*_{\mathbf{k}}$, on obtient finalement

$$\big[\varphi(\tau,\mathbf{x}),\, \dot{\varphi}(\tau,\mathbf{x}')\big] = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\big(\varphi_k\dot{\varphi}^*_k - \varphi^*_k\dot{\varphi}_k\big), \tag{3.15}$$

l'une des intégrales ayant disparu du fait de la contrainte $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$ imposée par le commutateur de $a_{\mathbf{k}}$ et $a^*_{-\mathbf{k}'}$. Pour que la relation de commutation canonique entre le champ et son conjugué soit satisfaite, il faut que l'intégrale précédente se réduise à la transformée de Fourier d'une constante, de façon à ce qu'elle soit proportionnelle à $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$. Plus précisément, il faut que

$$\mathcal{W}(\varphi_k, \varphi^*_k) = \varphi_k\dot{\varphi}^*_k - \varphi^*_k\dot{\varphi}_k = \frac{i}{a^2}. \tag{3.16}$$

Cette équation incarne la relation de commutation canonique dans l'espace de Fourier. À première vue, la contrainte qu'elle impose sur la fonction φ_k pourrait sembler difficile, voire impossible à satisfaire. Rien ne semble garantir qu'on puisse trouver une expression pour φ_k permettant de satisfaire à la fois la contrainte précédente, ainsi que l'équation différentielle dont elle doit être une solution. Toutefois, cette difficulté n'est vraiment qu'apparente : il s'avère que toutes les solutions de l'équation différentielle de φ_k sont compatibles avec la relation de commutation canonique, du moins à une constante près, de sorte que cette relation n'impose vraiment qu'une contrainte sur les constantes impliquées dans φ_k.

§3.3 Définition et calcul du wronskien. La fonction $\mathcal{W}$ impliquée dans la relation de commutation canonique représente une opération bien connue dans la théorie des équations différentielles : il s'agit du wronskien, qui est défini comme un déterminant et permet de vérifier l'indépendance linéaire de fonctions. Il est commode de rappeler ici quelques propriétés du wronskien, en considérant quelques instants une équation linéaire de deuxième ordre tout à fait générale,

$$\ddot{\varphi} + p(\tau)\dot{\varphi} + q(\tau)\varphi = 0, \tag{3.17}$$

où p et q sont deux fonctions quelconques. Comme il s'agit d'une équation du deuxième ordre, elle possède donc précisément deux solutions linéairement indépendantes, à partir desquelles il est possible de construire l'ensemble de toutes ses solutions. Supposons que φ_1 et φ_2 soient deux solutions de l'équation. Leur wronskien est défini par

$$\mathcal{W}(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_1 & \dot{\varphi}_2 \end{vmatrix} = \varphi_1 \dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1 \varphi_2. \tag{3.18}$$

Si ces deux solutions ne sont pas linéairement indépendantes, l'une étant proportionnelle à l'autre, disons $\varphi_2 = C\varphi_1$ pour une certaine constante C, leur wronskien est alors identiquement nul, $\mathcal{W}(\varphi_1, \varphi_2) = C\,\mathcal{W}(\varphi_1, \varphi_1) = 0$. À l'inverse, si elles sont linéairement indépendantes, leur wronskien est déterminé presque entièrement par l'équation différentielle dont elles sont deux solutions. En prenant la dérivée du wronskien par rapport à τ, on trouve en effet

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{W}} &= \varphi_1 \ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_1 \varphi_2 \\ &= -(p\dot{\varphi}_2 + q\varphi_2)\varphi_1 + (p\dot{\varphi}_1 + q\varphi_1)\varphi_2 \\ &= -p(\varphi_1 \dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1 \varphi_2), \end{aligned} \tag{3.19}$$

où l'on s'est servi de l'équation différentielle satisfaite par φ_1 et φ_2 pour se débarrasser de leurs dérivées secondes. Leur wronskien satisfait donc l'équation $\dot{\mathcal{W}} = -p\mathcal{W}$, que l'on peut intégrer pour obtenir

$$\mathcal{W} = C \exp\biggl(-\int \mathrm{d}\tau\; p(\tau)\biggr), \tag{3.20}$$

où C est la constante d'intégration. Ainsi, le wronskien de deux solutions linéairement indépendantes présente toujours la même forme et la même dépendance sur τ, peu importe les fonctions φ_1 et φ_2 choisies. Il n'y a là rien de vraiment surprenant, dans la mesure où une équation différentielle linéaire de deuxième ordre ne peut posséder que deux solutions linéairement indépendantes. Toutes les fonctions φ_1 et φ_2 qu'il est possible de choisir sont donc des combinaisons linéaires les unes des autres, de sorte que le choix particulier de deux de ces fonctions ne peut influencer l'expression de leur wronskien qu'au niveau de la valeur de la constante C qui y figure.

Dans le cas qui nous concerne, l'identité précédente garantit que la relation de commutation canonique est satisfaite quant à sa dépendance sur τ, peu importe l'expression choisie pour les modes du champ. Ceux-ci vérifient en effet une équation telle que

$$p(\tau) = \frac{2\dot{a}}{a}, \tag{3.21}$$

de sorte que leur wronskien s'écrit nécessairement comme

$$\mathcal{W} = C \exp\left(-2 \int \mathrm{d}\tau \ \frac{\dot{a}}{a}\right) = \frac{C}{a^2}. \tag{3.22}$$

Si φ_k et φ_k^* sont deux fonctions linéairement indépendantes, leur wronskien est ainsi nécessairement proportionnel à l'inverse du carré du facteur d'échelle, comme l'exige la relation de commutation quantique.

§3.4 Solution explicite pour l'espace de Sitter. Tout ce qui a été dit jusqu'à présent au sujet du champ scalaire φ est valide dans tout espace en expansion. Pour la suite de ce chapitre, on va se concentrer sur le cas particulier d'un espace de Sitter, pour lequel l'expansion est exponentielle, et dont le facteur d'échelle en termes du temps conforme s'écrit comme

$$a = -\frac{1}{H\tau}, \tag{3.23}$$

où H est une constante, égale au facteur de Hubble de l'espace. Les premières dérivées du facteur d'échelle par rapport au temps conforme sont $\dot{a} = Ha^2$ et $\ddot{a} = 2H^2a^3$. Le champ auxiliaire $\chi = a\,\varphi$ possède donc, dans ce cas, une masse effective directement proportionnelle au facteur d'échelle,

$$m_{\text{eff}}^2 = a^2\left(m^2 - 2H^2\right). \tag{3.24}$$

Dans la suite de ce chapitre, on verra que la masse du champ n'influence pas réellement la forme de ce dernier, sauf dans deux cas particuliers, pour lesquels le choix d'une certaine masse modifie radicalement les propriétés du champ. Sans surprise, ces deux cas spéciaux correspondent à ceux où la masse du champ devient nulle, qu'il s'agisse de sa masse réelle, ou de sa masse effective. Le premier cas survient lorsque $m = 0$ et on parle alors d'un champ *sans masse*. Le second a lieu plutôt lorsque $m_{\text{eff}} = 0$, c'est-à-dire quand $m^2 = 2H^2$. On dit alors que le champ est *conforme*, dans la mesure où il ne subit l'expansion de l'espace que par le biais d'un simple changement d'échelle. Le champ auxiliaire qui lui est associé correspond en effet à un champ sans masse dans un espace de Minkowski : il pourrait donc tout aussi bien exister dans un univers sans expansion. Plus précisément, il est possible de montrer que l'action d'un champ conforme est invariante sous transformation conforme, de sorte qu'elle peut être ramenée à son expression usuelle dans un espace de Minkowski.

Pour chacun de ces deux cas spéciaux, la forme du champ est particulièrement simple, ses modes de Fourier se réduisant alors à de simples exponentielles multipliant un certain polynôme fini. La fonction de corrélation à deux points du champ s'en trouve également modifiée, par rapport à la forme générique qu'elle possède pour un champ de masse quelconque. Cette forme générique cesse d'être valide dans les deux cas que l'on vient d'évoquer, se ramenant à l'expression qu'elle possède dans l'espace de Minkowski quand le champ est conforme, ou acquérant une divergence infrarouge lorsque le champ devient sans masse.

Déterminons maintenant la dépendance temporelle des modes de Fourier du champ, dans le cas où celui-ci possède une masse quelconque. Comme $\dot{a} = Ha^2$ dans l'espace de Sitter, les modes du champ vérifient l'équation

$$\ddot{\varphi}_k - \frac{2}{\tau}\,\dot{\varphi}_k + \left(k^2 + \frac{m^2}{H^2\tau^2}\right)\varphi_k = 0. \tag{3.25}$$

Il s'avère que l'on peut éliminer complètement la dépendance explicite sur k dans cette équation, en l'exprimant en termes d'une nouvelle variable $x = k\tau$. Comme l'équation obtenue par ce changement de variable ne dépend pas de k, et qu'elle est du deuxième ordre, sa solution générale est donc donnée par la combinaison de deux fonctions linéairement indépendantes, chacune d'elles étant indépendante de k. N'importe quelle paire de fonctions ferait l'affaire, mais il est commode d'en choisir deux qui soient conjuguées complexes l'une de l'autre. Dans ce cas, les modes du champ s'écrivent alors

$$\varphi_k(\tau) = A_k\,\psi(k\tau) + B_k\,\psi^*(k\tau), \tag{3.26}$$

où A_k et B_k sont deux constantes d'intégration, pouvant dépendre arbitrairement de k, et où $\psi = \psi(x)$ est une fonction indépendante de k vérifiant l'équation

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} - \frac{2}{x}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} + \left(1 + \frac{m^2}{H^2x^2}\right)\psi = 0. \tag{3.27}$$

L'équation satisfaite par la fonction ψ peut être ramenée à une simple équation de Bessel de paramètre α, avec

$$\alpha = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{m^2}{H^2}}. \tag{3.28}$$

Le paramètre α ainsi défini est lié de près à la masse du champ. Il est réel lorsque la masse est petite, puis il devient imaginaire pour de grandes masses par rapport au paramètre de Hubble, c'est-à-dire plus précisément lorsque $m > \frac{3}{2}\,H$. De plus, ce paramètre atteint sa valeur maximale pour un champ sans masse. Dans ce cas, on a que $\alpha = \frac{3}{2}$, alors que $\alpha < \frac{3}{2}$ lorsque la masse du champ est petite, sans être nulle.

De plus, comme on souhaite que ψ et son conjugué complexe soient deux fonctions linéairement indépendantes, il faut choisir deux solutions à l'équation de Bessel qui soient aussi conjuguées complexes l'une de l'autre. De telles solutions sont fournies par les fonctions de Hankel de première et de seconde espèce, qui sont conjuguées complexes l'une de l'autre lorsque leurs arguments sont réels. On trouve alors finalement

$$\begin{aligned} \psi(x) &= x^{\frac{3}{2}}\,H_\alpha(x), \\ \psi^*(x) &= x^{\frac{3}{2}}\,H_\alpha^*(x), \end{aligned} \tag{3.29}$$

où H_α et H_α^* désignent respectivement les fonctions de Hankel de seconde et de première espèce, à une constante près. La normalisation choisie ici pour la fonction H_α diffère en effet de celle typiquement définie pour les fonctions de Hankel,

$$H_\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-i\left(\frac{1}{2}\alpha\pi + \frac{1}{4}\pi\right)}\,H_\alpha^{(2)}. \tag{3.30}$$

§3.5 Propriétés des fonctions de Hankel. Les fonctions de Hankel se montrent plutôt difficiles à manipuler dans leur forme exacte. Elles possèdent néanmoins un développement asymptotique qui se révèlera utile à maintes reprises dans la suite de ce chapitre.

Lorsque la fonction de Hankel possède un argument x qui est grand par rapport à 1, celle-ci ressemble alors à une simple exponentielle, multipliant une certaine fonction que l'on peut développer en une série de puissances inverses de x. Dans le présent contexte, $|x| = k|\tau| = k_{\mathrm{ph}}/H$, de sorte qu'un tel développement pour la fonction de Hankel s'avère valide surtout pour les modes ultraviolets du champ, ceux possédant un nombre d'onde physique k_{ph} grand par rapport à H. Dans cette limite, on trouve alors que

$$H_\alpha(x) \approx \frac{e^{-ix}}{\sqrt{x}} \sum_{n\geq 0} \frac{c_n}{(ix)^n}, \tag{3.31}$$

où les coefficients c_n dans la somme sont donnés par

$$c_n = \frac{\big(4\alpha^2 - 1\big)\big(4\alpha^2 - 9\big)\cdots\big(4\alpha^2 - (2n-1)^2\big)}{n!\,8^n}, \tag{3.32}$$

avec $c_0 = 1$. Il faut remarquer que le développement asymptotique de la fonction de Hankel est sensiblement le même peu importe α. Toute la dépendance sur α, et donc sur la masse du champ, est en effet contenue dans les seuls coefficients c_n. En particulier, comme $c_0 = 1$, le premier terme de ce développement est le même pour toutes les valeurs de α, ce qui implique que la masse du champ n'a guère d'impact sur la forme des modes de petite longueur d'onde. Par ailleurs, il faut aussi remarquer que les coefficients que l'on vient de définir sont reliés les uns aux autres par une relation de récurrence, le coefficient c_n étant directement proportionnel à son voisin inférieur c_{n-1},

$$c_n = \frac{4\alpha^2 - (2n-1)^2}{8n}\, c_{n-1}, \tag{3.33}$$

Si $c_n = 0$ pour un certain indice n, il en va donc de même pour tous les coefficients d'indices supérieurs, c'est-à-dire $c_m = 0$ pour tout $m \geq n$. Dans ce cas, le développement ne compte plus qu'un nombre fini de termes et il devient alors rigoureusement égal à la fonction de Hankel pour laquelle il devait servir d'approximation. Dans le contexte de cette section, une telle circonstance survient seulement pour deux valeurs de α, à savoir précisément celles correspondant aux deux cas spéciaux évoqués plus haut. En effet, on a que

$$4\alpha^2 = 9 - \frac{4m^2}{H^2}, \tag{3.34}$$

de sorte que les coefficients c_n peuvent devenir nuls seulement pour $m^2 = 2H^2$ et $m^2 = 0$, c'est-à-dire pour un champ conforme et pour un champ sans masse. Dans le premier cas, le développement ne compte qu'un seul terme, car $c_1 = 0$, alors qu'il en compte deux dans le second cas, avec $c_1 = 1$ et $c_2 = 0$. Les fonctions de Hankel sont alors respectivement

$$\begin{aligned} H_{\frac{1}{2}}(x) &= \frac{e^{-ix}}{\sqrt{x}} & (m_{\text{eff}} = 0), \\ H_{\frac{3}{2}}(x) &= \frac{e^{-ix}}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{1}{ix}\right) & (m = 0), \end{aligned} \tag{3.35}$$

où l'on a rétabli le signe d'égalité puisque l'expression est maintenant exacte. En insérant ces deux fonctions dans l'équation de Bessel, on peut vérifier qu'elles en sont des solutions exactes, pour les valeurs désignées de α. Il est donc vrai que la forme du champ se simplifie significativement lorsque sa masse réelle ou effective est nulle. Pour toute autre masse, le développement précédent pour la fonction de Hankel demeure une approximation, valide seulement lorsque l'argument de la fonction est supérieur à 1.

Calculons maintenant le wronskien des fonctions de Hankel, H_α et H_α^*. En se servant de l'identité 3.20, on en déduit que le wronskien de deux solutions à l'équation de Bessel est nécessairement proportionnel à $^1/_x$, la constante de proportionnalité variant selon le choix des solutions. Pour déterminer la valeur de cette constante dans le cas des fonctions de Hankel, il suffit d'approximer celles-ci par le premier terme de leur développement en série. Comme leur wronskien dépend de l'inverse de x, il faut développer ces fonctions en supposant que x est grand par rapport à 1,

$$H_\alpha(x) \approx \frac{e^{-ix}}{\sqrt{x}}, \tag{3.36}$$

de sorte qu'on trouve approximativement

$$H_\alpha \frac{\mathrm{d}H_\alpha^*}{\mathrm{d}x} \approx \frac{i}{x} - \frac{1}{x^2}. \tag{3.37}$$

Le wronskien des fonctions de Hankel est donc donné par

$$\mathcal{W}(H_\alpha, H_\alpha^*) = H_\alpha \frac{\mathrm{d}H_\alpha^*}{\mathrm{d}x} - H_\alpha^* \frac{\mathrm{d}H_\alpha}{\mathrm{d}x} = \frac{2i}{x}, \tag{3.38}$$

où l'on a restauré l'égalité puisqu'on sait que le wronskien est exactement proportionnel à l'inverse de x, l'approximation ayant simplement permis de fixer la constante de proportionnalité.

§3.6 Choix des constantes arbitraires. L'expression du champ que l'on a obtenue est tout à fait générale. Elle contient notamment deux constantes arbitraires, A_k et B_k, qu'il importe de fixer si l'on veut calculer les fonctions de corrélation du champ. Une première contrainte sur ces constantes peut être établie en exigeant que le champ et son conjugué satisfassent la relation de commutation canonique prescrite par la mécanique quantique. Dans l'espace de Fourier, cette relation prend la forme d'un wronskien,

$$\mathcal{W}(\varphi_k, \varphi_k^*) = \varphi_k \dot{\varphi}_k^* - \varphi_k^* \dot{\varphi}_k = i\, H^2 \tau^2. \tag{3.39}$$

Pour éviter toute confusion, il importe de souligner que le wronskien implique ici des dérivées par rapport à τ, non par rapport à $x = k\tau$, comme c'était le cas plus haut, lorsqu'on a calculé le wronskien des fonctions de Hankel. Sachant que les modes du champ s'écrivent $\varphi_k(\tau) = A_k\, \psi(k\tau) + B_k\, \psi^*(k\tau)$, avec $\psi(x) = x^{\frac{3}{2}}\, H_\alpha(x)$, on trouve alors

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\varphi_k, \varphi_k^*) &= \left(|A_k|^2 - |B_k|^2\right) \mathcal{W}(\psi, \psi^*) \\ &= \left(|A_k|^2 - |B_k|^2\right) k^3 \tau^3\, \mathcal{W}(H_\alpha, H_\alpha^*) \\ &= 2i \left(|A_k|^2 - |B_k|^2\right) k^3 \tau^2, \end{aligned} \tag{3.40}$$

Sans surprise, le wronskien des modes du champ s'avère bel et bien proportionnel au carré du temps conforme. Toutefois, en comparant ce wronskien avec celui découlant de la relation de commutation quantique, on en déduit que cette relation est satisfaite seulement si les constantes A_k et B_k sont telles que

$$|A_k|^2 - |B_k|^2 = \frac{H^2}{2k^3}. \tag{3.41}$$

Il est commode de renormaliser les constantes A_k et B_k en posant

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{H}{\sqrt{2k^3}}\, \tilde{A}_k, \\ B_k &= \frac{H}{\sqrt{2k^3}}\, \tilde{B}_k, \end{aligned} \tag{3.42}$$

de sorte que la contrainte qu'elles doivent satisfaire devient maintenant $|\tilde{A}_k|^2 - |\tilde{B}_k|^2 = 1$. En termes de ces constantes renormalisées, les modes du champ s'écrivent comme

$$\varphi_k(\tau) = \sqrt{\frac{H^2\tau^3}{2}}\Big(\tilde{A}_k\, H_\alpha(k\tau) + \tilde{B}_k\, H_\alpha^*(k\tau)\Big), \tag{3.43}$$

alors que les modes du champ auxiliaire $\chi = a\,\varphi$ sont donnés par

$$\chi_k(\tau) = a\,\varphi_k(\tau) = \sqrt{\frac{\tau}{2}}\Big(\tilde{A}_k\, H_\alpha(k\tau) + \tilde{B}_k\, H_\alpha^*(k\tau)\Big). \tag{3.44}$$

Le champ auxiliaire a été défini au début de ce chapitre de façon à ce que son action ressemble à celle d'un champ scalaire dans un espace de Minkowski statique. Ce sont donc les modes de ce champ, plus que ceux de φ, qui risquent de s'apparenter davantage aux modes d'un champ dans un espace plat. La comparaison risque d'être encore meilleure lorsque les effets de la courbure de l'espace se font le moins sentir, ce qui est le cas pour les modes possédant une petite longueur d'onde petite. Pour ces modes, la valeur de $|x| = k|\tau| = k_{\text{ph}}/H$ est grande par rapport à 1, de sorte qu'on peut alors approximer les fonctions de Hankel par le premier terme de leur développement asymptotique,

$$\chi_k(\tau) \approx \frac{1}{\sqrt{2k}}\Big(\tilde{A}_k\, e^{-ik\tau} + \tilde{B}_k\, e^{ik\tau}\Big). \tag{3.45}$$

Cette expression coïncide avec celle des modes de Fourier d'un champ sans masse dans un espace de Minkowski. Il est donc vrai que le champ auxiliaire ressemble à un champ dans l'espace de Minkowski, du moins pour ce qui est de ses modes de petite longueur d'onde, pour lesquels l'effet de la courbure de l'espace est minimale.

Par ailleurs, l'expression précédente peut servir de guide afin de fixer complètement les constantes arbitraires figurant dans l'expression générale du champ. On comprend en effet que la constante $\tilde{A}_k$ représente en quelque sorte l'amplitude des modes de fréquence positive, se déplaçant dans la direction du nombre d'onde $\mathbf{k}$, alors que la constante $\tilde{B}_k$ désigne l'amplitude des modes de fréquence négative, se déplaçant dans la direction inverse. La contrainte reliant ces deux constantes l'une à l'autre, $|\tilde{A}_k|^2 - |\tilde{B}_k|^2 = 1$, implique d'ailleurs que $|\tilde{A}_k| > |\tilde{B}_k|$. Ainsi, chaque mode du champ peut posséder une amplitude totale aussi élevée qu'on le souhaite, mais il faut toujours que les modes de fréquence positive y soient proportionnellement plus nombreux que ceux de fréquence négative. En particulier, des modes de fréquence positive doivent être déjà présents avant que ne puissent apparaître ceux de fréquence négative, de sorte que l'état contenant le plus petit nombre de modes, et possédant l'amplitude totale la plus faible, est donc celui pour lequel $\tilde{B}_k = 0$ et $|\tilde{A}_k| = 1$. Dans ce cas, les modes du champ s'écrivent alors

$$\varphi_k(\tau) = \sqrt{\frac{H^2\tau^3}{2}}\, H_\alpha(k\tau). \tag{3.46}$$

En particulier, dans les cas où la masse réelle ou effective du champ est nulle, on a

$$\begin{aligned} \varphi_k(\tau) &= -\frac{H\tau}{\sqrt{2k}}\, e^{-ik\tau} && (m_{\text{eff}} = 0), \\ \varphi_k(\tau) &= -\frac{H\tau}{\sqrt{2k}}\, e^{-ik\tau}\left(1 + \frac{1}{ik\tau}\right) && (m = 0). \end{aligned} \tag{3.47}$$

§3.7 Fonction de corrélation à deux points. À partir de l'expression obtenue pour le champ φ dans les sections précédentes, on peut maintenant calculer la valeur moyenne quantique de diverses fonctions de ce champ. En particulier, dans le contexte de ce mémoire, il faut surtout évaluer la fonction de corrélation à deux points du champ, $\langle\varphi^2\rangle$, car c'est elle qu'il faudra connaître au moment de calculer la valeur moyenne des termes de deuxième ordre dans l'action gravitationnelle, $\langle h_{\mu\nu}h_{\rho\sigma}\rangle$.

En mécanique quantique, une valeur moyenne est toujours calculée par rapport à un état particulier du système. On choisit ici de se rapporter au vide associé au champ φ, c'est-à-dire à l'état de base du champ, celui qui n'est pas excité, qui ne compte aucune particule et qui se trouve par conséquent détruit lorsqu'on tente de le vider davantage, en y supprimant une particule supplémentaire. Comme l'opérateur $a_{\mathbf{k}}$ est typiquement responsable de l'annihilation des particules, on définit donc le vide quantique associé au champ φ comme l'état $|0\rangle$ qui est détruit par l'action de cet opérateur, $a_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0$ pour tous les modes $\mathbf{k}$. En prenant le conjugué de cette équation, on a aussi que $\langle 0| a^*_{\mathbf{k}} = 0$. La fonction de corrélation à deux points du champ est alors donnée par

$$\langle\varphi(\tau,\mathbf{x})\varphi(\tau',\mathbf{x}')\rangle = \langle 0|\varphi(\tau,\mathbf{x})\varphi(\tau',\mathbf{x}')|0\rangle\,. \tag{3.48}$$

La fonction de corrélation implique deux facteurs du champ évalués en deux points distincts de l'espace-temps. Elle diverge dans la limite où les deux points coïncident exactement, c'est-à-dire lorsque $\tau' = \tau$ et $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$, de sorte qu'elle doit être proprement régularisée pour que son calcul donne un résultat fini dans cette limite. En remplaçant le champ par sa transformée de Fourier, on trouve notamment

$$\begin{aligned}\varphi(\tau, \mathbf{x})\,|0\rangle &= \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \Big(a_{\mathbf{k}}\, \varphi_k(\tau) + a^*_{-\mathbf{k}}\, \varphi^*_k(\tau) \Big)\, |0\rangle \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, \varphi^*_k(\tau)\, a^*_{-\mathbf{k}}\, |0\rangle\,,\end{aligned} \tag{3.49}$$

où l'on s'est servi du fait que $a_{\mathbf{k}}\,|0\rangle = 0$. On en conclut ainsi, au passage, que le champ possède une valeur moyenne nulle lorsque celle-ci est calculée dans le vide. En prenant le produit de l'expression précédente avec $\langle 0|$, on trouve en effet que

$$\langle \varphi(\tau, \mathbf{x}) \rangle = \langle 0 | \varphi(\tau, \mathbf{x}) | 0 \rangle = 0, \tag{3.50}$$

du fait que $\langle 0|\, a^*_{\mathbf{k}} = 0$. De la même façon, on en déduit que la fonction de corrélation à deux points du champ s'écrit

$$\langle \varphi(\tau, \mathbf{x}) \varphi(\tau', \mathbf{x}') \rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{d}^3 k'}{(2\pi)^3}\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')} \varphi_k(\tau) \varphi^*_{k'}(\tau')\, \langle 0 | a_{\mathbf{k}} a^*_{-\mathbf{k}'} | 0 \rangle\,. \tag{3.51}$$

Il est possible d'éliminer l'une des deux intégrales dans l'expression précédente, en se servant de la relation de commutation pour les opérateurs de création et d'annihilation. Leur relation de commutation implique en effet que

$$\langle 0 | a_{\mathbf{k}} a^*_{-\mathbf{k}'} | 0 \rangle = \langle 0 | \Big(\big[a_{\mathbf{k}},\, a^*_{-\mathbf{k}'} \big] + a^*_{-\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}} \Big) | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'), \tag{3.52}$$

où l'on a supposé que le vide était proprement normalisé, $\langle 0 | 0 \rangle = 1$. La fonction de corrélation à deux points s'écrit donc finalement

$$\langle \varphi(\tau, \mathbf{x}) \varphi(\tau', \mathbf{x}') \rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3}\, e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}\, \varphi_k(\tau) \varphi^*_k(\tau'). \tag{3.53}$$

La fonction de corrélation à deux points du champ correspond ainsi à la transformée de Fourier spatiale du produit de deux de ses modes, évalués à deux instants dans le temps. En particulier, pour $\tau' = \tau$, la fonction de corrélation correspond à la transformée de Fourier de $|\varphi_k|^2$, une quantité que l'on désigne typiquement en cosmologie comme le spectre de puissance du champ φ. Enfin, puisque les modes du champ ne dépendent que de la norme du vecteur d'onde, on peut simplifier l'expression de la fonction de corrélation en calculant deux des trois intégrales qu'elle implique. Pour ce faire, il suffit d'exprimer le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ en coordonnées sphériques et d'orienter son axe polaire dans la direction de $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$. On trouve alors

$$\langle \varphi(\tau, \mathbf{x}) \varphi(\tau', \mathbf{x}') \rangle = \frac{1}{2\pi^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \int_0^\infty \mathrm{d}k\, k\, \sin(k|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)\, \varphi_k(\tau) \varphi_k^*(\tau'). \tag{3.54}$$

En particulier, dans la limite où $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$,

$$\langle \varphi(\tau, \mathbf{x}) \varphi(\tau', \mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \mathrm{d}k\, k^2\, \varphi_k(\tau) \varphi_k^*(\tau'). \tag{3.55}$$

§3.8 Calcul dans l'espace de Sitter. L'expression que l'on vient d'obtenir pour la fonction de corrélation à deux points du champ est valide peu importe la géométrie de l'espace. On veut maintenant l'appliquer au cas particulier d'un champ existant dans un espace de Sitter, et dont les modes de Fourier sont donnés par une fonction de Hankel. Dans ce cas, on peut montrer que la fonction de corrélation à deux points du champ correspond à une certaine fonction hypergéométrique, dépendant de la masse du champ et de la distance géodésique séparant les deux points. Le calcul s'avère toutefois assez lourd, exigeant notamment certaines propriétés des fonctions de Hankel.

Un tel calcul ne présente d'ailleurs pas un grand intérêt, dans la mesure où l'on cherche surtout à connaître le comportement de la fonction de corrélation pour deux points situés près l'un de l'autre. Plus particulièrement, on cherche à déterminer la forme de sa divergence dans la limite où les champs qu'elle implique sont évalués exactement au même point, c'est-à-dire pour $\tau' = \tau$ et $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$. En général, la fonction de corrélation entre deux points de l'espace-temps dépend seulement de la distance géodésique qui sépare ces points. Dans un espace de Sitter, la distance géodésique entre deux points est reliée à une certaine variable η définie par

$$\eta^2 = \frac{-(\tau - \tau')^2 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}{\tau \tau'}. \tag{3.56}$$

Il est commode de prendre dès le départ la limite où $\tau' = \tau$. La fonction de corrélation demeure finie malgré tout, dès lors qu'elle est évaluée en deux points distincts de l'espace. La distance géodésique séparant les deux points est alors reliée à

$$\eta = -\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{\tau}. \tag{3.57}$$

En termes de ce paramètre η, la fonction de corrélation à deux points pour des temps égaux s'écrit

$$\begin{aligned} \langle \varphi(\tau, \mathbf{x})\varphi(\tau, \mathbf{x}')\rangle &= -\frac{1}{2\pi^2 \tau \eta} \int_0^\infty \mathrm{d}k\, k\, \sin(-k\tau\eta)\, |\varphi_k(\tau)|^2 \\ &= \frac{H^2\tau^2}{4\pi^2\eta} \int_0^\infty \mathrm{d}k\, k\, \sin(-k\tau\eta)\, |H_\alpha(k\tau)|^2, \end{aligned} \tag{3.58}$$

où l'on s'est servi de l'expression obtenue plus haut pour les modes du champ. Cette expression pour la fonction de corrélation à temps égaux est exacte. Toutefois, il est clair que l'intégrale risque de n'être pas facile à calculer, dans la mesure où elle implique le produit de deux fonctions de Hankel. Il convient donc de recourir à certaines approximations, afin de déterminer le comportement de la fonction de corrélation dans la limite voulue, sans pour autant connaître sa forme exacte.

Or, il n'existe que deux façons d'approximer une fonction de Hankel. On peut la remplacer par sa série de Taylor lorsque son argument est petit, ou alors par son développement asymptotique lorsque son argument est grand. À cet égard, la fonction de Hankel impliquée dans l'intégrale précédente dépend de la variable $x = -k\tau$. Son argument peut donc être considéré comme grand lorsque $x > 1$ et comme petit lorsque $x < 1$, avec une valeur critique de séparation entre ces deux domaines donnée par $x_c = 1$, c'est-à-dire

$$k_c = -\frac{1}{\tau} = aH. \tag{3.59}$$

Si l'on souhaite se servir d'une forme approximée pour la fonction de Hankel, il est donc nécessaire de séparer l'intégrale en deux parties, l'une comprenant les modes de petites longueurs d'onde ou ultraviolets ($x > 1$), et l'autre les modes de grandes longueurs d'onde ou infrarouges ($x < 1$),

$$\int_0^\infty \mathrm{d}k = \int_0^{k_c} \mathrm{d}k + \int_{k_c}^\infty \mathrm{d}k\,, \tag{3.60}$$

La fonction de corrélation totale est alors donnée par la somme de deux contributions, pour les modes de grandes et de petites longueurs d'onde,

$$\langle\varphi(\tau,\mathbf{x})\varphi(\tau,\mathbf{x}')\rangle = \langle\varphi(\tau,\mathbf{x})\varphi(\tau,\mathbf{x}')\rangle_{\mathrm{IR}} + \langle\varphi(\tau,\mathbf{x})\varphi(\tau,\mathbf{x}')\rangle_{\mathrm{UV}}\,. \tag{3.61}$$

§3.9 Contribution ultraviolette. La contribution ultraviolette à la fonction de corrélation du champ comprend tous les modes pour lesquels $k > k_c$. En termes de $x = -k\tau$, on trouve alors

$$\langle\varphi(\tau,\mathbf{x})\varphi(\tau,\mathbf{x}')\rangle_{\mathrm{UV}} = \frac{H^2}{4\pi^2\eta}\int_1^\infty \mathrm{d}x\, x\, \sin(x\eta)\,|H_\alpha(-x)|^2. \tag{3.62}$$

L'intégrale n'implique maintenant que de grandes valeurs de x, de sorte qu'on peut la calculer approximativement en y remplaçant la fonction de Hankel par son développement asymptotique. Comme on cherche à déterminer les contributions de l'intégrale qui divergent dans la limite où les points $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ sont près l'un de l'autre, il suffit d'inclure les trois premiers termes du développement asymptotique de la fonction de Hankel,

$$H_\alpha(x) \approx \frac{e^{-ix}}{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{c_1}{ix} - \frac{c_2}{x^2}\right), \tag{3.63}$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes réelles, dépendant du paramètre α et définies par l'équation 3.32. En prenant la norme de cette expression, on obtient directement

$$|H_\alpha(x)|^2 \approx \frac{1}{|x|}\left[\left(1 - \frac{c_2}{x^2}\right)^2 + \frac{c_1^2}{x^2}\right] \approx \frac{1}{|x|}\left(1 + \frac{c_1}{x^2}\right), \tag{3.64}$$

où l'on s'est servi du fait que $c_1^2 - 2c_2 = c_1$, peu importe la valeur du paramètre α. Cette simplification n'est d'ailleurs pas fortuite, mais survient à tous les ordres du développement asymptotique de $|H_\alpha|^2$. Avec cette approximation, la contribution ultraviolette de la fonction de corrélation devient simplement

$$\langle\varphi(\tau,\mathbf{x})\varphi(\tau,\mathbf{x}')\rangle_{\mathrm{UV}} \approx \frac{H^2}{4\pi^2\eta}\int_1^\infty \mathrm{d}x\, \sin(x\eta)\,\left(1 + \frac{c_1}{x^2}\right) \tag{3.65}$$

Il ne reste plus qu'à calculer explicitement l'intégrale terme à terme. Pour ce faire, il est utile de supposer que les fonctions sinus et cosinus, même si elles oscillent continuellement entre -1 et 1, prennent néanmoins une valeur nulle à l'infini *. Dans ce cas, le premier terme de l'intégrale devient

$$\int_1^\infty \mathrm{d}x\, \sin(x\eta) = -\frac{\cos(\eta x)}{\eta}\bigg|_1^\infty = \frac{\cos\eta}{\eta}. \tag{3.66}$$

Pour calculer le second terme, il suffit d'intégrer par parties,

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \mathrm{d}x\, \frac{\sin(x\eta)}{x^2} &= \sin\eta + \eta\int_1^\infty \mathrm{d}x\, \frac{\cos(\eta x)}{x} \\ &= \sin\eta - \eta\, \mathrm{Ci}(\eta),\end{aligned} \tag{3.67}$$

où $\mathrm{Ci}(x)$ désigne le cosinus intégral, défini par

$$\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^\infty \mathrm{d}t\, \frac{\cos t}{t}. \tag{3.68}$$

Les premiers termes de la contribution ultraviolette de la fonction de corrélation sont donc finalement

$$\langle\varphi(\tau,\mathbf{x})\varphi(\tau,\mathbf{x}')\rangle_{\mathrm{UV}} \approx \frac{H^2}{4\pi^2}\left(\frac{\cos\eta}{\eta^2} + c_1\frac{\sin\eta}{\eta} - c_1\mathrm{Ci}(\eta)\right). \tag{3.69}$$

On suppose maintenant que les points $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ sont situés près l'un de l'autre, de sorte que la distance qui les sépare est petite. Comme le paramètre η est directement proportionnel à cette distance, on peut donc réécrire l'expression précédente en y développant les fonctions en série pour de petites valeurs de η. En particulier, le cosinus intégral se comporte approximativement comme un logarithme lorsque son argument est petit, $\mathrm{Ci}(\eta) \approx \ln\eta$. On obtient ainsi, en ne conservant que les termes qui divergent lorsque η devient nul †,

$$\langle\varphi(\tau,\mathbf{x})\varphi(\tau,\mathbf{x}')\rangle_{\mathrm{UV}} \approx \frac{H^2}{4\pi^2}\left[\frac{1}{\eta^2} - \left(1 - \frac{m^2}{2H^2}\right)\ln\eta\right]. \tag{3.70}$$

---

*On sait bien que cela n'est pas tout à fait exact. La valeur d'une fonction sinusoïdale est indéfinie à l'infini, mais elle y demeure bornée entre -1 et 1, de sorte qu'en moyenne sa valeur y est nulle. Une manière peut-être un peu plus rigoureuse d'obtenir le même résultat serait de multiplier la fonction sinus dans l'intégrale par une exponentielle décroissante, disons $e^{-\lambda x}$, puis de prendre la limite où $\lambda = 0$ seulement à la toute fin du calcul.

†On peut comparer cette expression avec celles fournies notamment dans [13], [20] et [25].

La fonction de corrélation à deux points d'un champ scalaire dans l'espace de Sitter diverge donc bel et bien dans l'ultraviolet, lorsque les deux points en viennent à se confondre l'un avec l'autre. Cette divergence ultraviolette présente d'ailleurs la même forme peu importe la masse du champ, comprenant un terme quadratique et un terme logarithmique en η. Sa forme se trouve altérée seulement dans le cas où le champ possède une masse effective nulle, c'est-à-dire lorsque $m^2 = 2H^2$. Dans ce cas, la divergence logarithmique disparaît et il ne reste plus que le terme quadratique, exactement comme dans un espace de Minkowski statique,

$$\langle \varphi(\tau, \mathbf{x})\varphi(\tau, \mathbf{x}')\rangle_{\mathrm{UV}} \approx \frac{H^2}{4\pi^2\eta^2} \qquad (m_{\mathrm{eff}} = 0). \tag{3.71}$$

Notons finalement que la même expression pour la fonction de corrélation demeure valide dans le cas général, avec les mêmes fonctions de η, lorsqu'on ne prend pas la limite où $\tau' = \tau$ au début du calcul. Il suffit d'ajuster la définition de η en conséquence.

§3.10 Contribution infrarouge. De la même façon, si l'on pose $x = -k\tau$, la partie infrarouge de la fonction de corrélation du champ est donnée par

$$\langle \varphi(\tau, \mathbf{x})\varphi(\tau, \mathbf{x}')\rangle_{\mathrm{IR}} = \frac{H^2}{4\pi^2\eta} \int_0^1 \mathrm{d}x\, x\, \sin(x\eta)\, |H_\alpha(-x)|^2. \tag{3.72}$$

Comme l'intégrale s'étend seulement à de petites valeurs de x, on peut donc approximer la fonction de Hankel par le premier terme de sa série de Taylor,

$$H_\alpha(x) \approx C_\alpha\, x^{-\alpha}, \tag{3.73}$$

où C_α est une constante complexe dépendant de α, et dont la norme est donnée par

$$|C_\alpha| = \frac{2^\alpha}{\sqrt{2\pi}}\, \Gamma(\alpha). \tag{3.74}$$

On peut aussi approximer la fonction sinus présente dans l'intégrale par le premier terme de sa série, $\sin(x\eta) \approx x\eta$, d'autant plus qu'on suppose ici que la distance η est petite. Grâce à ces approximations, la partie infrarouge de la fonction de corrélation devient alors

$$\langle \varphi(\tau, \mathbf{x})\varphi(\tau, \mathbf{x}')\rangle_{\mathrm{IR}} \approx \frac{H^2}{4\pi^2}\, |C_\alpha|^2 \int_0^1 \mathrm{d}x\, x^{2-2\alpha}. \tag{3.75}$$

Il faut remarquer que la dépendance sur η a complètement disparu de l'expression précédente. En première approximation, la contribution infrarouge correspond donc à une simple constante, indépendante de la distance géodésique entre les deux points considérés. Il reste à savoir si cette constante demeure finie ou si elle diverge. Une telle situation peut survenir dans ce cas-ci en raison de la borne inférieure de l'intégrale, autrement dit pour les modes de très grandes longueurs d'onde. La valeur de l'intégrale demeure en effet finie si $2 - 2\alpha > -1$, c'est-à-dire si $\alpha < \frac{3}{2}$, ce qui se produit seulement lorsque la masse du champ n'est pas nulle. Dans ce cas, on trouve alors

$$\langle \varphi(\tau, \mathbf{x})\varphi(\tau, \mathbf{x}')\rangle_{\mathrm{IR}} \approx \frac{H^2}{4\pi^2} \frac{|C_\alpha|^2}{3 - 2\alpha}. \tag{3.76}$$

Au contraire, lorsque la masse du champ est nulle, on a que $\alpha = \frac{3}{2}$, de sorte que l'intégrale précédente diverge de manière logarithmique pour les modes de très grandes longueurs d'onde,

$$\langle \varphi(\tau, \mathbf{x})\varphi(\tau, \mathbf{x}')\rangle_{\mathrm{IR}} \approx \frac{H^2}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{H^2}{4\pi^2} \ln x \Big|_0^1. \tag{3.77}$$

Ainsi, contrairement à la partie ultraviolette de la fonction de corrélation, qui demeure sensiblement la même selon que le champ possède ou non une masse, sa partie infrarouge se comporte de manière radicalement différente dans ces deux cas. Elle demeure finie lorsque la masse du champ n'est pas nulle, de sorte qu'elle peut être négligée dans la limite où les deux points sont près l'un de l'autre, car elle ne fait qu'ajouter une simple constante à la fonction de corrélation totale. À l'inverse, elle diverge lorsque la masse du champ est nulle, et ce, même si les deux points considérés demeurent spatialement distincts. Sa divergence n'est pas causée par la trop grande proximité des points, comme c'était le cas plus haut pour la contribution ultraviolette, mais elle est due plutôt à la nature même du spectre de puissance du champ.

Pour éliminer la divergence infrarouge de la fonction de corrélation d'un champ sans masse, il est possible de borner l'intégrale précédente par le bas [24], en la restreignant aux seuls modes de Fourier possédant un nombre d'onde supérieur à une valeur minimale, $k_{\min}$. Cela revient à se limiter à une certaine section de l'espace, possédant une taille finie, de façon à ce que les modes responsables de la divergence infrarouge s'en trouvent complètement exclus, du fait de leur trop grande longueur d'onde. Reprenons ainsi le calcul précédent, en appliquant maintenant cette restriction. L'expression exacte des modes de Fourier d'un champ sans masse est

$$\varphi_k(\tau) = -\frac{H\tau}{\sqrt{2k}}\, e^{-ik\tau} \left(1 + \frac{1}{ik\tau}\right), \tag{3.78}$$

ce qui implique que le spectre de puissance pour ce champ est

$$|\varphi_k(\tau)|^2 = \frac{H^2\tau^2}{2k} \left(1 + \frac{1}{k^2\tau^2}\right). \tag{3.79}$$

Comme on sait déjà que la partie infrarouge de la fonction de corrélation ne dépend pas, en première approximation, de la distance géodésique entre les points considérés, on peut prendre dès maintenant la limite où cette distance est nulle. On trouve alors

$$\begin{aligned} \left\langle \varphi^2 \right\rangle_{\mathrm{IR}} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{k_{\min}}^{k_c} \mathrm{d}k\, k^2\, |\varphi_k|^2 \\ &= \frac{H^2}{4\pi^2} \int_{k_{\min}}^{k_c} \mathrm{d}k \left(\frac{1}{k} + \tau^2 k\right), \end{aligned} \tag{3.80}$$

où l'on a restreint l'intégrale aux modes possédant un nombre d'onde supérieur à une certaine valeur minimale, $k > k_{\min}$. Comme le nombre d'onde critique est donné par $k_c = aH$, l'intégrale n'a de sens que si $k_{\min} < aH$ en tout temps. Il faut donc que le facteur d'échelle de l'espace ne descende jamais en deçà d'une certaine valeur minimale, $a_i < a$, définie par $k_{\min} = a_i H$. Cette valeur minimale constitue en même temps une valeur initiale, dans la mesure où l'espace se trouve en continuelle expansion, de sorte que son facteur d'échelle augmente toujours avec le temps. Ainsi, en termes de ce paramètre, la partie infrarouge de la fonction de corrélation d'un champ sans masse s'écrit

$$\left\langle \varphi^2 \right\rangle_{\mathrm{IR}} = \frac{H^2}{4\pi^2} \left[\ln\left(\frac{a}{a_i}\right) + \frac{1}{2} - \frac{a_i^2}{2a^2}\right]. \tag{3.81}$$

Longtemps après que l'univers ait commencé son expansion, son facteur d'échelle se trouve alors bien supérieur à sa valeur initiale, $a \gg a_i$, ce qui fait que les deuxième et troisième termes dans l'équation précédente peuvent être négligés par rapport au premier,

$$\left\langle \varphi^2 \right\rangle_{\mathrm{IR}} \approx \frac{H^2}{4\pi^2} \ln\left(\frac{a}{a_i}\right). \tag{3.82}$$

Comme le facteur d'échelle d'un espace de Sitter augmente exponentiellement avec le temps physique, $a \propto e^{Ht}$, on peut aussi écrire

$$\left\langle \varphi^2 \right\rangle_{\mathrm{IR}} \approx \frac{H^3}{4\pi^2}\,(t - t_i), \tag{3.83}$$

où t_i est la valeur initiale du temps physique*. La partie infrarouge de la fonction de corrélation d'un champ sans masse peut donc être proprement régularisée en imposant une limite maximale pour la longueur d'onde des modes. Cette longueur d'onde maximale, exprimée comme une distance physique, augmente à mesure que l'espace prend de l'expansion, ce qui fait que de plus en plus de modes en viennent à se trouver inclus dans la section d'espace considérée. Plus précisément, on a que

$$\begin{aligned} (k_{\mathrm{ph}})_c &= \frac{k_c}{a} = H, \\ (k_{\mathrm{ph}})_{\mathrm{min}} &= \frac{k_{\mathrm{min}}}{a} = \frac{a_i}{a}\,H. \end{aligned} \tag{3.84}$$

Dans ce contexte, seuls les modes possédant une longueur d'onde physique supérieure à l'inverse de H, mais ne dépassant pas une certaine valeur maximale, peuvent contribuer à la partie infrarouge de la fonction de corrélation. De ces modes, aucun n'y contribue initialement puisque $(k_{\mathrm{ph}})_{\mathrm{min}} = (k_{\mathrm{ph}})_c$ pour $a = a_i$. À mesure que l'espace prend de l'expansion, la longueur d'onde maximale augmente, de sorte que de plus en plus de modes en viennent à se trouver inclus dans la section d'espace considérée, contribuant ainsi à la partie infrarouge de la fonction de corrélation. Celle-ci est nulle initialement, puis elle augmente progressivement, soit linéairement avec le temps physique, ou de manière logarithmique avec le facteur d'échelle de l'espace.

Cette croissance de la fonction de corrélation avec le temps demeure toutefois sujette à discussion. En particulier, il n'est pas clair si cette dépendance temporelle existe véritablement, ou si elle ne survient pas plutôt seulement parce que le champ est libre de toute interaction. En effet, si l'on suppose que le champ n'est pas libre, mais qu'il interagit avec lui-même suivant un potentiel quartique, sa fonction de corrélation peut alors tendre vers une valeur constante, au lieu de croître sans cesse [16]. Il reste à voir si une telle

*On retrouve ainsi le résultat standard pour la fonction de corrélation dans l'infrarouge, qui fut énoncé notamment dans [15] et [17], et qui est repris dans [24] et [25].

conclusion, issue d'une analyse stochastique d'un champ purement scalaire n'interagissant qu'avec lui-même, se traduit de la même façon dans le contexte de la gravité. Dans tous les cas, on supposera dans ce mémoire que les champs sont sans interaction, de sorte que leurs fonctions de corrélation dans l'infrarouge augmentent bel et bien avec le temps lorsqu'ils sont sans masse.

On peut reprendre le calcul précédent dans le cas où la fonction de corrélation implique deux champs évalués au même point de l'espace, mais à deux instants différents dans le temps, τ et τ'. Le calcul demeure essentiellement identique, dans la mesure où les modes du champ sont à peu près constants dans l'infrarouge, $\varphi_k(\tau) \approx \varphi_k(\tau')$. La seule différence survient quant au choix du nombre d'onde critique définissant le régime infrarouge, k_c. Plusieurs valeurs sont possibles, notamment aH et $a'H$, où $a = a(\tau)$ et $a' = a(\tau')$, ainsi que toutes celles se trouvant entre ces deux valeurs limites. On choisit ici la plus petite valeur possible*, à savoir $k_c = aH$ lorsque $a \leq a'$ (et donc $\tau \geq \tau'$). La fonction de corrélation est alors donnée par

$$\langle \varphi(\tau, \mathbf{x}) \varphi(\tau', \mathbf{x}) \rangle_{\mathrm{IR}} \approx \frac{H^2}{4\pi^2} \ln \left(\frac{a}{a_i} \right). \tag{3.85}$$

La fonction de corrélation à deux points du champ dans la limite où $\tau = \tau'$ constitue le principal résultat de ce chapitre. Si l'on ajoute la contribution ultraviolette à la partie infrarouge que l'on vient de calculer, la fonction de corrélation totale du champ s'écrit finalement

$$\begin{aligned} \left\langle \varphi^2 \right\rangle &\approx \left\langle \varphi^2 \right\rangle_{\mathrm{UV}} && (m \neq 0), \\ \left\langle \varphi^2 \right\rangle &\approx \left\langle \varphi^2 \right\rangle_{\mathrm{UV}} + \frac{H^2}{4\pi^2} \ln a && (m = 0), \end{aligned} \tag{3.86}$$

où l'on a fixé l'origine du temps en prenant $a_i = 1$, c'est-à-dire $t_i = 0$.

*Dans [25], on choisit plutôt la moyenne géométrique des deux valeurs limites, $k_c = \sqrt{aa'}$. Mon choix conduit quant à lui à la même fonction de corrélation que celle obtenue notamment dans [23].

Chapitre 4

Correction quantique à l'action gravitationnelle

Dans ce chapitre, on se propose de calculer la correction quantique de premier ordre à l'action gravitationnelle, afin de déterminer l'effet d'une telle correction sur le taux d'expansion de l'espace. On se concentre sur le cas d'un espace en expansion possédant une métrique $g_{\mu\nu} = a^2\eta_{\mu\nu}$, où $a = a(t)$ est le facteur d'échelle, à laquelle on joint de petites perturbations $h_{\mu\nu}$ que l'on traite comme des champs quantiques.

Les principales idées développées dans la première moitié de ce chapitre sont tirées en grande partie des travaux de H. Kitamoto et Y. Kitazawa, notamment [24], [25] et [26], qui traitent des corrections quantiques générées par les modes infrarouges des perturbations métriques. Plus spécifiquement, le raisonnement suivi ici s'inspire de celui présenté dans [26] pour le cas d'un espace purement de Sitter, mais il est quelque peu modifié, de sorte qu'il mène à une toute autre conclusion. Jusqu'à la section 4.7 inclusivement, les résultats démontrés dans ce chapitre s'accordent avec ceux de Kitamoto et Kitazawa, ce qui n'est plus le cas pour ceux qui suivent.

§4.1 Cas d'un espace avec une constante cosmologique. On reprend ici le raisonnement amorcé au début du deuxième chapitre de ce mémoire, en l'appliquant d'abord au cas où l'espace ne contient qu'une simple constante cosmologique, notée Λ, de sorte que les propriétés dynamiques de sa métrique sont décrites par l'action

$$S = \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{g}\,\big(R - 2\Lambda\big). \tag{4.1}$$

Si l'on suppose que l'espace subit de petites perturbations, de sorte que sa nouvelle métrique s'écrit $\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, on peut alors développer l'action gravitationnelle pour ce nouvel espace suivant les différentes puissances des perturbations. Le premier terme dans ce développement, celui ne dépendant pas des perturbations de la métrique, correspond à l'action dans l'espace de base ; le deuxième terme est quant à lui proportionnel aux équations d'Einstein, alors que le troisième comprend les contributions quadratiques dans les perturbations,

$$\bar{S} = \int \mathrm{d}^4x \, \sqrt{g} \, \big(R - 2\Lambda + \mathcal{L}^{(1)} + \mathcal{L}^{(2)} + \cdots \big), \tag{4.2}$$

où $\mathcal{L}^{(1)} = -(G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) h^{\mu\nu}$ et où $\mathcal{L}^{(2)}$ sera énoncé plus loin dans ce chapitre. Cette contribution de deuxième ordre constitue en fait l'objet principal de la présente étude, car c'est ce terme qui fournit la première correction quantique à l'action gravitationnelle, lorsque les perturbations affectant la métrique sont traitées comme des champs quantiques. Le terme linéaire dans les perturbations ne fournit en effet aucune correction, même si l'on suppose que les équations d'Einstein dans l'espace de base ne sont pas rigoureusement satisfaites.

Comme on l'a montré dans le chapitre précédent, la valeur moyenne d'un champ quantique dans son état de vide est nulle. Ainsi, en traitant les perturbations métriques comme des champs quantiques, leur valeur moyenne par rapport à leur état de vide est nulle, $\big\langle h_{\mu\nu} \big\rangle = \langle 0 | h_{\mu\nu} | 0 \rangle = 0$, de sorte que la contribution de premier ordre dans l'action s'annule également en moyenne, sans qu'il ne soit pour autant nécessaire d'admettre la validité des équations d'Einstein dans l'espace de base. Autrement dit, on a que

$$\big\langle \mathcal{L}^{(1)} \big\rangle = -(G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) \, \langle h^{\mu\nu} \rangle = 0, \tag{4.3}$$

même lorsque $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \neq 0$. En prenant la valeur moyenne de l'action gravitationnelle, on obtient ainsi une action effective pour l'espace perturbé semblable à celle pour l'espace de base, mais comprenant certaines corrections quantiques dues aux perturbations métriques,

$$S_{\text{eff}} = \big\langle \bar{S} \big\rangle = \int \mathrm{d}^4x \, \sqrt{g} \, \big(R - 2\Lambda + \big\langle \mathcal{L}^{(2)} \big\rangle + \cdots \big). \tag{4.4}$$

§4.2 Résumé de l'approche suivie. La valeur moyenne des termes quadratiques dans les perturbations métriques fournit ainsi la première correction quantique à l'action gravitationnelle. L'objectif principal de ce chapitre est de calculer cette correction, dans le cas où l'espace de base est du type de Sitter, c'est-à-dire pour un espace en expansion possédant une métrique $g_{\mu\nu} = a^2\eta_{\mu\nu}$, où $a = a(t)$ est le facteur d'échelle, et ne contenant qu'une simple constante cosmologique.

Comme la correction $\left\langle \mathcal{L}^{(2)} \right\rangle$ est quadratique dans les perturbations métriques, sa valeur moyenne est donc analogue à la variance d'un champ scalaire, $\langle \varphi^2 \rangle$. Or, lorsqu'on a calculé cette variance au chapitre précédent, dans le cas d'un champ scalaire libre existant dans un espace de Sitter, on a trouvé que la partie infrarouge de $\langle \varphi^2 \rangle$ demeure négligeable si le champ est massif, mais qu'elle augmente avec le temps lorsque le champ n'a pas de masse. Il est donc fort possible, de ce point de vue, que la contribution infrarouge de $\left\langle \mathcal{L}^{(2)} \right\rangle$ augmente aussi avec le temps, dès lors que certaines des perturbations métriques s'avèrent comparables à des champs scalaires sans masse. Si tel est le cas, il est alors possible que la correction quantique à l'action gravitationnelle en vienne même à modifier le taux d'expansion de l'espace, qui est constant dans l'espace de base, en lui conférant une valeur effective changeant avec le temps.

On aura remarqué que ces spéculations reposent sur deux hypothèses, deux possibilités qu'il importe de vérifier. Il faut, d'une part, que certaines composantes des perturbations métriques soient analogues à des champs scalaires sans masse, de façon à ce que leurs variances dans l'espace de base augmentent bel et bien avec le temps. On peut le vérifier en calculant explicitement le lagrangien déterminant les perturbations métriques, à savoir $\mathcal{L}^{(2)}$, puisque c'est ce lagrangien qui permet d'établir les équations classiques que ces perturbations doivent satisfaire. En principe, il faudrait ajouter à ce lagrangien d'autres termes, ceux des ordres supérieurs dans les perturbations métriques ($\mathcal{L}^{(3)}$, $\mathcal{L}^{(4)}$, etc.), mais on se restreint ici aux seuls termes de deuxième ordre, en négligeant tous les autres.

D'autre part, même s'il s'avère que certaines des perturbations métriques sont en effet sans masse, de sorte que la correction quantique qu'elles génèrent dans l'action gravitationnelle augmente avec le temps, il faut aussi que cette dépendance temporelle se répercute sur le taux d'expansion de l'espace. Or, un tel effet n'est jamais assuré, comme l'a démontré l'analyse menée dans le premier chapitre de ce mémoire. On y a vu, en effet, que les modes infrarouges des perturbations métriques, même s'ils parviennent à modifier le contenu en énergie-impulsion de l'espace, ne se manifestent pas toujours sur le taux d'expansion de ce dernier.

Plus généralement, rien ne garantit a priori ni l'une ni l'autre des hypothèses que l'on vient de mentionner, quoique tout semble les rendre probables. On verra plus loin que la première de ces hypothèses est bel et bien valide, ce qui n'est toutefois pas le cas de la seconde, du moins quand on se limite au deuxième ordre perturbatif, dans un espace purement de Sitter.

§4.3 Termes de deuxième ordre dans l'action gravitationnelle. Le reste de ce chapitre va s'articuler autour des deux étapes que l'on vient d'évoquer, ces deux principales hypothèses qu'il importe de vérifier. Pour chacune de ces étapes, il sera nécessaire de connaître l'expression des termes de deuxième ordre dans le développement de l'action gravitationnelle, $\mathcal{L}^{(2)}$.

On commence donc par calculer ces termes dans le cas d'un espace en expansion général, dont la métrique en l'absence de perturbations est donnée par $g_{\mu\nu} = a^2 \hat{g}_{\mu\nu}$, où $\hat{g}_{\mu\nu}$ est une métrique quelconque. Comme on s'intéresse plus particulièrement au cas d'un espace de Sitter, on compte choisir $\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ à la fin du raisonnement. Il est toutefois nécessaire de conserver une métrique plus générale dans les calculs, si l'on souhaite pouvoir déterminer le taux d'expansion effectif de l'espace perturbé. Ce taux peut être évalué directement à partir de l'action effective seulement s'il demeure possible de varier celle-ci par rapport aux composantes générales d'une métrique.

Dans le deuxième chapitre de ce mémoire, on a développé l'action gravitationnelle d'un espace possédant une métrique $\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, suivant les diverses puissances des perturbations $h_{\mu\nu}$. On a trouvé que les termes de deuxième ordre s'écrivent

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(2)} = &-\frac{1}{4}\nabla_\rho h^\mu_\nu \nabla^\rho h^\nu_\mu + \frac{1}{2}\nabla_\mu h^\mu_\rho \nabla^\nu h^\rho_\nu - \frac{1}{2}\nabla_\mu h \nabla^\nu h^\mu_\nu + \frac{1}{4}\nabla_\mu h \nabla^\mu h \\ &+ \frac{1}{2} h^\mu_\rho h^\nu_\sigma C^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} + \frac{1}{4} h^2 \left(\frac{1}{6}R - \Lambda\right) - \frac{1}{2} h^\mu_\nu h^\mu_\nu \left(\frac{1}{3}R - \Lambda\right),\end{aligned} \tag{4.5}$$

où Λ désigne la constante cosmologique présente dans l'espace. Ici, toutes les quantités géométriques, comme le tenseur de Weyl $C^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu}$ et le scalaire de Ricci R, sont celles de l'espace non perturbé. De plus, on a pris la peine d'écrire les perturbations métriques avec l'un de leurs indices en position inférieure, et l'autre en position supérieure, car de cette façon on peut mettre en évidence leur dépendance sur le facteur d'échelle. Avec $h_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} h^{\rho}_{\nu}$, la métrique de l'espace perturbé s'écrit en effet

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}\big(\delta^{\rho}_{\nu} + h^{\rho}_{\nu}\big). \tag{4.6}$$

Le facteur d'échelle présent dans la métrique $g_{\mu\nu} = a^2 \hat{g}_{\mu\nu}$ est alors clairement mis en évidence devant h^{ν}_{μ}, de sorte que c'est sous cette forme que les perturbations métriques considérées ici s'avèrent équivalentes à celles étudiées dans le premier chapitre de ce mémoire. Pour la suite de ce chapitre, les indices des divers tenseurs, notamment ceux des perturbations métriques, seront élevés au moyen de la métrique auxiliaire $\hat{g}_{\mu\nu}$. En posant donc maintenant $h_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\rho} h^{\rho}_{\nu}$, la métrique devient plutôt

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}\big(\delta^{\rho}_{\nu} + h^{\rho}_{\nu}\big) = a^2\big(\hat{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\big). \tag{4.7}$$

Il convient d'insister sur ce point, car certaines erreurs peuvent facilement survenir si l'on ne prend garde à la métrique choisie pour élever ou abaisser les indices de h^{ν}_{μ}. Par exemple, si l'on pose $h_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} h^{\rho}_{\nu}$, on peut tout aussi bien calculer $\nabla_{\mu} h^{\mu}_{\nu}$ ou $\nabla^{\mu} h_{\mu\nu}$, ces deux dérivées étant égales puisque $\nabla_{\mu} g_{\nu\rho} = 0$. Par contre, comme on se propose de choisir plutôt $h_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\rho} h^{\rho}_{\nu}$, il faut s'assurer de calculer les dérivées avec les indices aux bons endroits, dans la mesure où $\nabla_{\mu} \hat{g}_{\nu\rho} \neq 0$, de sorte que

$$\nabla_{\mu} h^{\mu}_{\nu} = h_{\nu\rho} \nabla_{\mu} \hat{g}^{\mu\rho} + \hat{g}^{\mu\rho} \nabla_{\mu} h_{\nu\rho} \neq \nabla^{\mu} h_{\mu\nu}. \tag{4.8}$$

Cette importante précision étant faite, on peut maintenant reprendre l'expression citée plus haut pour $\mathcal{L}^{(2)}$, afin de la réécrire en termes de la métrique auxiliaire $\hat{g}_{\mu\nu}$ et, ainsi, y mettre en évidence les contributions provenant du facteur d'échelle. À cet égard, lorsque la métrique d'un espace subit une transformation conforme, de la forme $g_{\mu\nu} = a^2 \hat{g}_{\mu\nu}$, les symboles de Christoffel pour cet espace deviennent

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \hat{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} + \delta^{\rho}_{\mu} a_{\nu} + \delta^{\rho}_{\nu} a_{\mu} - \hat{g}_{\mu\nu} a^{\rho}, \tag{4.9}$$

où a_μ est défini de la même façon que dans le premier chapitre, c'est-à-dire comme le taux de variation du facteur d'échelle par rapport aux diverses coordonnées,

$$a_\mu = \frac{\partial_\mu a}{a}. \tag{4.10}$$

Lorsque le facteur d'échelle ne dépend que du temps, on a que $a_\tau = \mathcal{H}$ et $a_i = 0$. À partir de l'expression précédente pour les symboles de Christoffel de l'espace perturbé, on trouve que la dérivée des perturbations métriques dans cet espace s'écrit

$$\begin{aligned}\nabla_\rho h^\nu_\mu &= \partial_\rho h^\nu_\mu + \Gamma^\nu_{\rho\sigma} h^\sigma_\mu - \Gamma^\sigma_{\rho\mu} h^\nu_\sigma \\ &= \hat{\nabla}_\rho h^\nu_\mu + \delta^\nu_\rho a_\sigma h^\sigma_\mu + \hat{g}_{\mu\rho} a^\sigma h^\nu_\sigma - a^\nu h_{\mu\rho} - a_\mu h^\nu_\rho,\end{aligned} \tag{4.11}$$

où $\hat{\nabla}_\mu$ désigne la dérivée covariante dans l'espace auxiliaire de métrique $\hat{g}_{\mu\nu}$. En particulier, pour un espace à quatre dimensions, on trouve

$$\nabla_\nu h^\nu_\mu = \hat{\nabla}_\nu h^\nu_\mu + 4 a_\nu h^\nu_\mu - a_\mu h, \tag{4.12}$$

où $h = h^\mu_\mu$ désigne la trace des perturbations métriques. On trouve également

$$\nabla^\nu h^\mu_\nu = \frac{1}{a^2}\, \hat{g}^{\nu\rho} \nabla_\nu h^\mu_\rho = \frac{1}{a^2}\big(\hat{\nabla}^\nu h^\mu_\nu + 4 a^\nu h^\mu_\nu - a^\mu h\big). \tag{4.13}$$

Ces expressions permettent de réécrire tous les termes de $\mathcal{L}^{(2)}$ impliquant des dérivées des perturbations métriques. Seul le premier de ces termes est vraiment long à développer ; après quelques simplifications, on obtient finalement

$$\begin{aligned}\nabla_\rho h^\mu_\nu \nabla^\rho h^\nu_\mu = \frac{1}{a^2}\Big(&\hat{\nabla}_\rho h^\mu_\nu \hat{\nabla}^\rho h^\nu_\mu + 4 a^\rho h^\mu_\rho \hat{\nabla}_\nu h^\nu_\mu - 4 a^\rho h^\nu_\mu \hat{\nabla}_\nu h^\mu_\rho \\ &+ 8 a_\mu a^\nu h^\mu_\rho h^\rho_\nu + 2 a_\rho a^\rho h^\nu_\mu h^\mu_\nu - 4 a_\mu a^\nu h h^\mu_\nu\Big).\end{aligned} \tag{4.14}$$

De plus, lorsque la métrique d'un espace à quatre dimensions subit une transformation conforme, comme c'est le cas ici, son scalaire de Ricci devient

$$R = \frac{1}{a^2}\big(\hat{R} - 6\hat{\nabla}^\rho a_\rho - 6 a^\rho a_\rho\big), \tag{4.15}$$

alors que son tenseur de Weyl, comme on l'a expliqué plus haut, demeure invariant sous la transformation, du moins à un facteur près suivant la position de ses indices,

$$C^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{a^2}\, \hat{C}^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu}. \tag{4.16}$$

En se servant des diverses expressions que l'on vient d'évoquer, on peut réécrire la contribution de deuxième ordre dans l'action gravitationnelle explicitement en termes du facteur d'échelle et de la métrique auxiliaire $\hat{g}_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned}a^2\mathcal{L}^{(2)} = &-\frac{1}{4}\hat{\nabla}_\rho h^\mu_\nu \hat{\nabla}^\rho h^\nu_\mu + \frac{1}{2}\hat{\nabla}_\mu h^\mu_\rho \hat{\nabla}^\nu h^\rho_\nu - \frac{1}{2}\hat{\nabla}_\mu h \hat{\nabla}^\nu h^\mu_\nu + \frac{1}{4}\hat{\nabla}_\mu h \hat{\nabla}^\mu h + \frac{1}{2}h^\mu_\rho h^\nu_\sigma \hat{C}^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} \\ &+ 3a_\rho h^\rho_\mu \hat{\nabla}^\nu h^\mu_\nu + a_\rho h^\mu_\nu \hat{\nabla}^\nu h^\rho_\mu - a^\mu h \hat{\nabla}_\nu h^\nu_\mu - 2a^\mu h^\nu_\mu \hat{\nabla}_\nu h + \frac{1}{2}a^\mu h \hat{\nabla}_\mu h \\ &+ 6a_\mu a^\nu h^\mu_\rho h^\rho_\nu - 3a_\mu a^\nu h h^\mu_\nu - \frac{1}{4}h^2\left(\hat{\nabla}^\rho a_\rho - a^\rho a_\rho + \Lambda a^2 - \frac{1}{6}\hat{R}\right) \\ &+ \frac{1}{2}h^\nu_\mu h^\mu_\nu\left(2\hat{\nabla}^\rho a_\rho + a^\rho a_\rho + \Lambda a^2 - \frac{1}{3}\hat{R}\right).\end{aligned} \tag{4.17}$$

§4.4 Ajout d'un terme de jauge. Il serait sans doute possible de simplifier quelque peu l'expression précédente, en y intégrant certains termes par parties. On évite toutefois de le faire à ce stade du raisonnement, en repoussant de telles simplifications à plus tard.

En effet, peu importe les simplifications que l'on se proposerait d'accomplir, on ne parviendrait jamais à réécrire $\mathcal{L}^{(2)}$ comme le lagrangien d'un ensemble de champs scalaires. Or, c'est précisément ainsi qu'il faut exprimer $\mathcal{L}^{(2)}$, si l'on veut identifier lesquelles des perturbations métriques sont assimilables à des champs scalaires sans masse, possédant dans l'infrarouge des fonctions de corrélation augmentant avec le temps.

Plus précisément, lorsqu'on applique l'expression précédente au cas particulier d'un espace de Sitter, en y prenant $\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ et en y insérant l'expression appropriée pour le facteur d'échelle, certains termes se simplifient ; les dérivées covariantes deviennent des dérivées ordinaires ; mais il reste que le lagrangien ainsi obtenu n'est pas celui d'un ensemble de champs scalaires. Il contient certains termes croisés, comme $\mathcal{H}\, h_{\tau\mu}\partial^\nu h^\mu_\nu$, qui ne comprennent qu'une seule dérivée des perturbations. Comme on cherche à comparer les perturbations métriques à des champs scalaires, il faut donc se débarrasser de ces termes croisés, car ceux-ci ne figurent pas dans le lagrangien ordinaire d'un champ scalaire. On y parvient en exploitant la liberté de jauge propre à l'action gravitationnelle, et qui permet d'imposer certaines contraintes aux composantes de la métrique sans affecter la réalité physique qu'elles visent à représenter.

On sait que l'action gravitationnelle est en général invariante sous changement de coordonnées. Cette invariance est en fait une exigence prescrite par le principe de relativité, selon lequel la physique d'un phénomène ne doit pas dépendre des coordonnées employées par un observateur pour le décrire. En particulier, l'action gravitationnelle demeure inchangée sous une transformation infinitésimale des coordonnées, de la forme $\tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu$, où ξ^μ est une fonction quelconque des anciennes coordonnées. Comme la métrique d'un espace dépend généralement des coordonnées, leur transformation infinitésimale se répercute donc aussi sur la métrique, qui se trouve transformée par les fonctions ξ^μ selon la règle

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \xi_\nu - \nabla_\nu \xi_\mu. \tag{4.18}$$

Le point à retenir est que la physique décrite par l'action gravitationnelle devrait être la même, qu'on choisisse $\tilde{g}_{\mu\nu}$ ou $g_{\mu\nu}$. On dispose donc d'une certaine liberté, dite *liberté de jauge*, quant au choix des coordonnées et de la métrique employées pour représenter l'espace. Cette liberté réside dans le choix des fonctions ξ^μ, que l'on peut fixer arbitrairement de façon à contraindre la métrique de l'espace, sans pour autant affecter la physique du phénomène. Dans un espace à quatre dimensions, ξ^μ représente un vecteur à quatre composantes. La liberté de jauge propre à l'action gravitationnelle permet ainsi d'imposer quatre contraintes ou, plus généralement, un et un seul vecteur complet de contraintes sur la métrique. On peut représenter ces contraintes sous la forme $J_\mu = 0$, où J_μ dépend de la métrique.

Revenons maintenant à notre sujet principal. On souhaite modifier l'expression de $\mathcal{L}^{(2)}$, en y faisant disparaître les termes à moitié cinétiques, n'impliquant qu'une seule dérivée des perturbations métriques. On y parvient en imposant des contraintes de jauge aux perturbations métriques. L'astuce consiste à ajouter à $\mathcal{L}^{(2)}$ des termes supplémentaires représentés par

$$\mathcal{L}_J^{(2)} = -\frac{1}{2} J_\mu J^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} J_\mu J_\nu, \tag{4.19}$$

où J_μ désigne les contraintes de jauge que l'on souhaite imposer à la métrique, de façon à éliminer les termes réfractaires. Pour que $\mathcal{L}_J^{(2)}$ soit du deuxième ordre, il faut que les contraintes J_μ soient linéaires dans les perturbations métriques. Lorsque ces contraintes sont vérifiées, c'est-à-dire lorsque $J_\mu = 0$, le terme ajouté à $\mathcal{L}^{(2)}$ est alors rigoureusement nul, $\mathcal{L}_J^{(2)} = 0$, de sorte qu'il n'en modifie pas réellement le contenu physique*.

Il reste maintenant à trouver les contraintes de jauge appropriées permettant d'éliminer complètement les termes croisés dans $\mathcal{L}^{(2)}$. Lorsqu'on étudie la théorie des perturbations linéaires dans un espace de Minkowski statique, de métrique $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, une jauge souvent choisie est celle de Donder, pour laquelle

$$J_\mu = \partial_\nu h_\mu^\nu - \frac{1}{2}\partial_\mu h. \tag{4.20}$$

Il peut être utile de s'inspirer de ce choix en tentant de le généraliser au cas d'un espace en expansion, de métrique $g_{\mu\nu} = a^2\hat{g}_{\mu\nu}$. À cet égard, la généralisation la plus naturelle consisterait à remplacer simplement les dérivées ordinaires dans la jauge de Donder par des dérivées covariantes,

$$J_\mu = \nabla_\nu h_\mu^\nu - \frac{1}{2}\nabla_\mu h. \tag{4.21}$$

Dans ce cas, le terme de jauge ajouté à $\mathcal{L}^{(2)}$ s'écrit

$$\mathcal{L}_J^{(2)} = -\frac{1}{2}\nabla_\mu h_\rho^\mu \nabla^\nu h_\nu^\rho + \frac{1}{2}\nabla_\mu h \nabla^\nu h_\nu^\mu - \frac{1}{8}\nabla_\mu h \nabla^\mu h. \tag{4.22}$$

En ajoutant ces termes à l'expression originale de $\mathcal{L}^{(2)}$, donnée par l'équation 4.5, la contribution effective de deuxième ordre à l'action gravitationnelle devient alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}_J^{(2)} = &-\frac{1}{4}\nabla_\rho h_\nu^\mu \nabla^\rho h_\mu^\nu + \frac{1}{8}\nabla_\mu h \nabla^\mu h + \frac{1}{2}h_\rho^\mu h_\sigma^\nu C^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} \\ &+ \frac{1}{4}h^2\left(\frac{1}{6}R - \Lambda\right) - \frac{1}{2}h_\nu^\mu h_\nu^\mu\left(\frac{1}{3}R - \Lambda\right).\end{aligned} \tag{4.23}$$

Cette expression est certainement plus concise et ressemble à peu près à ce que l'on recherche, sauf qu'elle compte encore des dérivées covariantes, au lieu de dérivées ordinaires. En développant ces dérivées pour la métrique $g_{\mu\nu} = a^2\hat{g}_{\mu\nu}$, il va donc en sortir

*Une stratégie similaire est par ailleurs employée en électromagnétisme. Dans ce cas, la liberté de jauge ne permet d'imposer qu'une seule contrainte sur les champs électromagnétiques, disons $J = 0$, de sorte que le terme de jauge typiquement ajouté à l'action de cette théorie prend la forme

$$\mathcal{L}_J = -\frac{1}{2}J^2.$$

nécessairement quelques-uns de ces termes croisés que l'on cherche à éviter. Ainsi, la généralisation de la jauge de Donder proposée plus haut ne convient pas tout à fait. On va montrer que le choix approprié pour les contraintes de jauge est donné plutôt par une généralisation un peu différente de la jauge de Donder, à savoir *

$$J_\mu = a^2 \left[\nabla_\nu \left(\frac{h^\nu_\mu}{a^2} \right) - \frac{1}{2} \nabla_\mu \left(\frac{h}{a^2} \right) \right]. \tag{4.24}$$

En développant les dérivées, puis en réécrivant le tout en termes de la métrique auxiliaire, notamment grâce à l'équation 4.12, on trouve

$$\begin{aligned} J_\mu &= \nabla_\nu h^\nu_\mu - \frac{1}{2} \nabla_\mu h - 2 a_\nu h^\nu_\mu + a_\mu h \\ &= \hat{\nabla}_\nu h^\nu_\mu - \frac{1}{2} \hat{\nabla}_\mu h + 2 a_\nu h^\nu_\mu. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Dans ce cas, le terme de jauge ajouté à $\mathcal{L}^{(2)}$ s'écrit

$$\begin{aligned} a^2 \mathcal{L}^{(2)}_J = -\frac{1}{2} \hat{g}^{\mu\nu} J_\mu J_\nu = -\frac{1}{2} \hat{\nabla}_\mu h^\mu_\rho \hat{\nabla}^\nu h^\rho_\nu + \frac{1}{2} \hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}^\nu h^\mu_\nu - \frac{1}{8} \hat{\nabla}_\mu h \hat{\nabla}^\mu h \\ - 2 a_\rho h^\rho_\mu \hat{\nabla}^\nu h_\nu \mu + a^\mu h^\nu_\mu \hat{\nabla}_\nu h - 2 a_\mu a^\nu h^\mu_\rho h^\rho_\nu. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Si l'on ajoute cette expression à celle trouvée plus haut pour $\mathcal{L}^{(2)}$, plusieurs termes se simplifient ou se combinent entre eux, de sorte qu'on obtient finalement

$$\begin{aligned} a^2 \big(\mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(2)}_J \big) = -\frac{1}{4} \hat{\nabla}_\rho h^\mu_\nu \hat{\nabla}^\rho h^\nu_\mu + \frac{1}{8} \hat{\nabla}_\mu h \hat{\nabla}^\mu h + \frac{1}{2} h^\mu_\rho h^\nu_\sigma \hat{C}^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} + \frac{1}{4} a^\mu \hat{\nabla}_\mu \big(h^2 \big) \\ + a_\rho \hat{\nabla}^\nu \big(h^\rho_\mu h^\mu_\nu \big) - a^\mu \hat{\nabla}_\nu \big(h h^\nu_\mu \big) + 4 a_\mu a^\nu h^\mu_\rho h^\rho_\nu - 3 a_\mu a^\nu h h^\mu_\nu \\ - \frac{1}{4} h^2 \left(\hat{\nabla}^\rho a_\rho - a^\rho a_\rho + \Lambda a^2 - \frac{1}{6} \hat{R} \right) \\ + \frac{1}{2} h^\nu_\mu h^\mu_\nu \left(2 \hat{\nabla}^\rho a_\rho + a^\rho a_\rho + \Lambda a^2 - \frac{1}{3} \hat{R} \right). \end{aligned} \tag{4.27}$$

Les termes purement cinétiques dans l'expression précédente, ceux comptant deux dérivées affectant les perturbations métriques, sont fort semblables à ceux obtenus lors de

*À ma connaissance, cette jauge fut employée pour la première fois par Tsamis et Woodard, notamment dans [19], afin de calculer le propagateur des perturbations métriques dans un espace de Sitter. Cette même jauge est reprise par Kitamoto et Kitazawa dans [25] et [26].

la première tentative de généralisation de la jauge de Donder. Toutefois, ils impliquent ici des dérivées covariantes reliées à la métrique auxiliaire, de sorte qu'en posant $\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, comme c'est le cas dans un espace de Sitter, celles-ci se réduisent maintenant à des dérivées ordinaires. De plus, il s'avère que les termes à moitié cinétiques, ne comptant qu'une seule dérivée, peuvent tous être intégrés par parties, de façon à transférer leur dérivée des perturbations au facteur d'échelle. Par exemple, on a que

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{g}\,\frac{1}{a^2}\,a_\rho\hat{\nabla}^\nu\big(h^\rho_\mu h^\mu_\nu\big) &= \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{\hat{g}}\,a^2 a_\rho\hat{\nabla}^\nu\big(h^\rho_\mu h^\mu_\nu\big) \\ &= -\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{\hat{g}}\,\hat{\nabla}^\nu\big(a^2 a_\rho\big)h^\rho_\mu h^\mu_\nu, \end{aligned} \tag{4.28}$$

où l'on a négligé le terme de divergence, car celui-ci se réduit à une intégrale de surface. Si l'on fait fi de ce terme, on peut alors écrire

$$\begin{aligned} a_\rho\hat{\nabla}^\nu\big(h^\rho_\mu h^\mu_\nu\big) &\cong -\frac{1}{a^2}\hat{\nabla}^\nu\big(a^2 a_\rho\big)h^\rho_\mu h^\mu_\nu \\ &= -\big(\hat{\nabla}^\nu a_\rho + 2a^\nu a_\rho\big)h^\rho_\mu h^\mu_\nu, \end{aligned} \tag{4.29}$$

et similairement pour les autres termes croisés présents dans la nouvelle expression de $\mathcal{L}^{(2)}$, celle modifiée par l'ajout de contraintes de jauge. Celle-ci devient alors finalement, après ces quelques intégrations par parties,

$$\begin{aligned} a^2\big(\mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(2)}_J\big) = -\frac{1}{4}\hat{\nabla}_\rho h^\mu_\nu\hat{\nabla}^\rho h^\nu_\mu + \frac{1}{8}\hat{\nabla}_\mu h\hat{\nabla}^\mu h + \frac{1}{2}h^\mu_\rho h^\nu_\sigma\hat{C}^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} + \left(\frac{1}{24}h^2 - \frac{1}{6}h^\nu_\mu h^\mu_\nu\right)\hat{R} \\ - h^\mu_\rho h^\rho_\nu\big(\hat{\nabla}^\nu a_\mu - 2a^\nu a_\mu\big) + hh^\mu_\nu\big(\hat{\nabla}^\nu a_\mu - a^\nu a_\mu\big) \\ + \left(\frac{1}{2}h^\nu_\mu h^\mu_\nu - \frac{1}{4}h^2\right)\big(2\hat{\nabla}^\rho a_\rho + a^\rho a_\rho + \Lambda a^2\big). \end{aligned} \tag{4.30}$$

§4.5 Masse des perturbations métriques. L'expression précédente correspond précisément à ce que l'on voulait obtenir. En particulier, si l'on prend $\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, elle présente la même forme que celle du lagrangien d'un ensemble de champs scalaires libres, certains d'entre eux possédant une masse donnée par les propriétés géométriques de l'espace de base, c'est-à-dire par son facteur d'échelle.

La comparaison que l'on se proposait initialement d'établir entre les perturbations métriques et des champs scalaires se trouve donc tout à fait justifiée. La contribution de deuxième ordre dans l'action gravitationnelle est formellement analogue à l'action d'un ensemble de champs scalaires. Or, c'est cette même contribution qui définit les propriétés dynamiques des perturbations métriques, en conduisant notamment aux équations classiques que celles-ci doivent satisfaire.

L'expression modifiée que l'on vient d'obtenir pour $\mathcal{L}^{(2)}$ s'avère très générale. Elle est valide pour n'importe quelle métrique $g_{\mu\nu} = a^2 \hat{g}_{\mu\nu}$, avec un facteur d'échelle pouvant dépendre arbitrairement des coordonnées de l'espace. En se restreignant maintenant au cas d'un espace de Minkowski en expansion, où $\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ et pour lequel le facteur d'échelle ne dépend que du temps, on trouve

$$\begin{aligned} a^2\big(\mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}_J^{(2)}\big) = -\frac{1}{4}\partial_\rho h^\mu_\nu\,\partial^\rho h^\nu_\mu + \frac{1}{8}\partial_\mu h\,\partial^\mu h + h_{\tau\mu}h^{\tau\mu}\big(\dot{\mathcal{H}} - 2\mathcal{H}^2\big) + h h_{\tau\tau}\big(\dot{\mathcal{H}} - \mathcal{H}^2\big) \\ + \left(\frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{2}h^\nu_\mu h^\mu_\nu\right)\big(2\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2 - \Lambda a^2\big). \end{aligned} \tag{4.31}$$

En particulier, si l'espace ne contient rien d'autre qu'une constante cosmologique, c'est-à-dire s'il est du type de Sitter, les équations d'Einstein dans cet espace impliquent que $\dot{\mathcal{H}} = \mathcal{H}^2$ et $3\mathcal{H}^2 = \Lambda a^2$. La contribution de deuxième ordre dans l'action gravitationnelle se réduit alors à *

$$\mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}_J^{(2)} = -\frac{1}{4}g^{\rho\sigma}\partial_\rho h^\mu_\nu\,\partial_\sigma h^\nu_\mu + \frac{1}{8}g^{\rho\sigma}\partial_\rho h\,\partial_\sigma h - h_{\tau\mu}h^{\tau\mu}H_0^2, \tag{4.32}$$

où H_0 désigne le taux d'expansion de l'espace de base. Celui-ci est constant dans un espace de Sitter, étant relié à la constante cosmologique par

$$H_0 = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}. \tag{4.33}$$

Ainsi, parmi les perturbations métriques affectant un espace de Sitter, certaines correspondent bel et bien à des champs scalaires sans masse et possèdent ainsi des fonctions

*On peut vérifier que cette expression pour les termes de deuxième ordre est équivalente à celles obtenues dans [19] et [25]. Il suffit de redéfinir les perturbations métriques suivant les conventions employées dans ces articles.

de corrélation croissant avec le temps. La première des deux hypothèses que l'on avait formulées initialement se trouve donc confirmée. Plus spécifiquement, ce sont les composantes spatiales h_{ij} des perturbations qui sont sans masse, alors que les composantes temporelles $h_{\tau\mu}$ en possèdent une. Celles-ci possèdent d'ailleurs toutes la même masse, donnée par $m^2 = 2H_0^2$, ce qui implique que leur masse effective est nulle. Ces composantes correspondent à des champs conformes, se comportant comme si elles se trouvaient dans un espace de Minkowski sans expansion.

Les diverses composantes des perturbations métriques se divisent donc en deux groupes, les unes étant sans masse et les autres sans masse effective. Cette classification des perturbations permet d'identifier lesquelles sont susceptibles de contribuer de manière significative à la partie infrarouge de l'action gravitationnelle. Dans le chapitre précédent, on a vu en effet que seuls les champs dont la masse physique est nulle possèdent une fonction de corrélation à deux points qui n'est pas négligeable dans l'infrarouge, mais qui augmente au contraire avec le temps. Dans la suite de ce chapitre, on va donc se concentrer sur ces champs sans masse, les seuls qui contribuent dans l'infrarouge, en négligeant les composantes temporelles des perturbations, $h_{\tau\mu} \approx 0$, et en ne conservant que leurs composantes spatiales [26].

§4.6 Covariance des perturbations sans masse. La première correction quantique à l'action gravitationnelle, celle que l'on cherche à calculer dans ce chapitre, est donnée par la valeur moyenne des termes de deuxième ordre dans l'action, $\langle \mathcal{L}^{(2)} \rangle$. Il faut donc, pour la calculer, connaître préalablement la valeur moyenne des produits de deux perturbations métriques, $\langle h_{\mu\nu} h_{\rho\sigma} \rangle$. Comme on se propose de négliger les composantes temporelles des perturbations, il suffit de déterminer les fonctions de corrélation à deux points pour les composantes spatiales, $\langle h_{ij} h_{kl} \rangle$. Les termes de deuxième ordre dans l'action gravitationnelle s'écrivent alors

$$\frac{1}{2\kappa}\big(\mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}_J^{(2)}\big) \approx -\frac{1}{8\kappa} g^{\mu\nu} \partial_\mu h_{ij}\, \partial_\nu h_{ij} + \frac{1}{16\kappa} g^{\mu\nu} \partial_\mu h\, \partial_\nu h, \tag{4.34}$$

où $\kappa = 8\pi G_N$. Le facteur de $\frac{1}{2\kappa}$ que l'on a ajouté dans l'expression précédente s'avère nécessaire dès qu'on veut comparer l'action gravitationnelle à celle d'une certaine matière, par exemple un champ scalaire, comme on compte le faire ici.

La trace des perturbations métriques est maintenant approximativement égale à celle des seules perturbations spatiales, $h = h^{\mu}_{\mu} \approx h_{ii}$, du fait qu'on néglige les composantes temporelles. Pour cette raison, il est commode de réécrire le lagrangien précédent en réunissant dans le même terme tous ceux dépendant de la trace. Pour ce faire, il suffit de redéfinir les perturbations spatiales de façon à ce qu'elles possèdent une trace nulle,

$$\bar{h}_{ij} = h_{ij} - \frac{1}{3} h \delta_{ij}, \tag{4.35}$$

où la trace de $\bar{h}_{ij}$ est approximativement nulle, $\bar{h}_{ii} = h_{ii} - h \approx 0$. Dans ce cas, le lagrangien pour les perturbations devient

$$\frac{1}{2\kappa}\left(\mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(2)}_{J}\right) \approx -\frac{1}{8\kappa} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \bar{h}_{ij}\, \partial_{\nu} \bar{h}_{ij} + \frac{1}{48\kappa} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} h\, \partial_{\nu} h. \tag{4.36}$$

Les deux termes de ce lagrangien sont maintenant indépendants, l'un contenant toute la trace et l'autre n'en possédant aucune. Il s'ensuit que les champs $\bar{h}_{ij}$ et h n'interagissent pas entre eux, de sorte que leurs fonctions de corrélation peuvent être calculées séparément. En particulier, leur fonction de corrélation à deux points est nulle, car leurs valeurs moyennes dans le vide sont nulles,

$$\left\langle h \bar{h}_{ij} \right\rangle = \langle h \rangle \left\langle \bar{h}_{ij} \right\rangle = 0. \tag{4.37}$$

Les fonctions de corrélation des perturbations originales, celles que l'on cherche à calculer pour la suite de ce travail, se composent donc de deux contributions, l'une due à la trace et l'autre aux champs sans trace,

$$\left\langle h_{ij} h_{kl} \right\rangle = \left\langle \bar{h}_{ij} \bar{h}_{kl} \right\rangle + \frac{1}{9} \delta_{ij} \delta_{kl} \left\langle h^2 \right\rangle. \tag{4.38}$$

Il est clair que les champs $\bar{h}_{ij}$ et h possèdent des fonctions de corrélation proportionnelles à celles d'un champ scalaire libre et sans masse, se trouvant dans un espace de Sitter. Toutefois, comme leurs lagrangiens respectifs sont de signes contraires, il en ira de même aussi pour leurs fonctions de corrélation à deux points. On choisit d'exprimer ces fonctions de corrélation en termes de celle d'un champ scalaire générique φ, décrit par le lagrangien

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \varphi\, \partial_{\nu} \varphi. \tag{4.39}$$

Ce choix implique que les fonctions de corrélation à deux points pour $\bar{h}_{ij}$ seront du même signe que celle du champ φ, alors que celle pour h sera de signe contraire. Plus précisément, en comparant le lagrangien précédent à celui pour la trace des perturbations métriques, on en déduit que la fonction de corrélation de cette dernière est reliée à celle de φ selon

$$\left\langle h^2 \right\rangle = -24\kappa \left\langle \varphi^2 \right\rangle . \tag{4.40}$$

Quant aux fonctions de corrélation pour $\bar{h}_{ij}$, il faut distinguer différents cas. Ces champs possèdent en effet une trace nulle, ce qui fait qu'ils ne sont pas tous indépendants les uns des autres, étant reliés par la contrainte $\bar{h}_{ii} = \bar{h}_{xx} + \bar{h}_{yy} + \bar{h}_{zz} \approx 0$. Or, comme cette contrainte ne concerne vraiment que les composantes diagonales de $\bar{h}_{ij}$, celles qui se trouvent hors diagonale ne la subissent pas et conservent ainsi leur indépendance, à ceci près qu'elles doivent obéir à la contrainte de symétrie propre à toute métrique, $\bar{h}_{ij} = \bar{h}_{ji}$. Cela dit, il convient donc de décomposer le lagrangien de $\bar{h}_{ij}$ en y séparant les composantes diagonales et hors diagonale, et en y regroupant les composantes égales,

$$-\frac{1}{8\kappa} g^{\mu\nu} \partial_\mu \bar{h}_{ij}\, \partial_\nu \bar{h}_{ij} = -\frac{1}{8\kappa} \sum_i g^{\mu\nu} \partial_\mu \bar{h}_{ii}\, \partial_\nu \bar{h}_{ii} - \frac{1}{4\kappa} \sum_{i<j} g^{\mu\nu} \partial_\mu \bar{h}_{ij}\, \partial_\nu \bar{h}_{ij}. \tag{4.41}$$

Les composantes diagonale et hors diagonale de $\bar{h}_{ij}$ sont donc indépendantes les unes des autres, leur lagrangien ne comptant pas de termes croisés. C'est aussi le cas pour les composantes hors diagonale entre elles. Il s'ensuit que les fonctions de corrélation à deux points combinant ces diverses composantes les unes avec les autres sont toutes nulles. Par exemple,

$$\begin{aligned} \left\langle \bar{h}_{xx}\, \bar{h}_{xy} \right\rangle &= \left\langle \bar{h}_{xx} \right\rangle \left\langle \bar{h}_{xy} \right\rangle = 0, \\ \left\langle \bar{h}_{xy}\, \bar{h}_{xz} \right\rangle &= \left\langle \bar{h}_{xy} \right\rangle \left\langle \bar{h}_{xz} \right\rangle = 0, \end{aligned} \tag{4.42}$$

et similairement pour les autres fonctions de corrélation de ce genre. Il serait toutefois erroné d'en conclure également que $\left\langle \bar{h}_{xx}\, \bar{h}_{yy} \right\rangle = 0$, car ces deux champs ne sont pas réellement indépendants, étant reliés l'un à l'autre par la contrainte sur la trace de $\bar{h}_{ij}$. Enfin, toutes les fonctions de corrélation à deux points restantes, celles qui ne s'annulent pas du fait de l'indépendance des champs, sont nécessairement proportionnelles à celle du champ φ. On peut donc condenser toutes les conclusions précédentes en écrivant

$$\left\langle \bar{h}_{ij}\bar{h}_{kl}\right\rangle = \alpha \left\langle \varphi^2 \right\rangle \left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} + \beta\, \delta_{ij}\delta_{kl}\right), \tag{4.43}$$

où α et β sont deux constantes à déterminer. Pour établir cette expression, on a notamment tenu compte de la symétrie de $\bar{h}_{ij}$, de façon à ce que $\left\langle \bar{h}_{ij}\bar{h}_{kl}\right\rangle = \left\langle \bar{h}_{ji}\bar{h}_{kl}\right\rangle$. En comparant le lagrangien pour $\bar{h}_{ij}$ à celui du champ φ, on en conclut que

$$\left\langle \bar{h}_{xy}^2\right\rangle = \left\langle \bar{h}_{xz}^2\right\rangle = \left\langle \bar{h}_{yz}^2\right\rangle = 2\kappa \left\langle \varphi^2 \right\rangle. \tag{4.44}$$

Cette nouvelle contrainte permet de fixer la valeur de α, car $\left\langle \bar{h}_{xy}^2\right\rangle = \alpha \left\langle \varphi^2 \right\rangle$ selon la définition précédente pour la fonction de corrélation, de sorte que $\alpha = 2\kappa$. La valeur de l'autre constante peut être déterminée en se servant du fait que la trace de $\bar{h}_{ij}$ est approximativement nulle. On a en effet que

$$\left\langle \bar{h}_{ij}\bar{h}_{kk}\right\rangle = 2\kappa \left\langle \varphi^2 \right\rangle \left(2 + 3\beta\right)\delta_{ij}, \tag{4.45}$$

mais puisque $\bar{h}_{kk} \approx 0$, il faut alors que $\beta = -\frac{2}{3}$. Les fonctions de corrélation à deux points pour les champs $\bar{h}_{ij}$ s'écrivent donc finalement [25]

$$\left\langle \bar{h}_{ij}\bar{h}_{kl}\right\rangle = 2\kappa \left\langle \varphi^2 \right\rangle \left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\, \delta_{ij}\delta_{kl}\right). \tag{4.46}$$

En combinant ces fonctions de corrélation à celle pour h, on en déduit celles pour les composantes spatiales des perturbations métriques originales,

$$\left\langle h_{ij}h_{kl}\right\rangle = 2\kappa \left\langle \varphi^2 \right\rangle \left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - 2\delta_{ij}\delta_{kl}\right). \tag{4.47}$$

§4.7 Fonction pour la première correction quantique. Dans la suite de ce travail, on verra que la correction quantique de premier ordre à l'action gravitationnelle dépend, dans l'infrarouge, d'une seule fonction définie par une certaine combinaison des fonctions de corrélation des perturbations métriques,

$$f = \frac{1}{4}\left\langle h_{ij}h_{ij}\right\rangle - \frac{1}{8}\left\langle h^2 \right\rangle. \tag{4.48}$$

En se servant de la formule générale que l'on vient d'obtenir pour les fonctions de corrélation à deux points de h_{ij}, on trouve $\left\langle h_{ij}h_{ij}\right\rangle = 12\kappa\left\langle\varphi^2\right\rangle$ et $\left\langle h^2\right\rangle = -24\kappa\left\langle\varphi^2\right\rangle$, ce qui implique que

$$f = 6\kappa\left\langle\varphi^2\right\rangle. \tag{4.49}$$

Au chapitre précédent, on a calculé la fonction de corrélation à deux points d'un champ sans masse se trouvant dans un espace de Sitter. On a vu que seule la partie infrarouge de cette fonction de corrélation croît avec le temps, sa partie ultraviolette pouvant être ramenée à une simple constante par régularisation. Plus précisément, on a montré que

$$\left\langle\varphi^2\right\rangle = \left\langle\varphi^2\right\rangle_{\mathrm{UV}} + \frac{H_0}{4\pi^2}\ln a, \tag{4.50}$$

où H_0 désigne comme précédemment le taux d'expansion de l'espace non perturbé. Il s'ensuit que, dans un espace de Sitter, la fonction f dépend de manière logarithmique sur le facteur d'échelle,

$$f \approx f_{\mathrm{UV}} + \gamma\ln a, \tag{4.51}$$

où f_{UV} est une constante due aux contributions ultraviolettes des perturbations métriques, et où γ est une autre constante définie par [26]

$$\gamma = \frac{3\kappa H_0^2}{2\pi^2} = \frac{12}{\pi}\left(\frac{H_0}{m_P}\right)^2, \tag{4.52}$$

où m_P désigne la masse de Planck ($m_P^2 = G_N^{-1}$). Comme la valeur du facteur de Hubble dans un espace de Sitter est typiquement bien inférieure à la masse de Planck, cette constante γ s'avère fort petite. Le terme dépendant du temps dans la fonction f, étant proportionnel à γ, demeure donc initialement négligeable. Il devient important avec l'expansion de l'espace, c'est-à-dire plus précisément lorsque $\gamma\ln a \sim 1$, après qu'un certain temps physique t se soit écoulé,

$$H_0\, t \sim \left(\frac{m_P}{H_0}\right)^2. \tag{4.53}$$

C'est seulement après ce temps, lorsque l'espace a suffisamment pris de l'expansion, que les contributions infrarouges des corrections quantiques en viennent à affecter la valeur de l'action gravitationnelle, dans la mesure où elles y figurent par le biais de la fonction f, comme on le verra bientôt. C'est seulement après ce temps, donc, que de telles corrections peuvent se répercuter en principe sur le taux d'expansion de l'espace.

§4.8 Comment calculer le facteur de Hubble effectif. Passons maintenant à la seconde partie du raisonnement que l'on se proposait initialement de suivre. La première hypothèse sur laquelle reposait ce raisonnement vient d'être vérifiée : on a montré en effet que certaines composantes des perturbations métriques se comportent comme des champs scalaires sans masse, de sorte que la partie infrarouge de leurs fonctions de corrélation à deux points augmente bel et bien avec le temps.

Il reste maintenant à déterminer si cette dépendance temporelle se manifeste aussi dans le taux d'expansion de l'espace. Pour ce faire, l'approche la plus naturelle consiste à calculer l'action gravitationnelle effective pour l'espace perturbé, en y ajoutant les corrections quantiques dues à la valeur moyenne des perturbations métriques,

$$S_{\text{eff}} = \int \mathrm{d}^4x \, \sqrt{g} \left(R - 2\Lambda + \left\langle \mathcal{L}^{(2)} \right\rangle \right). \tag{4.54}$$

De cette action effective, on peut alors déduire les nouvelles équations d'Einstein devant être satisfaites par le facteur d'échelle de l'espace. Ces équations seront évidemment différentes de celles vérifiées dans l'espace de base, en raison de l'ajout du terme supplémentaire $\left\langle \mathcal{L}^{(2)} \right\rangle$, qui dépend lui aussi de la métrique. Il suffira ensuite de résoudre ces nouvelles équations afin de déterminer la nouvelle dépendance temporelle du facteur d'échelle, de même que celle du nouveau facteur de Hubble de l'espace.

La procédure à suivre est donc connue ; elle comporte toutefois une difficulté qui la rend peu commode. Comme l'action gravitationnelle ne se présente pas ici sous la forme standard pour un espace contenant une constante cosmologique, les équations classiques auxquelles elle conduit ne seront pas celles d'Einstein, $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$. Pour les obtenir, il faut donc varier à nouveau l'action par rapport aux diverses composantes de la métrique, en leur supposant de petites perturbations. Les nouvelles équations satisfaites par la métrique sont alors obtenues en supposant que chacune de ces variations de l'action est nulle,

$$\delta S_{\text{eff}} = \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta g^{\mu\nu}} \, \delta g^{\mu\nu} = 0. \tag{4.55}$$

On a choisi plus haut d'exprimer l'action gravitationnelle en termes du facteur d'échelle de l'espace, ainsi que d'une métrique auxiliaire $\hat{g}_{\mu\nu}$, en posant $g_{\mu\nu} = a^2 \hat{g}_{\mu\nu}$. Dans ce cas, en supposant que la métrique auxiliaire est indépendante du facteur d'échelle, les variations de l'action effective par rapport à l'une comme à l'autre doivent s'annuler séparément,

$$\delta S_{\text{eff}} = \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta a}\, \delta a + \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta \hat{g}^{\mu\nu}}\, \delta \hat{g}^{\mu\nu} = 0. \tag{4.56}$$

Or, si cette procédure semble possible en principe, il est clair qu'elle présente d'importantes difficultés, du fait de la dépendance compliquée de l'action effective sur la métrique auxiliaire. Il suffit d'examiner l'expression obtenue plus haut pour $\mathcal{L}^{(2)}$ afin de se convaincre qu'il n'est pas aisé de calculer sa variation par rapport à $\hat{g}_{\mu\nu}$. Pour contourner cette difficulté, on pourrait par exemple poser $\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ directement dans l'action, puis varier celle-ci par rapport au facteur d'échelle. Toutefois, on n'obtiendrait ainsi qu'une seule équation différentielle, du deuxième ordre dans les dérivées temporelles, c'est-à-dire impliquant a, $\dot{a}$ et $\ddot{a}$, de sorte qu'il ne serait pas possible de déterminer précisément la dépendance temporelle du facteur d'échelle, ni celle du facteur de Hubble. Comme ce dernier est proportionnel à $\dot{a}$, il dépendrait alors d'une constante arbitraire due à l'intégration de l'équation satisfaite par le facteur d'échelle, constante qu'il serait impossible de fixer dans ces conditions. Pour ce faire, il faudrait disposer d'une seconde contrainte s'appliquant sur le facteur d'échelle.

Une situation similaire survient d'ailleurs en général dans tout espace de Minkowski en expansion. Les équations d'Einstein dans ces espaces conduisent à deux contraintes sur le facteur d'échelle, alors qu'on n'en obtient qu'une seule, si l'on se contente d'insérer la métrique $g_{\mu\nu} = a^2 \eta_{\mu\nu}$ directement dans l'action propre à ces espaces.

Il faut donc trouver une solution intermédiaire entre les deux approches que l'on vient d'évoquer, c'est-à-dire entre celle consistant à supposer une métrique auxiliaire tout à fait générale, et celle posant cette métrique égale à Minkowski. En fait, pour obtenir la seconde contrainte dont on a besoin, il suffit de varier l'action gravitationnelle par rapport à l'une seulement des composantes de $\hat{g}_{\mu\nu}$, par exemple $\hat{g}_{\tau\tau}$. Toutes les autres composantes peuvent alors être réduites aux valeurs qu'elles prennent dans Minkowski. Ainsi, en posant simplement $\hat{g}_{\tau\tau} = -\chi^2$, $\hat{g}_{\tau i} = 0$ et $\hat{g}_{ij} = \delta_{ij}$, la métrique de l'espace de base devient

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu = a^2\big(-\chi^2\,\mathrm{d}\tau^2 + \mathrm{d}\mathbf{x}^2\big). \tag{4.57}$$

Les deux contraintes devant être satisfaites par le facteur d'échelle peuvent alors être déterminées en variant l'action gravitationnelle effective par rapport à a et χ,

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta a} &= 0, \\ \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta \chi} &= 0. \end{aligned} \tag{4.58}$$

Comme pour le facteur d'échelle, on suppose ici que la fonction $\chi = \chi(t)$ ne dépend que du temps. Cette fonction est d'ailleurs intimement liée à la définition de la coordonnée temporelle τ. En effet, cette coordonnée peut être définie comme on le souhaite, dans la mesure où elle n'exprime pas le temps physique s'écoulant dans l'espace, lui étant reliée plutôt par $\mathrm{d}t = a\chi\,\mathrm{d}\tau$. Il est ainsi toujours possible de redéfinir arbitrairement la coordonnée τ, en prenant $\tau = \tau(\tilde{\tau})$. Une telle reparamétrisation ne modifie pas le temps physique, et n'affecte pas non plus la valeur du facteur d'échelle, si la fonction χ est modifiée en conséquence,

$$\tilde{\chi} = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\tilde{\tau}}\,\chi. \tag{4.59}$$

La présence de cette fonction dans la métrique exprime donc, en quelque sorte, la liberté que l'on possède de reparamétriser arbitrairement la coordonnée τ. On pourrait désigner χ comme la fonction de paramétrisation du temps. En négligeant cette fonction, comme on le fait par exemple si l'on pose $\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ directement dans l'action, on fixe la paramétrisation de τ en niant l'arbitraire qui l'entoure, ce qui explique pourquoi on perd alors l'une des deux contraintes s'appliquant sur le facteur d'échelle.

§4.9 Action gravitationnelle effective. Exprimons maintenant l'action gravitationnelle effective en termes de cette métrique auxiliaire particulière. À cet égard, si l'on suppose que χ ne dépend que du temps, tous les symboles de Christoffel pour cette métrique sont nuls, sauf $\hat{\Gamma}^{\tau}_{\tau\tau}$. Il s'ensuit que les composantes du tenseur de Riemann associé à cette métrique sont toutes nulles, $\hat{R}^{\sigma}_{\mu\nu\rho} = 0$, incluant $\hat{R}^{\tau}_{\tau\tau\tau} = 0$ même si $\hat{\Gamma}^{\tau}_{\tau\tau} \neq 0$, du fait de l'antisymétrie de ce tenseur. Conséquemment, on a aussi $\hat{C}^{\sigma}_{\mu\nu\rho} = 0$ et $\hat{R} = 0$.

De plus, comme seul le symbole de Christoffel $\hat{\Gamma}^{\tau}_{\tau\tau}$ n'est pas nul, la plupart des dérivées covariantes par rapport à la métrique auxiliaire se réduisent à des dérivées ordinaires, sauf dans certains cas qu'il convient d'examiner. Par exemple, la dérivée covariante du vecteur a_μ, défini comme le taux de variation du facteur d'échelle, s'écrit en général

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_\mu a_\nu &= \partial_\mu a_\nu - \hat{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} a_\rho \\ &= \partial_\mu a_\nu - \delta_{\mu\tau}\delta_{\nu\tau}\, \hat{\Gamma}^{\tau}_{\tau\tau}\, a_\tau. \end{aligned} \tag{4.60}$$

Comme le facteur d'échelle ne dépend que du temps, seule la dérivée $\hat{\nabla}_\tau a_\tau$ n'est pas nulle, étant égale à

$$\hat{\nabla}_\tau a_\tau = \dot{\mathcal{H}} - \hat{\Gamma}^{\tau}_{\tau\tau}\, \mathcal{H}. \tag{4.61}$$

De la même façon, la dérivée covariante des perturbations métriques s'écrit

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_\mu h^{\rho}_{\nu} &= \partial_\mu h^{\rho}_{\nu} + \hat{\Gamma}^{\rho}_{\mu\sigma} h^{\sigma}_{\nu} - \hat{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\nu} h^{\rho}_{\sigma} \\ &= \partial_\mu h^{\rho}_{\nu} + \delta_{\mu\tau}\, \hat{\Gamma}^{\tau}_{\tau\tau} \big(\delta^{\rho}_{\tau}\, h^{\tau}_{\nu} - \delta_{\nu\tau}\, h^{\rho}_{\tau} \big). \end{aligned} \tag{4.62}$$

Or, on compte négliger, dans l'action gravitationnelle effective, toutes les composantes temporelles des perturbations métriques, $h_{\tau\mu} \approx 0$, car celles-ci ne contribuent pas de manière significative dans l'infrarouge. Dans le cadre cette approximation, le second terme dans l'expression précédente devient tout entier négligeable, ce qui implique que les dérivées covariantes des perturbations se réduisent systématiquement à leurs dérivées ordinaires, $\hat{\nabla}_\mu h^{\rho}_{\nu} \approx \partial_\mu h^{\rho}_{\nu}$. Grâce à ces nombreuses simplifications, la contribution de deuxième ordre à l'action gravitationnelle devient

$$\begin{aligned} a^2 \big(\mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(2)}_J \big) \approx {}& -\frac{1}{4} \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu h_{ij}\, \partial_\nu h_{ij} + \frac{1}{8} \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu h\, \partial_\nu h \\ & + \left(\frac{1}{2} h_{ij} h_{ij} - \frac{1}{4} h^2 \right) \big(2 \hat{\nabla}^\mu a_\mu + a^\mu a_\mu + \Lambda a^2 \big), \end{aligned} \tag{4.63}$$

où l'on a négligé notamment tous les termes impliquant les composantes temporelles des perturbations métriques, tel qu'annoncé plus haut. Il ne reste plus qu'à prendre la valeur moyenne de l'expression précédente, afin d'obtenir la première correction quantique à l'action gravitationnelle. À cet égard, il est clair que, dans l'infrarouge, les valeurs moyennes des dérivées des perturbations sont négligeables face à celles des perturbations elles-mêmes. En effet, les dérivées spatiales ne font qu'introduire des facteurs du nombre d'onde, de sorte qu'elles sont d'autant plus négligeables pour les modes infrarouges des perturbations. Les dérivées temporelles annulent quant à elles la dépendance temporelle présente dans la partie infrarouge des fonctions de corrélation des perturbations sans masse. Plus spécifiquement, on a montré dans le chapitre précédent que la fonction de corrélation à deux points d'un champ sans masse φ, se trouvant dans un espace de Sitter, est donnée dans l'infrarouge par

$$\langle\varphi(\tau)\varphi(\tau')\rangle_{\rm IR} \approx \frac{H_0^2}{4\pi^2}\ln a(\tau), \tag{4.64}$$

lorsque $\tau \geq \tau'$. On peut en déduire la fonction de corrélation pour la dérivée temporelle du champ,

$$\left\langle\dot{\varphi}^2\right\rangle_{\rm IR} = \Big[\partial_\tau\partial_{\tau'}\left\langle\varphi(\tau)\varphi(\tau')\right\rangle_{\rm IR}\Big]_{\tau=\tau'} \approx \frac{H_0^2}{4\pi^2}\Big[\partial_\tau\partial_{\tau'}\ln a(\tau)\Big]_{\tau=\tau'} \approx 0, \tag{4.65}$$

où l'on a supposé que $\tau > \tau'$ avant de prendre la limite $\tau = \tau'$. Ainsi, il s'avère tout à fait légitime de négliger dans l'infrarouge les valeurs moyennes des perturbations métriques, lorsque celles-ci sont affectées de deux dérivées temporelles ou de deux dérivées spatiales. En prenant $\left\langle\partial_\mu h_{ij}\,\partial_\nu h_{kl}\right\rangle \approx 0$, on trouve finalement

$$\left\langle\mathcal{L}^{(2)}\right\rangle \approx \frac{2f}{a^2}\big(2\hat{\nabla}^\mu a_\mu + a^\mu a_\mu + \Lambda a^2\big), \tag{4.66}$$

où f correspond à la fonction définie plus haut, à savoir

$$f = \frac{1}{4}\left\langle h_{ij}h_{ij}\right\rangle - \frac{1}{8}\left\langle h^2\right\rangle. \tag{4.67}$$

L'expression précédente correspond précisément à la quantité que l'on se proposait de calculer dans ce chapitre : il s'agit de la partie infrarouge de la première correction quantique à l'action gravitationnelle. Bien qu'on ait calculé cette correction en ajoutant un certain terme de jauge à l'action gravitationnelle, on peut vérifier que ce terme ne contribue pas réellement à l'expression obtenue, si l'on tient compte des diverses approximations effectuées jusqu'à présent, $\left\langle \mathcal{L}_J^{(2)} \right\rangle \approx 0$. La correction quantique que l'on a calculée ne dépend donc pas des contraintes de jauge choisies un peu plus tôt. Celles-ci n'ont vraiment servi qu'à déterminer quelles composantes des perturbations métriques sont les plus susceptibles de générer d'importants effets dans l'infrarouge au fil du temps.

Il ne reste plus qu'à combiner la correction quantique obtenue à l'action gravitationnelle pour l'espace de base. Cette dernière est donnée par

$$S = \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{g}\,\big(R - 2\Lambda\big). \tag{4.68}$$

En prenant $g_{\mu\nu} = a^2 \hat{g}_{\mu\nu}$, le scalaire de Ricci de l'espace de base devient

$$R = \frac{1}{a^2}\big(\hat{R} - 6\hat{\nabla}^\mu a_\mu - 6a^\mu a_\mu\big). \tag{4.69}$$

La métrique auxiliaire définie plus haut en termes de la fonction χ possède un scalaire de Ricci identiquement nul, $\hat{R} = 0$, de sorte que

$$R = -\frac{6}{a^2}\big(\hat{\nabla}^\mu a_\mu + a^\mu a_\mu\big). \tag{4.70}$$

L'action gravitationnelle effective pour l'espace perturbé, comprenant à la fois l'action de l'espace de base, ainsi que la partie infrarouge de la première correction quantique, s'écrit donc

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}} &= \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{g}\,\big(R - 2\Lambda + \big\langle \mathcal{L}^{(2)} \big\rangle\,\big) \\ &\approx \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{\hat{g}}\,\Big(a^2\hat{\nabla}^\mu a_\mu(-6+4f) + a^2 a^\mu a_\mu(-6+2f) - 2\Lambda a^4(1-f)\Big). \end{aligned} \tag{4.71}$$

Il est possible de simplifier cette expression en intégrant par parties le premier terme,

$$\begin{aligned} a^2(-6+4f)\,\hat{\nabla}^\mu a_\mu &\cong -a_\mu \hat{\nabla}^\mu\Big(a^2(-6+4f)\Big) \\ &= a^2 a^\mu a_\mu(12 - 8f - 4af'), \end{aligned} \tag{4.72}$$

où l'on s'est servi du fait que f est une simple fonction du facteur d'échelle, de sorte qu'en général $\partial_\mu f = f'\,\partial_\mu a$. Le prime désigne ici la dérivée par rapport au facteur d'échelle.

Après avoir intégré par parties, on obtient finalement

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}} &\approx \int \mathrm{d}^4x \, \sqrt{\hat{g}} \, \left(6a^2 a^\mu a_\mu \Big(1 - f - \frac{2}{3} a f' \Big) - 2\Lambda a^4 (1-f) \right) \\ &\approx - \int \mathrm{d}^4x \left(\frac{6}{\chi} \, \dot{a}^2 A + 2\Lambda a^4 \chi B \right), \end{aligned} \tag{4.73}$$

où l'on a inséré les composantes de la métrique auxiliaire, avec $\hat{g}_{\tau\tau} = -\chi^2$, pour passer de la première ligne à la seconde. À cet égard, pour éviter toute confusion, rappelons que les indices des tenseurs étaient élevés jusqu'à présent au moyen de cette métrique ; il faut donc prendre $a^\mu a_\mu = \hat{g}^{\tau\tau} \mathcal{H}^2$. De plus, on a cru bon d'y définir les fonctions

$$\begin{aligned} A &= 1 - f - \frac{2}{3} a f', \\ B &= 1 - f. \end{aligned} \tag{4.74}$$

L'action gravitationnelle effective que l'on vient d'obtenir ressemble donc à celle d'un espace de Sitter standard, à la différence près que les termes cinétique et potentiel y sont tous les deux multipliés par certaines fonctions du facteur d'échelle, $A = A(a)$ et $B = B(a)$. Ces fonctions, égales à 1 dans un espace purement de Sitter, contiennent toutes les corrections quantiques de premier ordre dues aux perturbations métriques.

§4.10 Problème de la constante cosmologique. En particulier, le terme contenant la cosmologique de l'espace de base, Λ, y est multiplié par une fonction diminuant avec le temps, $B = 1 - f$. On pourrait alors être tenté d'en conclure que l'espace perturbé contient une constante cosmologique effective, initialement égale à celle de l'espace de base, mais diminuant avec le temps,

$$\Lambda_{\text{eff}} \approx \Lambda \, (1 - f) \approx \Lambda \, (1 - \gamma \ln a). \tag{4.75}$$

C'est, par exemple, la conclusion qui est ambitionnée dans [26]. Une telle idée est en effet fort attrayante, dans la mesure où elle pourrait constituer une solution au problème de la constante cosmologique. Il existe aujourd'hui une tension considérable entre la physique quantique et les observations cosmologiques, quant à la valeur de la constante cosmologique contenue dans l'univers. Comme celle-ci possède en principe une valeur constante, elle devrait ainsi présenter la même valeur aujourd'hui que celle qu'elle avait aux débuts de l'expansion de l'univers.

Or, si l'on suppose que l'univers primordial se composait de champs essentiellement quantiques, du fait de son état de forte compression comparativement à l'univers actuel, la constante cosmologique devait alors y posséder une valeur énorme, donnée par la densité d'énergie moyenne des champs quantiques peuplant l'univers à cette époque. La constante cosmologique mesurée aujourd'hui possède pourtant une valeur relativement faible, plusieurs dizaines d'ordre de grandeur plus faible que la valeur qu'elle possédait en principe dans l'univers primordial [18].

Il faut d'ailleurs qu'il en soit ainsi, dans la mesure où l'existence même de cette constante cosmologique n'a été suggérée par les observations que fort récemment. Pendant plusieurs siècles, avant même qu'Einstein n'ait eu l'idée d'introduire un tel paramètre dans son modèle cosmologique, la mécanique basée sur les principes de Newton connut beaucoup de succès dans sa description des phénomènes gravitationnels se déroulant au sein de notre système solaire. Or, nulle part dans cette mécanique céleste on n'a cru bon de faire apparaître une constante cosmologique, preuve que sa valeur actuelle doit être assez faible pour ne pas influencer les phénomènes gravitationnels se produisant à l'échelle de notre système solaire.

Il semble donc que la constante cosmologique effective de l'univers n'a pas pu conserver une valeur proprement constante durant toute son histoire, possédant initialement une valeur énorme, puis diminuant progressivement au fil du temps. L'action gravitationnelle effective calculée dans ce chapitre semble conduire à une constante cosmologique précisément de cette forme, la décroissance avec le temps étant donnée dans ce cas-ci par le logarithme du facteur d'échelle.

§4.11 Facteur de Hubble effectif. Il ne s'agit là, toutefois, que d'une simple idée suggérée par la forme de l'action gravitationnelle effective que l'on a calculée. Pour asseoir cette idée sur des bases plus sérieuses, il faut s'assurer que l'action obtenue décrit un espace du même genre que celui de Sitter, mais possédant un taux d'expansion non constant, diminuant avec le temps.

Pour déterminer le taux d'expansion de l'espace de Sitter perturbé décrit par l'action effective précédente, il suffit d'en déduire les deux contraintes devant être satisfaites par le facteur d'échelle d'un tel espace. Ces deux contraintes correspondent aux équations d'Euler-Lagrange obtenues en variant l'action effective par rapport à a et χ. Le lagrangien associé à cette action est donné par

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{6}{\chi}\,\dot{a}^2 A + 2\Lambda a^4 \chi B, \tag{4.76}$$

où $A = A(a)$ et $B = B(a)$ sont des fonctions du facteur d'échelle. Comme le lagrangien effectif ne dépend pas de $\dot{\chi}$, l'équation d'Euler-Lagrange qu'on en déduit pour χ est simplement

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial \chi} = -\frac{6\dot{a}^2 A}{\chi^2} + 2\Lambda a^4 B = 0, \tag{4.77}$$

ce qui implique que

$$\frac{\dot{a}^2}{\chi^2 a^4} = \frac{\Lambda B}{3A}. \tag{4.78}$$

Comme le temps physique est relié à la coordonnée τ par $\mathrm{d}t = a\chi\,\mathrm{d}\tau$, le membre de gauche dans l'équation précédente correspond à la définition du taux d'expansion de l'espace,

$$H = \frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{a}}{\chi a^2}. \tag{4.79}$$

En désignant par H_0 le taux d'expansion de l'espace de base, lequel est relié à la constant cosmologique par $\Lambda = 3H_0^2$, on trouve

$$H = H_0\sqrt{\frac{B}{A}} = H_0\sqrt{\frac{1-f}{1-f-\frac{2}{3}af'}}. \tag{4.80}$$

Le facteur d'échelle de l'espace doit également satisfaire une seconde contrainte, à savoir l'équation d'Euler-Lagrange obtenue en variant l'action effective par rapport au facteur d'échelle lui-même,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{12\dot{a}A}{\chi}\right) = \frac{6\dot{a}^2 A'}{\chi} + 8\Lambda\,a^3\chi B + 2\Lambda\,a^4\chi B', \tag{4.81}$$

où le prime désigne ici aussi la dérivée par rapport à a. Cette équation peut être réécrite en termes du temps physique et du taux d'expansion de l'espace,

$$2\,\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = H_0^2 a\,\frac{B'}{A} - H^2 a\,\frac{A'}{A} + 4H_0^2\,\frac{B}{A} - 4H^2. \tag{4.82}$$

Il faut souligner que cette équation est valide peu importe l'expression de la fonction χ, ce qui est sensé puisque la dépendance temporelle du facteur d'échelle ne devrait pas dépendre de la paramétrisation choisie pour τ. De plus, on peut vérifier que l'équation précédente est identiquement satisfaite pour

$$H = H_0\sqrt{\frac{B}{A}}\,, \tag{4.83}$$

et ce peu importe la dépendance particulière des fonctions A et B sur le facteur d'échelle. Cela confirme ainsi que cette solution correspond bel et bien au taux d'expansion de l'espace perturbé. Par contre, cette solution n'est vraiment valide qu'au premier ordre dans les corrections quantiques, car toutes les corrections des ordres supérieurs susceptibles de contribuer au taux d'expansion de l'espace ont été négligées dans l'ensemble de l'analyse menée jusqu'à présent. En développant au premier ordre en f, on trouve donc

$$H \approx H_0\left(1 + \frac{1}{3}af'\right). \tag{4.84}$$

Cette équation ressemble un peu à celle imaginée plus haut pour la constante cosmologique effective de l'espace. Par contre, elle s'en distingue radicalement sous au moins deux aspects : le signe de la correction y est maintenant positif et la fonction f y a été remplacée par sa dérivée. Tous les facteurs de f qui apparaissaient dans l'action gravitationnelle effective se simplifient entièrement dans l'expression du taux d'expansion de l'espace, du moins quand on se limite aux termes de premier ordre. Il ne reste plus que le terme dépendant de la dérivée de f, lequel est négligeable puisqu'il ne croît pas avec le temps. On a vu en effet que

$$f \approx f_{\mathrm{UV}} + \gamma \ln a, \tag{4.85}$$

de sorte que $af' \approx \gamma$, pourvu que les termes f_{UV} provenant de la partie ultraviolette des fonctions de corrélation des perturbations métriques ne dépendent pas du facteur d'échelle. Or, comme γ possède typiquement une valeur bien plus petite que 1, il s'ensuit que le taux d'expansion d'un espace de Sitter perturbé est à peu près le même que celui de l'espace de base,

$$H \approx H_0 \left(1 + \frac{1}{3}\gamma\right) \approx H_0. \tag{4.86}$$

§4.12 Critique du résultat obtenu. La seconde partie du raisonnement esquissé au début de ce chapitre s'avère ainsi infondée. Malgré l'existence de perturbations métriques sans masse, permettant d'introduire dans l'action gravitationnelle des termes de correction augmentant avec le temps, l'effet de ces corrections ne se manifeste pas sur le taux d'expansion effectif de l'espace. Cette conclusion rappelle d'ailleurs celle à laquelle on est parvenu dans le premier chapitre de ce mémoire. Dans un cas comme dans l'autre, il semble que les modes infrarouges des perturbations métriques ne parviennent pas à modifier le taux d'expansion d'un espace de Sitter, révélant ainsi la relative stabilité de cet espace.

Toutefois, même si cette conclusion semble commune aux deux analyses, elle ne se présente guère sous le même jour, avec la même fermeté. Dans le premier chapitre, elle s'est montrée valide à tous les ordres perturbatifs, alors qu'elle est vérifiée ici seulement au premier ordre dans les corrections quantiques. Au-delà de ce premier ordre, on ne peut rien dire de définitif, car il faudrait pour ce faire reprendre le calcul depuis le début, en tenant compte par exemple des termes cubiques dans les perturbations métriques.

De plus, lorsqu'on a calculé le taux d'expansion effectif de l'espace dans le premier chapitre, et qu'on a constaté que certaines simplifications se produisaient de telle sorte que $H \approx H_0$, selon la notation employée ici, les simplifications qui survenaient alors étaient fort générales. En particulier, elles ne dépendaient pas de la jauge choisie pour les perturbations métriques, ni de leur valeur particulière.

Au contraire, dans le présent chapitre, la conclusion voulant que $H \approx H_0$ tient à des circonstances fort particulières, si particulières d'ailleurs qu'on aurait presque envie de parler d'un cas limite. On a montré, en effet, que la correction de premier ordre au taux d'expansion de l'espace est donnée par af'. Tout au long du raisonnement ayant permis d'établir ce résultat, on a traité la fonction f de manière générale, sans supposer quoi que ce soit quant à sa dépendance sur le facteur d'échelle. Cela distingue d'ailleurs l'approche suivie ici de celle dans [26], où la dépendance de f sur le logarithme du facteur d'échelle joue un rôle central. On pourrait presque dire que toute leur analyse en dépend.

La forme particulière qu'on a donnée à f à la fin du raisonnement fut justifiée par l'analyse du chapitre précédent, portant sur la théorie quantique des champs dans un espace de Sitter. Or, si l'on s'était proposé de trouver, sans rien connaître de cette fonction f, la forme particulière qu'elle devrait prendre pour que la correction de premier ordre au taux d'expansion de l'espace soit négligeable, on en aurait tout de suite conclu que sa dépendance sur le facteur d'échelle devrait être logarithmique. Toute autre dépendance sur le facteur d'échelle conduit en effet à une correction variant avec le temps.

Par exemple, si f dépend d'une certaine puissance du facteur d'échelle, $f \sim a^n$, alors $af' \sim na^n$, de sorte que la correction de premier ordre cesse d'être négligeable dès que $n > 0$. De la même façon, si $f \sim (\ln a)^n$, alors $af' \sim n(\ln a)^{n-1}$, de sorte que la correction augmente avec le temps pour toute puissance $n > 1$. Ce dernier cas est d'ailleurs particulièrement intéressant, car on s'attend à ce que les corrections quantiques d'ordre supérieur soient de cette forme, c'est-à-dire qu'elles varient comme des puissances entières de $\ln a$. Il semble donc que la simplification ayant permis de conclure que $H \approx H_0$ n'est pas générale, mais qu'elle représente au contraire un cas limite qui ne risque pas de se reproduire aux ordres supérieurs.

En somme, l'étude conduite dans ce chapitre se révèle assez encourageante. Elle semble indiquer que, dès le deuxième ordre dans les corrections quantiques, les modes infrarouges des perturbations métriques devraient produire des effets sur le taux d'expansion d'un espace de Sitter, en y introduisant un terme augmentant avec le temps. Une conclusion similaire semble déjà avoir été atteinte dans [21], suivant une autre approche. Les auteurs de cet article soutiennent en effet que le taux d'expansion d'un espace de Sitter perturbé ne s'écarte de sa valeur de base seulement à partir du deuxième ordre dans les corrections quantiques, avec l'ajout d'un terme variant selon $(\gamma \ln a)^2$.

§4.13 Cas d'un espace avec un champ scalaire. Depuis le début de ce chapitre, on s'est concentré sur le cas d'un espace en expansion ne contenant qu'une constante cosmologique. Le raisonnement qu'on a suivi, et les résultats qu'on en a tirés, peuvent toutefois également s'appliquer au cas plus général d'un espace en expansion contenant un champ scalaire. Ces deux cas sont en effet intimement liés l'un à l'autre, comme on l'a déjà souligné ailleurs dans ce mémoire, du fait qu'un champ scalaire se réduit à une simple constante cosmologique sous certaines conditions, lorsque sa variation temporelle devient négligeable face à la valeur de son potentiel.

On se propose donc de reprendre l'analyse menée dans ce chapitre en l'appliquant maintenant au cas d'un champ scalaire φ, muni d'un potentiel quelconque et décrit par le lagrangien

$$\mathcal{L}_\varphi = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \, \partial_\nu \varphi - V(\varphi). \tag{4.87}$$

On suppose que ce champ scalaire se trouve dans un espace en expansion, dont la métrique subit de petites perturbations $h_{\mu\nu}$, par rapport à sa valeur de base $g_{\mu\nu}$. Ainsi, en définissant la métrique de l'espace perturbé comme $\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, l'action propre au champ scalaire contenu dans cet espace s'écrit

$$\begin{aligned} \bar{S}_\varphi &= \int \mathrm{d}^4x \, \sqrt{\bar{g}} \left(-\frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \, \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right) \\ &= \int \mathrm{d}^4x \, \sqrt{g} \left(\mathcal{L}_\varphi + \mathcal{L}_\varphi^{(1)} + \mathcal{L}_\varphi^{(2)} + \cdots \right), \end{aligned} \tag{4.88}$$

où $\mathcal{L}_\varphi$ désigne le lagrangien du champ scalaire dans l'espace de base, et où $\mathcal{L}_\varphi^{(1)}$ et $\mathcal{L}_\varphi^{(2)}$ comprennent respectivement tous les termes de premier et de deuxième ordre dans les perturbations métriques. Sans surprise, les termes de premier ordre correspondent au tenseur d'énergie-impulsion du champ scalaire,

$$\mathcal{L}_\varphi^{(1)} = \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \big(\partial_\mu \varphi \, \partial_\nu \varphi + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_\varphi \big) = \frac{1}{2} h^{\mu\nu} T_{\mu\nu}, \tag{4.89}$$

alors que ceux de deuxième ordre sont plutôt donnés par

$$\mathcal{L}_\varphi^{(2)} = -\frac{1}{2} h^\mu_\rho h^{\nu\rho} \partial_\mu \varphi \, \partial_\nu \varphi + \frac{1}{4} h h^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \, \partial_\nu \varphi + \left(\frac{1}{8} h^2 - \frac{1}{4} h^\mu_\nu h^\nu_\mu \right) \mathcal{L}_\varphi. \tag{4.90}$$

En développant ainsi l'action du champ scalaire, on n'a pas cru bon de supposer que celui-ci subissait également une petite perturbation $\delta\varphi$, indépendamment des perturbations métriques, comme on a dû le supposer dans le premier chapitre de ce mémoire. Dans ce cas-ci, il ne serait pas possible de fixer cette perturbation du champ, car on raisonne ici au niveau de l'action, en traitant les perturbations métriques comme des champs quantiques, non comme des fonctions obéissant une certaine équation différentielle. Or, sans équation différentielle permettant d'exprimer la perturbation du champ scalaire en termes de celles affectant la métrique, il vaut mieux n'inclure aucune perturbation de ce genre.

Cela ne signifie pas, évidemment, que le champ scalaire dans l'espace perturbé demeure le même que dans l'espace de base. Son expression change nécessairement puisque l'action qui le détermine se trouve modifiée par l'ajout de certaines corrections quantiques, dues aux perturbations de la métrique. Dans l'espace de base, le champ scalaire est une fonction du temps, $\varphi_0 = \varphi_0(t)$, satisfaisant deux contraintes imposées par les équations d'Einstein. L'action effective que l'on va calculer, comprenant la correction quantique infrarouge de premier ordre, va permettre d'établir deux nouvelles contraintes sur le champ scalaire se trouvant dans l'espace perturbé. Ces contraintes seront différentes des précédentes, de sorte que le nouveau champ scalaire ne sera pas donné, en principe, par la même fonction du temps que dans l'espace de base, $\varphi(t) \neq \varphi_0(t)$.

L'action totale pour l'espace perturbé, comprenant à la fois les termes gravitationnels et ceux pour le champ scalaire, s'écrit

$$\bar{S} = \bar{S}_R + 2\kappa\bar{S}_\varphi = \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{g}\,\Big(R + 2\kappa\mathcal{L}_\varphi - (G_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu})h^{\mu\nu} + \mathcal{L}_R^{(2)} + 2\kappa\mathcal{L}_\varphi^{(2)}\Big). \tag{4.91}$$

Si l'on considère les perturbations métriques comme des champs quantiques, et que l'on prend la valeur moyenne de l'action précédente par rapport au vide ce ces champs, on obtient l'action effective pour l'espace perturbé,

$$S_{\text{eff}} = \big\langle \bar{S} \big\rangle = \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{g}\,\Big(R + 2\kappa\mathcal{L}_\varphi + \Big\langle \mathcal{L}_R^{(2)} + 2\kappa\mathcal{L}_\varphi^{(2)} \Big\rangle\Big), \tag{4.92}$$

où les termes de premier ordre ont disparu, du fait que $\big\langle h_{\mu\nu} \big\rangle = 0$. Il ne reste plus qu'à calculer la valeur moyenne des termes de deuxième ordre, suivant les deux mêmes étapes que dans le cas d'un espace de Sitter. On commence par déterminer quelles composantes des perturbations métriques ne possèdent pas de masse lorsqu'on se rapporte à l'espace de base. Ce sont en effet les perturbations de ce type qui sont les plus susceptibles de contribuer à la valeur de l'action dans l'infrarouge, en raison de la divergence de leur fonction de corrélation à deux points dans cette limite. Cela fait, on peut alors entreprendre de calculer la valeur moyenne des termes de deuxième ordre dans l'action de l'espace perturbé, en ne conservant que les contributions dues aux perturbations sans masse.

Si l'on choisit d'ajouter les mêmes contraintes de jauge que dans le cas d'un espace purement de Sitter, les termes de deuxième ordre dans l'action totale sont alors $\mathcal{L}^{(2)} = \mathcal{L}_R^{(2)} + \mathcal{L}_J^{(2)} + 2\kappa\mathcal{L}_\varphi^{(2)}$. Pour un espace de base de métrique $g_{\mu\nu} = a^2\hat{g}_{\mu\nu}$, ces termes sont donnés explicitement par

$$\begin{aligned}
a^2\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{4}\hat{\nabla}_\rho h^\mu_\nu \hat{\nabla}^\rho h^\nu_\mu + \frac{1}{8}\hat{\nabla}_\mu h\hat{\nabla}^\mu h + \frac{1}{2}h^\mu_\rho h^\nu_\sigma \hat{C}^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} + \left(\frac{1}{24}h^2 - \frac{1}{6}h^\nu_\mu h^\mu_\nu\right)\hat{R} \\
- h^\mu_\rho h^\rho_\nu\Big(\hat{\nabla}^\nu a_\mu - 2a^\nu a_\mu + \kappa\hat{\nabla}^\nu\varphi\hat{\nabla}_\mu\varphi\Big) \\
+ hh^\mu_\nu\left(\hat{\nabla}^\nu a_\mu - a^\nu a_\mu + \frac{1}{2}\kappa\hat{\nabla}^\nu\varphi\hat{\nabla}_\mu\varphi\right) \\
+ \left(\frac{1}{2}h^\nu_\mu h^\mu_\nu - \frac{1}{4}h^2\right)\left(2\hat{\nabla}^\rho a_\rho + a^\rho a_\rho - \kappa a^2\mathcal{L}_\varphi\right).
\end{aligned} \tag{4.93}$$

En supposant maintenant que la métrique et le champ scalaire se réduisent à leurs valeurs dans l'espace de base, $g_{\mu\nu} = a^2\eta_{\mu\nu}$ et $\varphi = \varphi_0$, le lagrangien précédent devient

$$\begin{aligned}
a^2\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{4}\partial_\rho h^\mu_\nu\,\partial^\rho h^\nu_\mu + \frac{1}{8}\partial_\mu h\,\partial^\mu h + h_{\tau\mu}h^{\tau\mu}\big(\dot{\mathcal{H}} - 2\mathcal{H}^2 + \kappa\dot{\varphi}_0^2\big) \\
+ \left(\frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{2}h^\nu_\mu h^\mu_\nu\right)\left(2\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2 + \frac{1}{2}\kappa\dot{\varphi}_0^2 - \kappa a^2 V_0\right) \\
+ hh_{\tau\tau}\left(\dot{\mathcal{H}} - \mathcal{H}^2 + \frac{1}{2}\kappa\dot{\varphi}_0^2\right),
\end{aligned} \tag{4.94}$$

où l'on s'est servi du fait que le lagrangien du champ dans l'espace de base s'écrit

$$a^2\mathcal{L}_\varphi = \frac{1}{2}\kappa\dot{\varphi}_0^2 - a^2V_0, \tag{4.95}$$

avec $V_0 = V(\varphi_0)$. Les équations d'Einstein dans l'espace de base permettent de relier la valeur du champ scalaire à celle du facteur d'échelle,

$$
\begin{aligned}
-2\dot{\mathcal{H}} + 2\mathcal{H}^2 &= \kappa\dot{\varphi}_0^2, \\
2\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2 &= \kappa a^2 V_0 - \frac{1}{2}\kappa\dot{\varphi}_0^2,
\end{aligned}
\tag{4.96}
$$

de sorte que le lagrangien décrivant les propriétés dynamiques des perturbations métriques se réduit à

$$
a^2\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{4}\partial_\rho h^\mu_\nu\,\partial^\rho h^\nu_\mu + \frac{1}{8}\partial_\mu h\,\partial^\mu h - h_{\tau\mu}h^{\tau\mu}\,\dot{\mathcal{H}}. \tag{4.97}
$$

Ce lagrangien s'avère presque identique à celui obtenu précédemment pour les perturbations métriques dans un espace purement de Sitter. Il s'y réduit approximativement lorsque le champ scalaire varie lentement dans le temps, de sorte que $\dot{\mathcal{H}} \approx \mathcal{H}^2$. Comme ce lagrangien est sensiblement le même que dans de Sitter, on peut donc reprendre sans modification l'ensemble de l'analyse menée plus haut. En particulier, ce sont encore une fois les composantes spatiales h_{ij} des perturbations métriques qui sont sans masse, alors que les composantes temporelles $h_{\tau\mu}$ en possèdent une, ce qui fait qu'elles pourront être négligées dans le calcul de la partie infrarouge de $\left\langle \mathcal{L}^{(2)} \right\rangle$.

De plus, comme les termes cinétiques dans le lagrangien précédent sont les mêmes que dans un espace de Sitter, les composantes sans masse des perturbations métriques possèdent ainsi des fonctions de corrélation formellement identiques à celles qu'elles possèdent dans de Sitter. En particulier, leurs fonctions de corrélation à deux point sont données par la même expression,

$$
\left\langle h_{ij}h_{kl} \right\rangle = 2\kappa \left\langle \tilde{\varphi}^2 \right\rangle \left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - 2\delta_{ij}\delta_{kl}\right), \tag{4.98}
$$

où $\tilde{\varphi}$ désigne ici un champ scalaire quelconque, libre et sans masse, se trouvant dans l'espace en expansion contenant le champ φ. La fonction f permettant d'exprimer la correction quantique de premier ordre s'écrit donc aussi comme précédemment,

$$
f = \frac{1}{4}\left\langle h_{ij}h_{ij} \right\rangle - \frac{1}{8}\left\langle h^2 \right\rangle = 6\kappa \left\langle \tilde{\varphi}^2 \right\rangle. \tag{4.99}
$$

Toutefois, il faut insister sur le fait que la ressemblance de ces formules avec celles valides dans un espace de Sitter n'est que formelle. Le champ $\tilde{\varphi}$ figurant dans ces formules n'est pas situé dans un espace de Sitter, comme c'était le cas précédemment, mais bien dans un espace contenant un autre champ scalaire. Toute l'analyse menée dans le chapitre précédent ne s'applique donc pas à ce champ. Sa variance $\langle\tilde{\varphi}^2\rangle$ ne prend pas la même forme que dans un espace de Sitter et, en particulier, elle ne diverge pas de manière simplement logarithmique dans l'infrarouge. En fait, on s'attend à ce qu'elle diverge dans cette limite, mais suivant une fonction plus compliquée du facteur d'échelle.

Ainsi, bien que la fonction f représentant la correction quantique de premier ordre soit formellement identique à celle dans de Sitter, elle ne présente plus la même dépendance sur le facteur d'échelle, $f \neq f_{\mathrm{UV}} + \gamma \ln a$, de sorte que af' risque de n'être plus négligeable. Sur la base de l'analyse précédente, on peut donc s'attendre à ce que la correction quantique de premier ordre produise dans ce cas-ci des effets non négligeables sur le taux d'expansion de l'espace.

§4.14 Facteur de Hubble effectif. Pour vérifier si tel est le cas, il suffit de calculer l'action effective contenant la première correction quantique, puis d'en déduire les deux contraintes devant être satisfaites par le facteur d'échelle et le champ scalaire dans l'espace perturbé. On suppose maintenant que les équations d'Einstein dans l'espace de base ne sont plus satisfaites, et que les composantes temporelles des perturbations métriques peuvent être négligées, $h_{\tau\mu} \approx 0$, car elles ne contribuent pas de manière significative dans l'infrarouge. De plus, on choisit la même métrique auxiliaire que précédemment, avec $\hat{g}_{\tau\tau} = -\chi^2$, $\hat{g}_{\tau i} = 0$ et $\hat{g}_{ij} = \delta_{ij}$, où χ ne dépend que du temps. Dans ce cas, les termes de deuxième ordre dans l'action totale s'écrivent

$$\begin{aligned} a^2\mathcal{L}^{(2)} \approx -\frac{1}{4}\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu h_{ij}\,\partial_\nu h_{ij} + \frac{1}{8}\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu h\,\partial_\nu h \\ + \left(\frac{1}{2}h_{ij}h_{ij} - \frac{1}{4}h^2\right)\big(2\hat{\nabla}^\mu a_\mu + a^\mu a_\mu - \kappa a^2\mathcal{L}_\varphi\big). \end{aligned} \tag{4.100}$$

En prenant la valeur moyenne de cette expression par rapport au vide quantique des perturbations métriques, on obtient

$$\big\langle\mathcal{L}^{(2)}\big\rangle \approx \frac{2f}{a^2}\big(2\hat{\nabla}^\mu a_\mu + a^\mu a_\mu - \kappa a^2\mathcal{L}_\varphi\big), \tag{4.101}$$

où l'on a négligé les valeurs moyennes des dérivées des perturbations, car celles-ci sont négligeables dans l'infrarouge face aux valeurs moyennes des perturbations elles-mêmes, sans dérivées. L'action effective totale, comprenant la correction quantique de premier ordre que l'on vient d'obtenir, s'écrit donc

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}} &= \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{g}\,\left(R + 2\kappa\mathcal{L}_\varphi + \left\langle \mathcal{L}^{(2)} \right\rangle\right) \\ &\approx \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{\hat{g}}\Big(a^2\hat{\nabla}^\mu a_\mu(-6+4f) + a^2 a^\mu a_\mu(-6+2f) + 2\kappa\mathcal{L}_\varphi\, a^4(1-f)\Big), \end{aligned} \tag{4.102}$$

c'est-à-dire, si l'on intègre par parties le premier terme,

$$S_{\text{eff}} \approx \int \mathrm{d}^4x \left[-\frac{6\dot{a}^2 A}{\chi} + 2\kappa B\left(\frac{a^2\dot{\varphi}^2}{2\chi} - a^4\chi V\right)\right], \tag{4.103}$$

où $A = A(a)$ et $B = B(a)$ désignent deux fonctions du facteur d'échelle, définies en termes de la fonction f de la même façon que dans l'espace de Sitter,

$$\begin{aligned} A &= 1 - f - \frac{2}{3}af', \\ B &= 1 - f. \end{aligned} \tag{4.104}$$

Les deux contraintes permettant de relier le nouveau facteur d'échelle de l'espace perturbé à la nouvelle expression du champ scalaire qu'il contient peuvent être établies en variant l'action précédente par rapport à a et χ. Ces contraintes correspondent aux équations d'Euler-Lagrange qu'il est possible de déduire du lagrangien

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{6\dot{a}^2 A}{\chi} + 2\kappa B\left(\frac{a^2\dot{\varphi}^2}{2\chi} - a^4\chi V\right). \tag{4.105}$$

L'équation d'Euler-Lagrange pour χ s'écrit

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial\chi} = \frac{6\dot{a}^2 A}{\chi^2} - 2\kappa B\left(\frac{a^2\dot{\varphi}^2}{2\chi^2} + a^4 V\right) = 0, \tag{4.106}$$

ce qui implique directement que

$$\frac{3H^2 A}{B} = \kappa\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 + V\right], \tag{4.107}$$

où l'on s'est servi du fait que le temps physique est relié à la coordonnée τ par $\mathrm{d}t = a\chi\,\mathrm{d}\tau$. Dans cette équation, H désigne le taux d'expansion de l'espace perturbé, défini en termes de son nouveau facteur d'échelle,

$$H = \frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{a}}{a^2\chi}. \tag{4.108}$$

De la même façon, l'équation d'Euler-Lagrange pour a s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{12\dot{a}A}{\chi}\right) - \frac{6\dot{a}^2A'}{\chi} = -\kappa\,\frac{\dot{\varphi}^2}{\chi}\big(a^2B' + 2aB\big) + 2\kappa\chi V\big(a^4B' + 4a^3B\big), \tag{4.109}$$

où le prime désigne la dérivée par rapport au facteur d'échelle. En divisant cette équation par $a^3\chi$, de façon à réécrire les dérivées en termes du temps physique, on obtient

$$\frac{12}{a^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(Ha^2A\big) - 6H^2aA' = -\kappa\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\big(aB' + 2B\big) + 2\kappa V\big(aB' + 4B\big). \tag{4.110}$$

Cette équation se trouve quelque peu simplifiée si l'on y fait disparaître le potentiel du champ, en se servant de la première contrainte trouvée plus haut. Cette dernière implique en effet que

$$\kappa V = \frac{3H^2A}{B} - \frac{1}{2}\kappa\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2, \tag{4.111}$$

de sorte que la seconde contrainte devant être satisfaite par le facteur d'échelle et le champ scalaire devient

$$2\sqrt{\frac{A}{B}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(H\sqrt{\frac{A}{B}}\right) = -\kappa\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\left(1 + \frac{aB'}{3B}\right). \tag{4.112}$$

Les deux contraintes que l'on vient d'obtenir permettent en principe de déterminer la dépendance temporelle du facteur d'échelle et du champ scalaire dans l'espace perturbé. Toutefois, il n'est pas aussi facile de résoudre simultanément ces deux équations comme on peut le faire dans un espace purement de Sitter, surtout si l'on conserve pour le champ un potentiel général.

De toute façon, le but n'est pas ici de calculer explicitement ces paramètres en termes du temps, mais de vérifier si leurs expressions respectives ont été modifiées par les perturbations métriques, comparativement à leurs valeurs dans l'espace de base. À cet égard, les deux contraintes s'appliquant dans l'espace perturbé ressemblent de près à celles qui sont satisfaites dans l'espace de base,

$$
\begin{aligned}
3H_0^2 &= \kappa \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\mathrm{d}\varphi_0}{\mathrm{d}t} \right)^2 + V_0 \right], \\
2\,\frac{\mathrm{d}H_0}{\mathrm{d}t} &= -\kappa \left(\frac{\mathrm{d}\varphi_0}{\mathrm{d}t} \right)^2,
\end{aligned}
\tag{4.113}
$$

où H_0 et φ_0 désignent respectivement le taux d'expansion de l'espace de base et le champ scalaire qu'il contient. En particulier, si l'on compare la première de ces équations avec la première contrainte trouvée plus haut (c'est-à-dire l'équation 4.107), on pourrait être tenté d'en conclure que

$$
H = H_0 \sqrt{\frac{B}{A}} \approx H_0 \left(1 + \frac{1}{3} a f' \right). \tag{4.114}
$$

Cette expression est formellement identique à celle que l'on a obtenue plus haut, pour le taux d'expansion d'un espace de Sitter perturbé. Toutefois, la ressemblance n'est que formelle, car la fonction f ne dépend plus simplement, dans ce cas-ci, du logarithme du facteur d'échelle, de sorte que af' risque de n'être plus constant, mais de changer au contraire avec le temps. Par contre, pour qu'une telle expression soit valide, il faut supposer que la densité d'énergie du champ scalaire est à peu près la même dans l'espace perturbé et dans l'espace de base,

$$
\frac{1}{2} \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \right)^2 + V \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\mathrm{d}\varphi_0}{\mathrm{d}t} \right)^2 + V_0. \tag{4.115}
$$

On peut vérifier si tel est le cas en se servant de la seconde contrainte. En supposant que l'expression proposée pour le nouveau taux d'expansion est bel et bien valide, la seconde contrainte devient

$$
2\frac{\mathrm{d}H_0}{\mathrm{d}t} = -\kappa \left(\frac{\mathrm{d}\varphi_0}{\mathrm{d}t} \right)^2 = -\kappa \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \right)^2 \frac{H}{H_0} \left(1 + \frac{aB'}{3B} \right), \tag{4.116}
$$

ce qui implique que

$$
\left(\frac{\mathrm{d}\varphi_0}{\mathrm{d}t} \right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \right)^2 \frac{H}{H_0} \left(1 + \frac{aB'}{3B} \right). \tag{4.117}
$$

Cette équation n'est vraiment valide qu'au premier ordre dans les corrections quantiques, car toutes les corrections d'ordre supérieur ont été systématiquement négligées dans le raisonnement ayant permis de l'obtenir. En développant au premier ordre en f, avec $B = 1 - f$, on trouve

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi_0}{\mathrm{d}t}\right)^2 \approx \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3}af'\right)\left(1 - \frac{1}{3}af'\right) \approx \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2, \tag{4.118}$$

ce qui implique que

$$\varphi(t) \approx \varphi_0(t). \tag{4.119}$$

La simplification se produit ici de manière générale, peu importe la forme particulière de la fonction f et de sa dérivée. Ainsi, on en conclut que l'expression proposée pour le taux d'expansion de l'espace perturbé est bel et bien valide, étant cohérente avec les deux contraintes déduites de l'action effective. Le champ scalaire lui-même ne se trouve pas modifié par les modes infrarouges des perturbations métriques, du moins au premier ordre, de sorte que sa densité d'énergie demeure bel et bien inchangée. Le taux d'expansion de l'espace est quant à lui possiblement altéré, voyant sa valeur modifiée avec le temps suivant celle de af'.

§4.15 Remarques finales. Les résultats précédents représentent en quelque sorte l'exact opposé de ceux rencontrés au premier chapitre de ce mémoire. En analysant de manière perturbative les équations d'Einstein, on y a conclu en effet que le champ scalaire contenu dans un espace se trouve modifié par les perturbations affectant la métrique de cet espace, alors que son taux d'expansion demeure à peu près inchangé, et ce à tous les ordres. Ici, quand on tient compte des corrections quantiques à l'action gravitationnelle, la situation inverse se produit. Le champ demeure à peu près inchangé, alors que le taux d'expansion de l'espace reçoit une correction potentiellement importante.

Par ailleurs, la conclusion tirée plus tôt dans ce chapitre, en se basant sur l'analyse perturbative de l'action gravitationnelle pour un espace de Sitter, se révèle maintenant quelque peu précipitée. Il est vrai que le taux d'expansion d'un espace de Sitter n'est pas perturbé par les corrections quantiques infrarouges de premier ordre, mais il s'agit là non d'une règle générale, mais plutôt d'un cas limite ne s'appliquant qu'à cet espace.

Or, à nul moment dans son histoire, l'univers ne s'est jamais trouvé dans un état rigoureusement identique à celui d'un espace de Sitter, même durant sa phase primordiale d'inflation, où son expansion était à peu près exponentielle. Dans des cas plus réalistes comme celui d'un espace contenant un champ scalaire, les modes infrarouges des perturbations métriques peuvent réellement affecter le taux d'expansion de l'espace, du moins quand on tient compte de leur caractère quantique. Il est donc possible que ces effets infrarouges aient joué un rôle dans l'histoire de l'univers physique, en favorisant par exemple la réduction progressive de sa constante cosmologique.

Références

Introduction

[1] J. Lagrange, *Oeuvres complètes*, tome 13, « Correspondance inédite de Lagrange et d'Alembert », édition de J.-A. Serret (1882).

[2] G. Lemaître, *Un univers homogène rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques*, Ann. Soc. Scient. Bruxelles 47A (1927) 49-59.

[3] E. Hubble, *A Relation Between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 15 (1929) 168-173.

[4] A. Eddington, *The Expanding Universe* (1933).

[5] R. M. Wald, *General Relativity* (1984).

Chapitre 1

[6] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman et R. H. Brandenberger, *Theory of Cosmological Perturbations*, Phys. Rep. 215 (1992) 203-333.

[7] L. R. Abramo, R. H. Brandenberger et V. M. Mukhanov, *The Energy-Momentum Tensor for Cosmological Perturbations*, Phys. Rev. D56 (1997) 3248-3257.

[8] W. G. Unruh, *Cosmological Long Wavelength Perturbations* (1998) [arXiv : astro-ph 9802323].

[9] L. R. Abramo et R. P. Woodard, *No One Loop Back Reaction in Chaotic Inflation*, Phys. Rev. D65 (2002) 063515.

[10] G. Geshnizjani et R. H. Brandenberger, *Back Reaction and Local Cosmological Expansion Rate*, Phys. Rev. D66 (2002) 123507.

[11] I. Cho, J.-O. Gong et S. H. Oh, *Second Order Effective Energy-Momentum Tensor of Gravitation Scalar Perturbations with Perfect Fluid* (2020) [arXiv : gr-qc 2003.12279].

Chapitres 2 à 4

[12] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry* (2004).

[13] T. S. Bunch et P. Davies, *Quantum Field Theory in de Sitter Space : Renormalization by Point Splitting*, Proc. Roy. Soc. Lond. A 360 (1978) 117-134.

[14] N. D. Birrell et P. Davies, *Quantum Fields in Curved Spacetime* (1982).

[15] A. A. Starobinski, *Dynamics of Phase Transitions in the New Inflationary Universe Scenario and Generation of Perturbations*, Phys. Lett. B 117 (1982) 175-178.

[16] A. A. Starobinski et J. Yokoyama, *Equilibrium State of a Self Interacting Scalar Field in the De Sitter Background*, Phys. Rev. D 50 (1994) 6357-6368.

[17] A. Vilenkin et L. H. Ford, *Gravitational Effects upon Cosmological Phase Transitions*, Phys. Rev. D 26 (1982) 1231.

[18] S. Weinberg, *The Cosmological Constant Problem*, Rev. Mod. Phys. 61 (1989) 1-23.

[19] N. C. Tsamis et R. P. Woodard, *The Structure of Perturbative Quantum Gravity on a de Sitter Background*, Comm. Math. Phys. 162 (1994) 217-248.

[20] N. C. Tsamis et R. P. Woodard, *The Physical Basis for Infrared Divergences in Inflationary Quantum Gravity*, Class. Quantum Grav. 11 (1994) 2969.

[21] N. C. Tsamis et R. P. Woodard, *The Quantum Gravitational Back-Reaction on Inflation*, Ann. Phys. 253 (1997) 1-54.

[22] V. Mukhanov et S. Winitzki, *Introduction to Quantum Effects in Gravity* (2007).

[23] V. K. Onemli, *Vacuum Fluctuations of a Scalar Field during Inflation : Quantum versus Stochastic Analysis*, Phys. Rev. D 91 (2015) 103537.

[24] H. Kitamoto et Y. Kitazawa, *Non-Linear Sigma Model in de Sitter Space*, Phys. Rev. D 83 (2011) 104043.

[25] H. Kitamoto et Y. Kitazawa, *Soft Gravitons Screen Couplings in de Sitter Space*, Phys. Rev. D 87 (2013) 124007.

[26] H. Kitamoto, Y. Kitazawa et T. Matsubara, *De Sitter Duality and Logarithmic Decay of Dark Energy*, Phys. Rev. D 101 (2020) 023504.